

論文

타원 섬유가 포함된 복합재료에서의 탄성 해석

이정기*

Elastic Analysis in Composite Including Multiple Elliptical Fibers

Jung-Ki Lee*

ABSTRACT

A volume integral equation method (VIEM) is introduced for the solution of elastostatic problems in an unbounded isotropic elastic solids containing interacting multiple isotropic or anisotropic elliptical inclusions subject to remote uniaxial tension. The method is applied to two-dimensional problems involving long parallel elliptical cylindrical inclusions. A detailed analysis of stress field at the interface between the matrix and the central inclusion is carried out for square and hexagonal packing of the inclusions. Effects of the number of isotropic or anisotropic elliptical inclusions and various fiber volume fractions for the circular inclusion circumscribing its respective elliptical inclusion on the stress field at the interface between the matrix and the central inclusion are also investigated in detail. The accuracy and efficiency of the method are examined through comparison with results obtained from analytical and finite element methods. The method is shown to be very accurate and effective for investigating the local stresses in composites containing isotropic or anisotropic elliptical fibers.

초 록

체적 적분방정식법(Volume Integral Equation Method)이라는 새로운 수치해석 방법을 이용하여, 서로 상호작용을 하는 등방성 또는 이방성 타원 함유체를 포함하는 등방성 무한고체가 정적 인장하중을 받을 때 무한고체 내부에 발생하는 응력분포 해석을 매우 효과적으로 수행하였다. 즉, 등방성 기지에 다수의 등방성 또는 이방성 타원 함유체의 중심이 1) 정사각형 배열 형태 또는 2) 정육각형 배열 형태로 포함되어 있는 경우에, 다양한 타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비에 대하여, 중앙에 위치한 타원 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 인장응력 분포의 변화를 구체적으로 조사하였다. 또한, 체적 적분방정식법을 이용한 해를 유한요소법을 이용한 해 및 해석해와 비교해 봄으로써, 체적 적분방정식법을 이용하여 구한 해의 정확도를 검증하였다.

Key Words : 체적 적분방정식법(Volume Integral Equation Method), 유한요소법(Finite Element Method), 타원 함유체(Elliptical Inclusion), 섬유 체적분율(Fiber Volume Fraction), 복합 재료(Composite Materials)

1. 서 론

다양한 형태의 복합재료가 발달함에 따라, 원형 및 타원을 비롯한 다양한 형태의 함유체에서 발생하는 응력 성분을 정확하

게 조사하려는 연구가 많은 연구자들에 의하여 진행되고 있다.

인장하중을 받을 때, 단일 또는 다수의 함유체를 포함하는 무한 고체에서의 탄성해석에 관한 연구는 Eshelby[1], Hashin [2], Achenbach와 Zhu[3], 그리고 많은 연구자들[4-8]에 의하여

접수: 2011년 8월 16일, 수정: 2011년 12월 2일, 게재승인: 2011년 12월 15일

* 홍익대학교 기계정보공학과, 교신저자(E-mail: inq3jkl@wow.hongik.ac.kr)

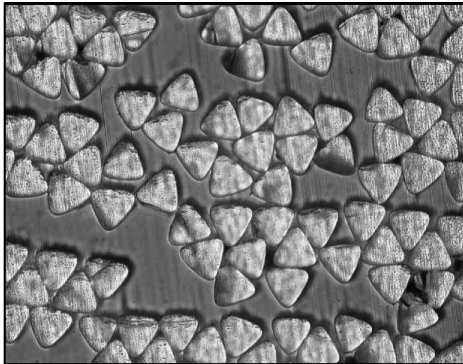


Fig. 1 Micrograph cross-section of unidirectional 60 mm triangular glass fibre composite ($V_r = 0.5$)[15].

연구되었다. 특히, 타원을 비롯한 다양한 형태의 함유체를 포함하는 무한 고체에서의 탄성해석에 관한 연구는 Nakasone 등 [9], Nozaki 등[10-13], 그리고 Dong 등[14] 등에 의하여 연구되었다.

원형 또는 타원을 비롯한 다양한 형태(Fig. 1[15])의 등방성 함유체 또는 이방성 함유체에서 발생하는 응력 집중 현상으로 인하여, 복합재료에 균열이 발생하고, 전파되어, 결국 복합재료가 파손에 이르게 되기 때문이다. 그러므로, 복합재료에서의 파손 메카니즘을 정확히 예측하기 위해서는, 원형 또는 타원 실린더 형태 등 다양한 형태의 등방성 함유체 또는 이방성 함유체가 포함된 등방성 무한고체에서의 탄성 해석이 기본적으로 필요하게 된다.

그러나 문제의 복잡성 때문에 해석해를 구할 수 있는 경우는 극히 제한되어 있으며, 대부분의 연구에서는, 섬유 배열을 일정한 배열로 가정하여, 유한요소법이나 경계요소법을 이용한 단위 셀(unit cell) 모델이 사용되고 있다. 하지만, 실제의 복합재료(특히, 금속기지 복합재료)의 단면을 조사해보면, Fig. 2에 보이는 대로, 섬유의 배열이 일정한 배열을 유지하기 보다는 원래의 배열에서 조금씩 흐트러진 형태를 나타내는 경우가 많다. 즉, 단위 셀(unit cell) 모델에 바탕을 둔 해석 결과와 실제의 복합재료 단면에 대한 해석 결과가 서로 다를 가능성이 높다. 또한, 복합재료를 이루는 재료들은 일반적으로 등방성 재료이나, 항공분야에 사용되고 있는 금속기지 복합재료에서는 Ti 기지는 등방성 재료로 이루어지지만, SiC 섬유는 이방성 재료로 이루어지는 경우도 있다.

따라서, 원래의 배열에서 흐트러진 임의의 형상을 갖는 등방성 또는 이방성 함유체를 포함하는 복합재료에서의 응력 해석을 수행하기 위하여 유한요소법이나 경계요소법을 이용한다고 가정해 보기로 한다. 우선, 유한요소법을 이용한다고 가정하면, 함유체를 포함한 복합재료 전체의 영역을 요소분할해야 한다는 번거로움이 있으며, 특히 함유체와 함유체 사이의 거리가 변하는 문제를 해석할 때 전체의 모델링을 다시 해야 한다는 어려움이 있게 된다. 다음에, 경계요소법을 이용한다고 가

정하면, 함유체가 임의의 형상을 나타내거나 이방성 재료로 이루어지는 경우 수치해석에 많은 어려움이 있게 된다[16-22].

그러므로, 본 논문에서는 첫째로, 체적 적분방정식법(Volume Integral Equation Method)이라는 새로운 수치해석 방법을 소개한다. 둘째로, 체적 적분방정식법이, 원래의 배열에서 흐트러진 임의의 형상을 갖는 함유체를 포함하는 복합재료에서의 응력 해석을 매우 효율적으로 수행할 수 있는 수치해석 방법임을 입증한다; 구체적으로 설명하면, 서로 상호작용을 하는 등방성 또는 이방성 타원 함유체를 포함하는 등방성 무한고체가 정적 인장하중을 받을 때 무한고체 내부에 발생하는 응력분포 해석을 매우 효과적으로 수행한다. 즉, 등방성 기지에 다수의 등방성 또는 이방성 함유체가 1) 정사각형 배열 형태 또는 2) 정육각형 배열 형태로 포함되어 있는 경우에 대하여, 타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.10만큼씩 증가할 때, 중앙에 위치한 등방성 또는 이방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 인장응력 분포의 변화를 구체적으로 조사한다. 본 논문에서 함유체의 체적비(c)는 타원 실린더 함유체의 체적비가 아니라, 타원을 포함하는 원형 실린더 함유체에 대한 체적비를 의미한다. 셋째로, 본 논문에서 체적 적분방정식법을 이용하여 구한 수치해석 결과 가운데, 특히, 서로 상호작용을 하는 다수의 이방성 타원 함유체(섬유)를 포함하는 등방성 무한고체가 정적 인장하중을 받을 때 무한고체 내부에 발생하는 응력분포 해석 결과, 저자가 아는 범위 내에서, 아직까지 문헌에서 쉽게 찾아보기 힘들다는 점을 유의해야 한다[23]. 넷째로, 체적 적분방정식법을 이용한 해를 유한요소법을 이용한 해 및 해석해와 비교해 봄으로서, 체적 적분방정식법을 이용하여 구한 해의 정확도를 검증하였다. 끝으로, 본 논문에서 체적 적분방정식법을 이용하여 구한 해가, 다양한 해석 방법들을 이용하여 구한 해들을 검증하는 데 벤치마킹(benchmark) 자료로 활용될 수 있을 것이다[24].

2. 체적 적분방정식법(VIEM)

Fig. 3은 재료특성이 다른 다양한 형태를 갖는 다수의 함유체를 포함하는 무한고체가 무한하중을 받는 일반적인 탄성정역학 문제를 나타낸다. 여기서, 무한하중이란 무한원방에서 작용하는 하중을 나타낸다.

Fig. 3에서, 기지(matrix)는 무한공간을 차지하는 균일한 등방성 재료로 이루어지고, 함유체들은 기지와 다른 등방성 또는 이방성 재료로 이루어진다고 가정한다. $c^{(1)}_{ijkl}$ 은 함유체의 탄성상수를 나타내고, $c^{(2)}_{ijkl}$ 은 기지의 탄성상수를 나타낸다. 함유체들과 기지 사이의 경계면은 변위와 표면력 벡터(traction vector)의 연속성을 보장하는 완전결합이라고 가정한다.

Lee와 Mal[4]은 다수의 등방성 또는 이방성 함유체를 포함하는 무한고체 내부의 임의의 위치에서의 변위 벡터 $u_m(\mathbf{x})$ 가

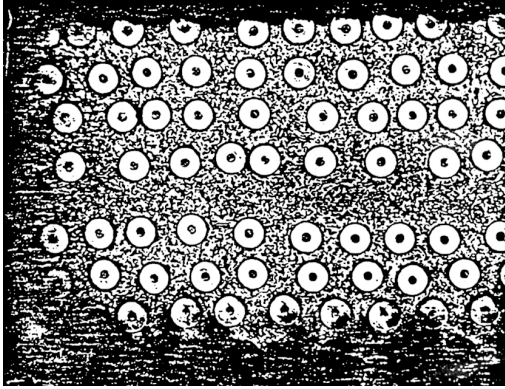


Fig. 2 Micrographic cross-section of a SiC/Ti-15-3 composite.

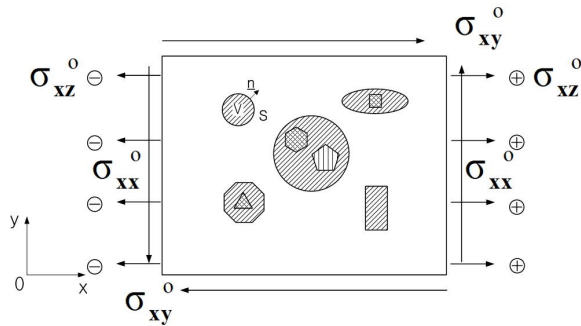


Fig. 3 Geometry of the general elastostatic problem.

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^0(\mathbf{x}) - \int_V \delta c_{ijkl} g_{i,j}^m(\xi, \mathbf{x}) u_{k,l}(\xi) d\xi \quad (1)$$

의 방정식을 만족함을 보였다. 식 (1)에서 적분은 전체 무한공간에 대해서 이루어지고, $\delta c_{ijkl} = \mathbf{c}^{(1)}_{ijkl} - \mathbf{c}^{(2)}_{ijkl}$ 이며 등방성 또는 이방성 함유체와 등방성 기지 사이의 탄성상수의 차이를 나타낸다. $u_m^0(\mathbf{x})$ 는 무한 하중에 대한 변위를 나타내며, $g^m(\xi, \mathbf{x})$ 은 등방성 무한기지에서의 탄성정역학 Green 함수이다. 즉, $g^m(\xi, \mathbf{x})$ 은 등방성 무한기지의 \mathbf{x} 에서 m 방향으로 작용하는 단위 집중하중 e_m 때문에 ξ 에서 발생하게 되는 변위 벡터의 i 방향 성분을 나타낸다. 식 (1)에서 합과 곱과 콤마 표기법이 사용되었으며, 미분은 적분변수 ξ 에 관해서 행해진다. 여기서, δc_{ijkl} 가 함유체 내부에서만 0이 아니므로, 피 적분함수(integrand)는 함유체 외부의 무한공간에서는 0이 된다는 사실을 주목해야 한다[4].

만약 \mathbf{x} 가 함유체 내부에 속하면, 식 (1)은 함유체 내부에서의 미정 변위 벡터 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 에 관한 적분-미분 방정식(integro-differential equation)이 된다. 따라서, 임의의 형상을 갖는 단일의 함유체라 할지라도, 식 (1)의 해를 해석적으로 구한다는 것은 매우 어려운 문제가 된다. 그러므로, 함유체 내부를 표준의 유한요소들을 사용해서 요소 분할하여 함유체 내부에서

의 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 를 수치해석 방법으로 결정하는 체적 적분방정식법이 Lee와 Mal[4,25]에 의하여 개발되었다. 일단, 함유체 내부에서의 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 가 결정되면, 함유체 내부에서의 변형률 및 응력을 계산할 수 있고, 또한 함유체 외부에서의 변위, 변형률 및 응력도 식 (1)의 적분 값을 구함으로써 별다른 어려움없이 계산할 수 있다. 식 (1)에서 g^m 은 등방성 무한기지에서의 탄성역학 Green 함수이므로, 비록 함유체가 이방성 재료로 이루어진다고 할지라도, 체적 적분방정식법에서는 이방성 함유체에서의 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점이 있다. 그런데, 일반적으로 이방성 재료에서의 Green 함수는 등방성 재료의 경우와 비교해 볼 때 복잡한 형태로 나타나며, 특히, 탄성동역학 문제에서는 이방성 재료에서의 Green 함수를 구하는 것이 매우 어려운 것으로 알려져 있다[26].

등방성 무한기지에 다수의 등방성 원형 함유체가 포함된 무한고체에서의 일반적인 탄성동역학 및 탄성정역학 문제를 해석하기 위한 체적 적분방정식법에 대한 자세한 기술은 Lee와 Mal[4,25]에 잘 나타나 있다. 특히, Buryachenko의 전공 서적인 "Micromechanics of heterogeneous materials"[27]의 4.3절 'Volume Integral Equation Method'에 탄성정역학 문제를 해석하기 위한 체적 적분방정식법에 대한 자세한 설명이 나와 있다.

3. 다수의 함유체 문제

Fig. 4에 있는 다수의 등방성 또는 직교 이방성 타원 함유체가 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장 하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다.

본 논문에서는, 타원의 장축이 x -축이고, 단축이 y -축이라고 할 때, 타원의 반경비가 0.5인 타원 함유체의 경우를, 대표적으로, 고려해 보았다.

다수의 타원 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 타원을 포함하는 원형 실린더 함유체(Fig. 4(a)에 점선으로 표시)의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.10만큼씩 증가할 때, 타원 함유체의 개수를 늘려가면서, 중앙에 위치한 타원 함유체에서의 응력분포의 변화를 조사하였다. 이 경우는 체적 적분방정식법이 최적의 수치해석 방법임을 알 수 있다[4,27]. 왜냐하면, 1) 경계요소법과 달리, 모든 경계면에서의 연속 조건이 자동적으로 만족하고, 함유체 내부를 유한요소를 사용하여 요소 분할하므로 임의의 형상을 갖는 함유체를 해석할 때도 전혀 어려움이 없게 되며, 2) 유한요소법과 달리, 무한공간을 이루고 있는 기지는 요소분할할 필요가 없이, 함유체 내부만을 요소분할하면 되기 때문이다. 특히, 3) 함유체의 체적비가 변화할 때, 기지를 요소분할할 필요가 없이 함유체의 위치만 변경하면 되므로, 체적 적분방정식법 모델링을 매우 효율적으로 수행할 수 있게 된다.

3.1 등방성 무한 기지에서의 탄성정역학 Green 함수

식 (1)에서 등방성 무한기지에 대한 Green 함수[28]는 다음과 같이 주어진다.

$$g_{\alpha}^{\beta} = \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left[-\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \ln r \delta_{\alpha\beta} + r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (2)$$

여기서, $\mathbf{r} = |\mathbf{x} - \xi|$, $\alpha, \beta = 1, 2$ 그리고 λ, μ 는 등방성 무한기지에서의 Lamé 상수를 나타낸다.

3.2 다수의 등방성 타원 함유체 중심의 배열이 정사각형(square) 형태일 때

다수의 등방성 타원 함유체의 중심이 정사각형 형태로 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다(Fig. 4(a)).

우선, 체적 적분방정식법을 이용한 해의 정확도를 검증하기 위하여, 단일의 등방성 타원 함유체가 등방성 기지에 포함되어 있는 경우에 함유체 내부에서의 응력분포를 조사하였다. 다음에, 다수의 타원 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비(c)가 0.20 부터 0.50까지 0.10만큼씩 증가할 때, 함유체의 개수를 a) 9 개, b) 25개, c) 49개로 늘려가면서, 중앙에 위치한 타원 함유체에서의 응력분포의 변화를 조사하였다.

등방성 함유체와 등방성 기지의 물질 특성치는 Table 1에 나타나 있으며, 등방성 함유체의 Lamé 상수가 등방성 기지의 Lamé 상수보다 큰 경우를 고려해 보았다. 여기서, 등방성 함유체와 등방성 기지의 물질 특성치는 SiC/Ti 금속기지 복합재료의 물질 특성치를 참고하여 결정하였다.

Table 2는 타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비에 따라 달라지는 타원 함유체 중심 사이의 거리(d)/타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 반지름(a)를 나타낸다. 예를 들어, 타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비(c)가 0.40인 경우에, 타원 함유체 중심 사이의 거리(d)는 2.8025a가 된다. 여기서, a는 타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 반지름을 나타낸다.

Fig. 5는 단일의 등방성 타원 함유체 문제 해석을 위하여 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델[29]의 예를 나타내며, 함유체 내부를 각각 320개의 표준의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였다.

Table 3은 등방성 기지와 단일의 등방성 타원 함유체로 이루어진 무한고체가 무한 인장하중을 받을 때 함유체 내부에 발생하는 균준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)에 대한 체적 적분방정식법의 해와 해석해와의 비교를 나타낸다. 이때, 단일의 등방성 타원 함유체 내부에서의 인장응력 성분은 일정한 값을 갖게 된다[30-35]. 체적 적분방정식법의 해와 해석해가 서로 잘 일치함을 알 수 있다.

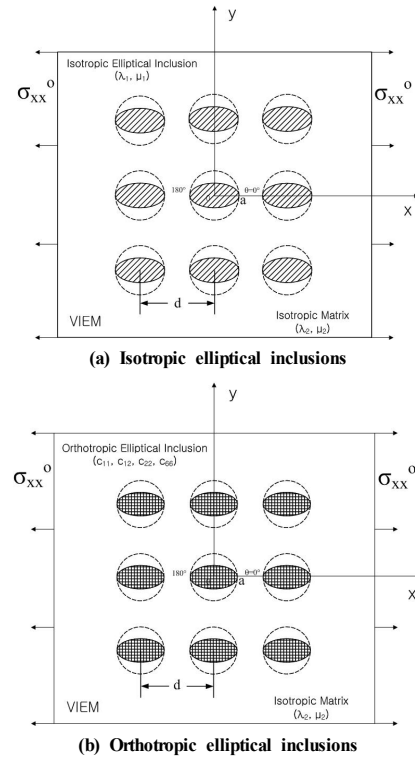


Fig. 4 Multiple (a) isotropic and (b) orthotropic elliptical cylindrical inclusions in unbounded isotropic matrix under uniform remote tensile loading.

이번에는, ADINA[36]라는 상업용 유한요소법 코드를 이용하여, 단일의 등방성 타원 함유체 문제 해석을 수행한다.

Fig. 6은 ADINA에 사용된 유한요소법 모델을 나타낸다. Fig. 6(a)는 전체 모델을 나타내고, (b)는 타원 함유체(㉠로 표시)의 주위를 확대한 모델을 나타내며, (c)는 타원 함유체(㉠로 표시)의 근처를 한번 더 확대한 모델을 나타낸다. Fig. 6에 사용된 8개의 절점을 갖는 사각형 요소의 개수는 43,200이다. 타원 함유체와 기지의 경계면에서의 정확한 응력분포를 구하기 위하여, 매우 세밀한(refined) 유한요소들을 사용하여 요소 분할하였다. 또한, 무한공간을 충분히 고려하기 위하여, 한 변의 길이가 타원 함유체 긴 지름의 10배가 되는 정사각형이 무한 공간의 경계가 되도록 하였다.

Fig. 7은 등방성 타원 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 균준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)에 대한 체적 적분방정식법에 의한 해와 ADINA를 이용한 해와의 비교를 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$). 체적 적분방정식법에 의한 해와 ADINA를 이용한 해가 서로 잘 일치함을 확인할 수 있다. 여기서 주의할 점은, ADINA를 이용한 해에서, 경계면의 각 절점에서의 응력성분은 각 절점에서의 응력성분이 아니라, 경계면에 접한 매우 세밀한 유한요소들의 각 절점에서의 평균 응력 성분임을 밝혀둔다.

Table 1 Material properties of the isotropic matrix and the isotropic and orthotropic elliptical inclusion for the elastostatic problems

(Unit: GPa)	Isotropic Matrix	Inclusion	
		Orthotropic	Isotropic
λ	67.34	-	176.06
μ	37.88	-	176.06
c_{11}	143.10	279.08	528.18
c_{12}	67.34	7.80	176.06
c_{22}	143.10	30.56	528.18
c_{66}	37.88	11.80	176.06

Table 2 Fiber separation distances according to different fiber volume fractions

Fiber volume fraction (c)*	Fiber separation distance (d) / Radius of circular inclusion (a)**	
	Square array	Hexagonal array
0.20	3.9633	4.2589
0.30	3.2360	3.4774
0.40	2.8025	3.0115
0.50	2.5066	2.6935

* Fiber volume fraction (c) of circular inclusion circumscribing its respective elliptical inclusion (Fig. 4)

** Radius of circular inclusion circumscribing its respective elliptical inclusion (Fig. 4)

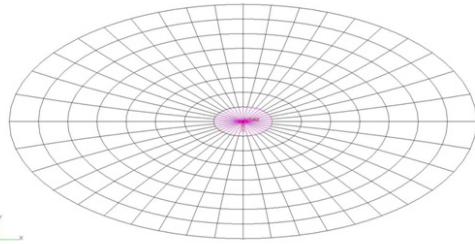
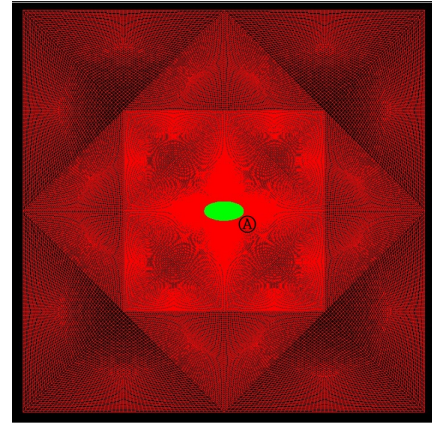


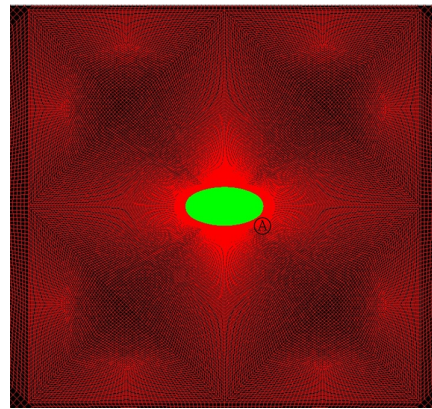
Fig. 5 A typical discretized model in the volume integral equation method.

Fig. 5의 체적 적분방정식법 모델과 Fig. 6에 있는 유한요소법 모델을 비교해보면, 체적 적분방정식법에 사용되는 모델이 매우 효율적임을 확인할 수 있다. 그 이유로는 1) 무한 공간을 이루고 있는 기지를 요소 분할할 필요가 없기 때문에 많은 개수의 유한요소를 절약할 수 있고, 2) 특히, 타원 함유체의 체적비(c)가 바뀌어도, 함유체의 위치만 변경하면 되기 때문이다.

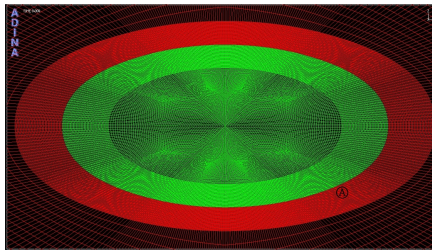
다음으로, Fig. 8은 다수의 타원 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델[29]의 예를 나타내며, 각각의 함유체 내부를 각각 320개의 표준의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였다. Fig. 9는 서로 다른 함유체의 체적비에 대하여, 서로 다른 개수의 타원 함유체가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 표준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)을 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$).



(a) Finite element model



(b) First expanded view surrounding the elliptical inclusion (A)



(c) Second expanded view surrounding the elliptical inclusion (A)

Fig. 6 A typical discretized model in the finite element method for a single elliptical inclusion.

Table 3 Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) within the isotropic elliptical cylindrical inclusion due to uniform remote tensile loading (σ_{xx})

	Normalized tensile stress component inside the isotropic elliptical inclusion
Exact	1.6144
VIEM	1.6147 (Average)

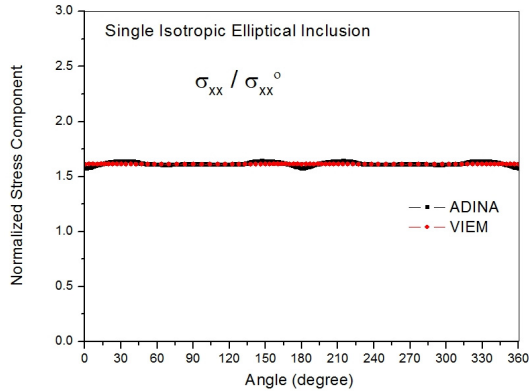


Fig. 7 Comparison of volume integral equation method and ADINA solutions for normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^o$) at the interface between the single isotropic elliptical inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading.

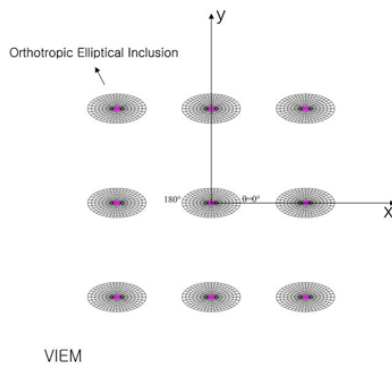


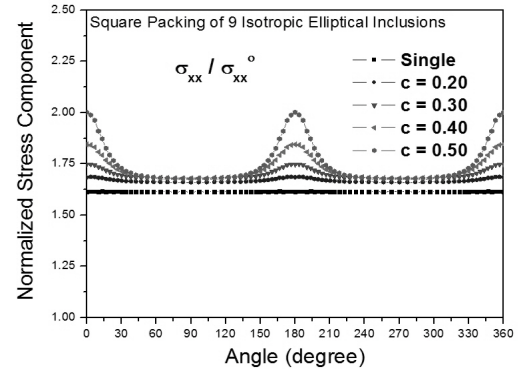
Fig. 8 A typical discretized model in the volume integral equation method.

동일한 함유체의 체적비에 대하여, 등방성 타원 함유체의 개수가 증가하여도 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^o$)이 크게 변하지 않는 것을 볼 수 있다. 그러나, 함유체의 체적비가 증가함에 따라서, 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^o$)이 크게 변하는 것을 볼 수 있다. 그 이유는, 함유체의 체적비가 증가함에 따라서, 중앙에 위치한 타원 함유체와 주변에 있는 함유체들 사이의 상호작용이 커지기 때문으로 판단된다.

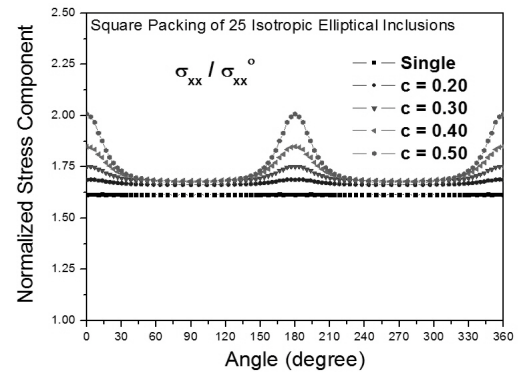
3.3 다수의 등방성 타원 함유체 중심의 배열이 정육각형(hexagon) 형태일 때

다음에는, 다수의 등방성 타원 함유체의 중심이 정육각형 형태로 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다.

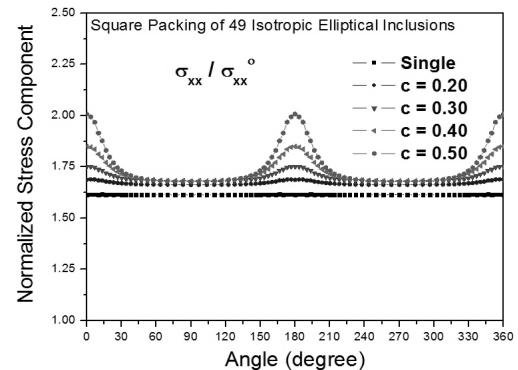
다수의 타원 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.10만큼씩 증가할 때, 타원 함유체의 개수를 a) 7개, b) 19개,



(a) 9 isotropic elliptical inclusions



(b) 25 isotropic elliptical inclusions



(c) 49 isotropic elliptical inclusions

Fig. 9 Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^o$) at the interface between the central isotropic elliptical inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading.

c) 37개로 늘려가면서, 중앙에 위치한 함유체에서의 응력분포의 변화를 조사하였다. 등방성 함유체와 등방성 기지의 물질 특성은 Table 1에 나타나 있다. Table 2는 함유체의 체적비에 따라 달라지는 타원 함유체 중심 사이의 거리(d)/타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 반지름(a)를 나타낸다.

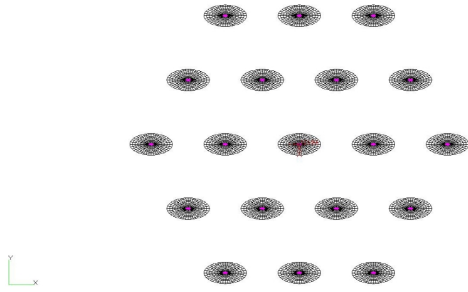


Fig. 10 A typical discretized model in the volume integral equation method for hexagonal inclusion packing array.

Fig. 10은 다수의 타원 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델[29]의 예를 나타내며, 각각의 함유체 내부를 각각 320개의 표준의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였다. Fig. 11은 서로 다른 함유체의 체적비에 대하여, 서로 다른 개수의 타원 함유체가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 균준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)을 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$).

여기에서, 타원 함유체의 반경비가 2.0인 경우에, 다수의 등방성 타원 함유체의 중심이 정육각형 형태로 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형을 문제로 가정하여, 고찰해 본다(Fig. 12).

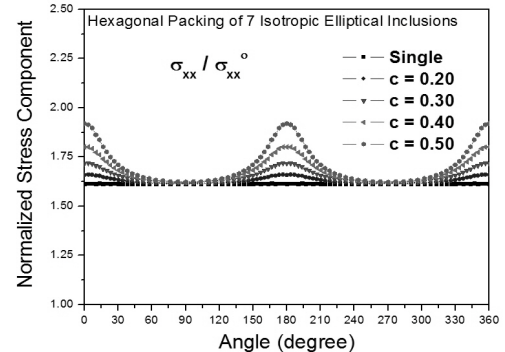
Fig. 13은 타원 함유체의 반경비가 2.0인 경우에, 단일의 타원 함유체에 대한 체적 적분방정식법 모델[29]의 예를 나타내며, 함유체 내부를 각각 480개의 표준의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였다. Fig. 14는 타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.10만큼씩 증가할 때, 함유체의 개수가 a) 7개, b) 19개, c) 37개인 경우에, 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 균준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)을 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$).

Fig. 11(함유체의 반경비가 0.5인 경우)과 Fig. 14(함유체의 반경비가 2.0인 경우)를 비교해 보았을 때, 함유체의 반경비가 0.5인 경우에, 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 인장응력 성분이 훨씬 큰 값을 나타내는 것을 알 수 있다.

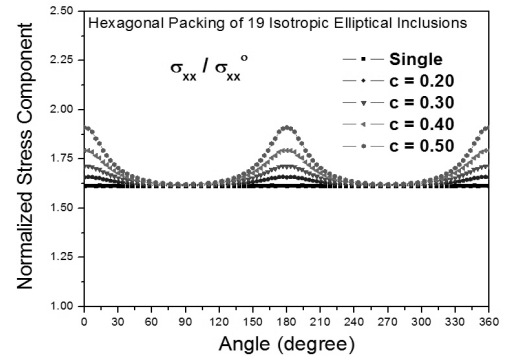
3.4 다수의 직교이방성 타원 함유체 중심의 배열이 정사각형(square) 형태일 때

이번에는, 다수의 직교 이방성 타원 함유체의 중심이 정사각형 형태로 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형을 문제로 가정하여, 고찰해 본다(Fig. 4(b)).

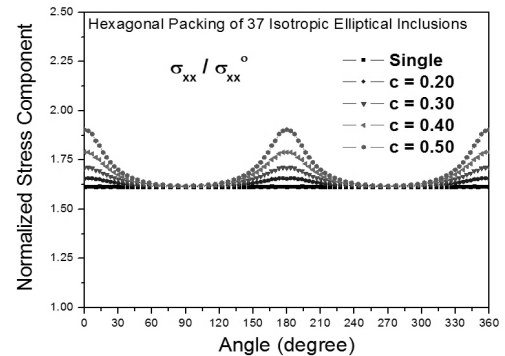
우선, 체적 적분방정식법을 이용한 해의 정확도를 검증하기 위하여, 단일의 직교 이방성 타원 함유체가 등방성 기지에 포함되어 있는 경우에 함유체 내부에서의 응력분포를 조사하였다.



(a) 7 isotropic elliptical inclusions



(b) 19 isotropic elliptical inclusions



(c) 37 isotropic elliptical inclusions

Fig. 11 Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the central isotropic elliptical inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading.

다음에, 다수의 타원 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.10만큼씩 증가할 때, 함유체의 개수를 a) 9개, b) 25개, c) 49개로 늘려가면서, 중앙에 위치한 타원 함유체에서의 응력분포의 변화를 조사하였다. 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 물질 특성치는 Table 1에 나타나 있으며, 직교 이방성 함유체의 c_{11} 이 등방성 기지의 c_{11} 보다 큰 경우를 고려해 보았다.

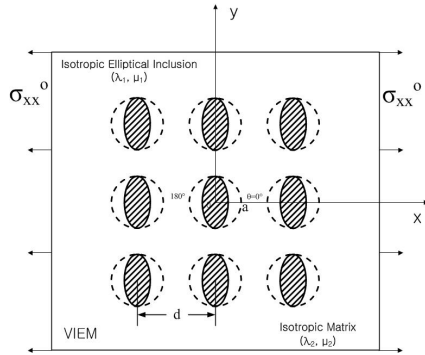


Fig. 12 Multiple isotropic elliptical cylindrical inclusions in unbounded isotropic matrix under uniform remote tensile loading.

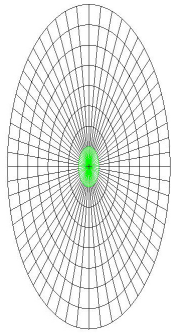


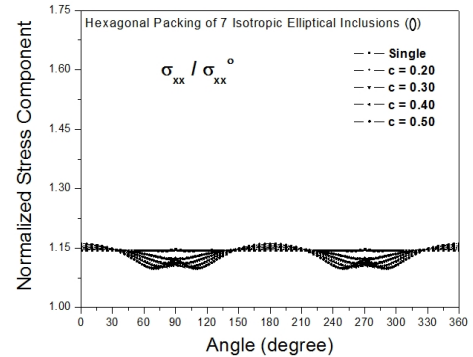
Fig. 13 A typical discretized model for the elliptical inclusion with a 2.0 aspect ratio in the volume integral equation method.

Table 2는 타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비에 따라 달라지는 타원 함유체 중심 사이의 거리(d)/타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 반지름(a)를 나타낸다. 예를 들어, 타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비(c)가 0.50인 경우에, 타원 함유체 중심 사이의 거리(d)는 $2.5066a$ 가 된다. 여기서, a 는 타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 반지름을 나타낸다.

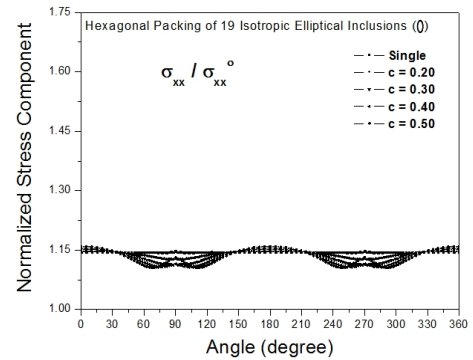
Fig. 5는 단일의 직교 이방성 타원 함유체 해석을 위하여 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델[29]의 예를 나타낸다.

Table 4는 등방성 기지와 단일의 직교 이방성 타원 함유체로 이루어진 무한고체가 무한 인장하중을 받을 때 함유체 내부에 발생하는 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)에 대한 체적 적분방정식법의 해와 해석해와의 비교를 나타낸다. 이때, 단일의 직교 이방성 타원 함유체 내부에서의 인장응력 성분은 일정한 값을 갖게 된다[30-35]. 체적 적분방정식법의 해와 해석해가 서로 잘 일치함을 알 수 있다.

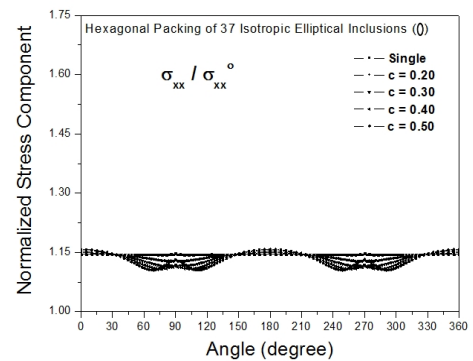
다음으로, Fig. 8은 다수의 타원 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델[29]의 예를 나타낸다.



(a) 7 isotropic elliptical inclusions



(b) 19 isotropic elliptical inclusions



(c) 37 isotropic elliptical inclusions

Fig. 14 Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the central isotropic elliptical inclusion with a 2.0 aspect ratio and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading.

Fig. 15는 서로 다른 함유체의 체적비에 대하여, 서로 다른 개수의 타원 함유체가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)을 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$).

동일한 함유체의 체적비에 대하여, 직교 이방성 타원 함유체의 개수가 증가하여도 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)

이 크게 변하지 않는 것을 볼 수 있다. 그러나, 함유체의 체적비가 증가함에 따라서, 표준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)이 크게 변하는 것을 볼 수 있다. 그 이유는, 함유체의 체적비가 증가함에 따라서, 중앙에 위치한 직교 이방성 타원 함유체와 주변에 있는 함유체들 사이의 상호작용이 커지기 때문으로 판단된다[37].

직교 이방성 함유체의 c_{11} 이 등방성 함유체의 c_{11} 보다 작기 때문에, 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 표준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)이, Section 3.2의 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 표준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)보다 상대적으로 작은 값을 나타내는 것을 확인할 수 있다.

특히, 본 Section에서 구한 응력 해석 결과는, 저자가 아는 범위 내에서, 아직까지 문헌에서 쉽게 찾아보기 힘들다는 점을 유의해야 한다.

Table 4 Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) within the orthotropic elliptical cylindrical inclusion due to uniform remote tensile loading (σ_{xx})

	Normalized tensile stress component inside the orthotropic elliptical inclusion
Exact	1.4206
VIEM	1.4208 (Average)

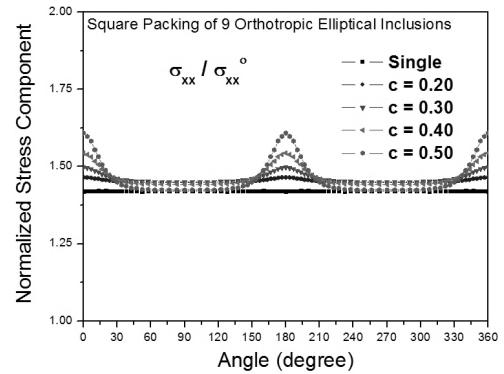
3.5 다수의 직교이방성 타원 함유체 중심의 배열이 정육각형(hexagon) 형태일 때

다음에는, 다수의 직교 이방성 타원 함유체의 중심이 정육각형 형태로 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다.

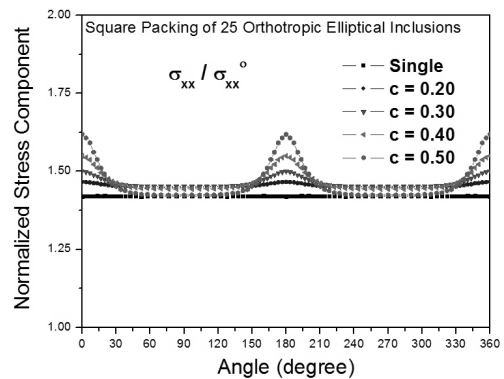
다수의 타원 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.10만큼씩 증가할 때, 타원 함유체의 개수를 a) 7개, b) 19개, c) 37개로 늘려가면서, 중앙에 위치한 함유체에서의 응력분포의 변화를 조사하였다. 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 물질 특성치는 Table 1에 나타나 있다. Table 2는 함유체의 체적비에 따라 달라지는 타원 함유체 중심 사이의 거리(d)/타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 반지름(a)을 나타낸다. 예를 들어, 함유체의 체적비(c)가 0.20인 경우에, 타원 함유체 중심 사이의 거리(d)는 4.2589a가 된다. 여기서, a 는 타원을 포함하는 원형 실린더 함유체의 반지름을 나타낸다.

Fig. 10은 다수의 직교 이방성 타원 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델[29]의 예를 나타낸다.

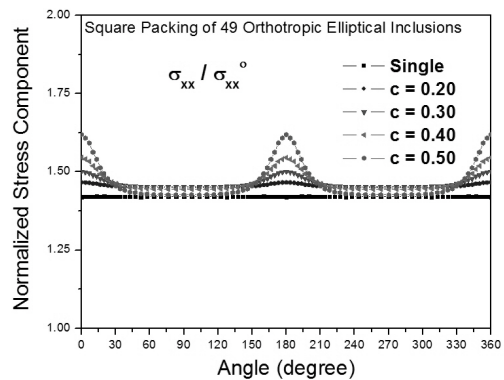
Fig. 16은 서로 다른 함유체의 체적비에 대하여, 서로 다른 개수의 타원 함유체가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 직교 이방성 타원 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 표준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)을 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$).



(a) 9 orthotropic elliptical inclusions



(b) 25 orthotropic elliptical inclusions



(c) 49 orthotropic elliptical inclusions

Fig. 15 Normalized tensile stress component($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the central orthotropic elliptical inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading.

동일한 함유체의 체적비에 대하여, 직교 이방성 타원 함유체의 개수가 증가하여도 표준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)이 크게 변하지 않는 것을 볼 수 있다. 그러나, 함유체의 체적비가 증가함에 따라서, 표준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)이 크게 변하는 것을 볼 수 있다. 그 이유는, 함유체의 체적비가 증가함에

따라서, 중앙에 위치한 직교 이방성 타원 함유체와 주변에 있는 함유체들 사이의 상호작용이 커지기 때문으로 판단된다.

직교 이방성 함유체의 c_{11} 이 등방성 함유체의 c_{11} 보다 작기 때문에, 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)이, Section 3.3의 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)보다 상대적으로 작은 값을 나타내는 것을 확인할 수 있다.

본 Section에서 구한 응력 해석 결과도, 저자가 아는 범위 내에서, 아직까지 문헌에서 쉽게 찾아보기 힘들다는 점을 유의해야 한다.

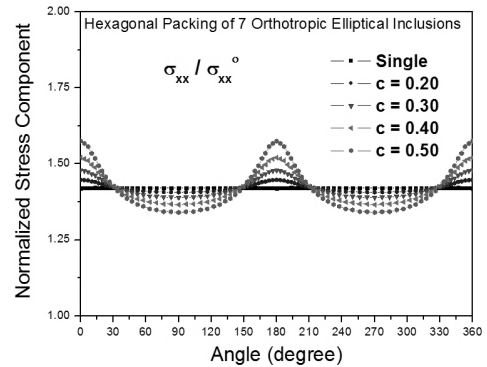
4. 결론

본 논문에서는 등방성 또는 이방성 타원 함유체의 배열이 복합재료의 응력에 미치는 영향에 대하여 조사하기 위하여, 체적 적분방정식법이라는 새로운 수치해석 방법을 적용하여, 등방성 무한기지에 다수의 등방성 또는 이방성 타원 함유체가 포함된 무한고체를 정적 무한하중을 받을 때 복합재료에 발생하는 응력분포에 관한 해석을 수행하였다. 특히, 본 논문에서는 이전에 발표된 논문들에서 다루지 않았던 다수의 타원 함유체 문제 해석에 대하여 고려해 보았다는 데 의의가 있다.

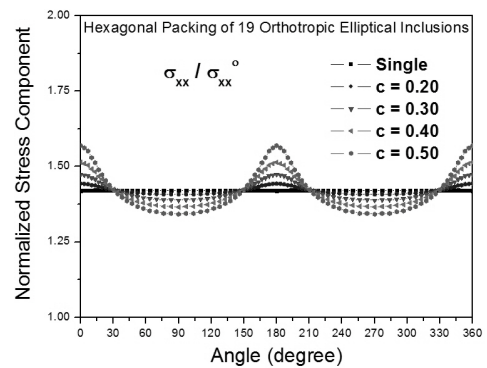
첫째로, 직교 이방성 함유체의 c_{11} 이 등방성 함유체의 c_{11} 보다 작기 때문에, 중앙에 위치한 직교 이방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)이, 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)보다 상대적으로 작은 값을 나타내는 것을 확인할 수 있었다.

둘째로, 타원 함유체의 타원비가 바뀌게 되면, 중앙에 위치한 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)이 크게 달라지는 것을 알 수 있었다. 그러므로, 복합재료에서의 파손 메커니즘을 정확히 예측하기 위해서는, 다양한 형태의 함유체가 포함된 등방성 무한고체에서의 탄성 해석이 필요하게 됨을 확인할 수 있었다.

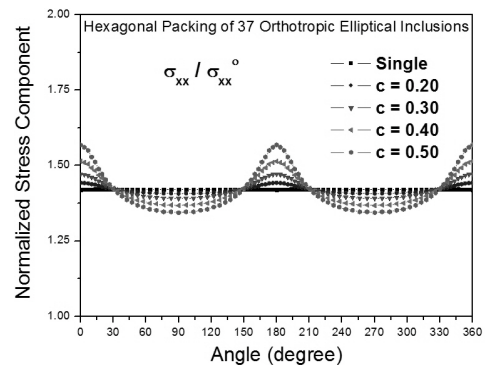
셋째로, 본 논문에서는 함유체의 체적비를 0.2에서부터 0.5까지 고려해 보았다. 그러나, 함유체의 체적비가 더 증가하여도, 체적 적분방정식법을 이용하여 중앙에 위치한 등방성 또는 이방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 인장응력 분포의 변화를 조사하는 데는 별다른 어려움이 없다고 판단된다. 왜냐하면, 함유체의 체적비가 0.6이 되면, 정사각형 배열에서는 함유체와 함유체 사이의 거리가 원형 함유체 반지름의 2.288배가 되고, 정육각형 배열에서는 2.458배가 된다. 하지만, Buryachenko의 “Micromechanics of heterogeneous materials”[27]의 4.3절 ‘Volume Integral Equation Method’에, 두 원형 함유체 사이의 거리가 위의 어느 경우보다 더 가까운 경우에도, 체적 적분방정식법을 이용한 해의 정확함이 검증되어 있기 때문이다(p. 120, Fig. 4.4. 참조).



(a) 7 orthotropic elliptical inclusions



(b) 19 orthotropic elliptical inclusions



(c) 37 orthotropic elliptical inclusions

Fig. 16 Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the central orthotropic elliptical inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading.

넷째로, 체적 적분방정식법에서는 1) 무한 공간을 이루고 있는 기지를 요소 분할할 필요가 없기 때문에 많은 개수의 유한요소를 절약할 수 있고, 2) 특히, 함유체의 체적비(c)가 바뀌어도, 타원 함유체의 위치만 변경하면 되기 때문에, 체적 적분방정식법을 이용하는 것이 유한요소법을 이용하는 것보다 매우 효율적이라는 것을 확인하였다.

끝으로, 다른 연구자들이 다른 다양한 방법들을 사용하여 구한 해들의 정확도를 검증할 때, 본 논문에서 체적 적분방정식법을 이용하여 구한 해가 벤치마킹(benchmark) 자료로 활용될 수 있을 것이다.

후 기

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업(No. 2010-0022211)입니다. 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- 1) Eshelby, J.D., "The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems," *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, A241, 1957, pp. 376-396.
- 2) Hashin, Z., *Theory of Fiber Reinforced Materials*, NASA CR-1974, 1972.
- 3) Achenbach, J.D., and Zhu, H., "Effect of Interphases on Micro and Macromechanical Behavior of Hexagonal-Array Fiber Composites," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, 1990, pp. 956-963.
- 4) Lee, J.K., and Mal, A.K., "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Inclusion and Crack Interaction Problems," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, 1997(Mar.), pp. 23-31.
- 5) Lee, J., and Mal, A., "Characterization of Matrix Damage in Metal Matrix Composites under Transverse Loads," *Computational Mechanics*, Vol. 21, 1998, pp. 339-346.
- 6) Naboulsi, S., "Modeling Transversely Loaded Metal-Matrix Composites," *Journal of Composite Materials*, Vol. 37, 2003, pp. 55-72.
- 7) Lee, J.K., Han, H.D., and Mal, A., "Effects of Anisotropic Fiber Packing on Stresses in Composites," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, No. 33-36, 2006, pp. 4544-4556.
- 8) Ju, J.W., and Ko, Y.F., "Micromechanical Elastoplastic Damage Modeling for Progressive Interfacial Arc Debonding for Fiber Reinforced Composites," *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 17, 2008, pp. 307-356.
- 9) Nakasone, Y., Nishiyama, H., and Nojiri, T., "Numerical Equivalent Inclusion Method: a New Computational Method for Analyzing Stress Fields in and around Inclusions of Various Shapes," *Materials Science and Engineering: A*, Vol. 285, 2000, pp. 229-238.
- 10) Kawashita, M., and Nozaki, H., "Eshelby Tensor of a Polygonal Inclusion and Its Special Properties," *Journal of Elasticity*, Vol. 64, 2001, pp. 71-84.
- 11) Nozaki, H., Horibe, T., and Taya, M., "Stress Field Caused by Polygonal Inclusion," *JSME International Journal*, Vol. 44, No. 4, 2001, pp. 472-482.
- 12) Nozaki, H., and Taya, M., "Elastic Fields in a Polyhedral Inclusion with Uniform Eigenstrains and Related Problems," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 68, 2001, pp. 441-452.
- 13) Nakai, T., and Nozaki, H., "A Numerical Equivalent Inclusion Method Using the Solution of Polyhedral Inclusions," *Bulletin of the College of Education Ibaraki University*, Vol. 57, 2008, pp. 105-112.
- 14) Dong, C.Y., Lo, S.H., and Cheung, Y.K., "Numerical Solution of 3D Elastostatic Inclusion Problems Using the Volume Integral Equation Method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 1-2, 2003, pp. 95-106.
- 15) Bond, I., Hucker, M., Weaver, P., Bleay, S., and Haq, S., "Mechanical Behaviour of Circular and Triangular Glass Fibres and Their Composites," *Composites Science and Technology*, Vol. 62, 2002, pp. 1051-1061.
- 16) Chen, T., "Thermoelastic Properties and Conductivity of Composites Reinforced by Spherically Anisotropic Particles," *Mechanics of Materials*, Vol. 14, 1993, pp. 257-268.
- 17) Johnson, W.C., Earmme, Y.Y., and Lee J.K., "Approximation of the Strain Field Associated with an Inhomogeneous Precipitate. I: Theory," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, 1980, pp. 775-780.
- 18) Kushch, V.I., "Interacting Cracks and Inclusions in a Solid by Multipole Expansion Method," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35, 1998, pp. 1751-1762.
- 19) McPdran, R.C., and Movchan, A.B., "The Rayleigh Multipole Method for Linear Elasticity," *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 42, 1994, pp. 711-727.
- 20) Moschovidis, Z.A., and Mura, T., "Two-Ellipsoidal Inhomogeneities by the Equivalent Inclusion Method," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 42, 1975, pp. 847-852.
- 21) Nakamura, T., and Suresh, S., "Effects of Thermal Residual Stresses and Fiber Packing on Deformation of Metal-Matrix Composites," *Acta Metallurgica et Materialia*, Vol. 41, 1993, pp. 1665-1681.
- 22) Zhang, J., and Katsube, N., "A Hybrid Finite Element Method for Heterogeneous Materials with Randomly Dispersed

- Elastic Inclusions,” *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 19, 1995, pp. 45-55.
- 23) Oh, J.H., Jin, K.K., and Ha, S.K., “Interfacial Strain Distribution of a Unidirectional Composite with Randomly Distributed Fibers under Transverse Loading,” *Journal of Composite Materials*, Vol. 40, No. 9, 2006, pp. 759-778.
 - 24) Zhou, K., Keer, L.M., and Wang, Q.J., “Semi-Analytic Solution for Multiple Interacting Three-Dimensional Inhomogeneous Inclusions of Arbitrary Shape in an Infinite Space,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 87, 2011, pp. 617-638.
 - 25) Lee, J.K., and Mal, A.K., “A Volume Integral Equation Technique for Multiple Scattering Problems in Elastodynamics,” *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 67, 1995, pp. 135-159.
 - 26) Lee, J.K., and Mal, A.K., “A boundary element method for plane anisotropic elastic media,” *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, 1990, pp. 600-606.
 - 27) Buryachenko, V.A., *Micromechanics of heterogeneous materials*, Springer, New York, 2007.
 - 28) Banerjee, P.K., *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw-Hill, England, 1993.
 - 29) PATRAN User’s Manual, Version 7.0, MSC/PATRAN, 1998.
 - 30) Hardiman, N.J., “Elliptic Elastic Inclusion in an Infinite Elastic Plate,” *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 7, No. 2, 1954, pp. 226-230.
 - 31) Sendekyj, G.P., “Elastic Inclusion Problems in Plane Elastostatics,” *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 6, 1970, pp. 1535-1543.
 - 32) Mal, A.K., and Singh, S.J., *Deformation of Elastic Solids*, Prentice Hall, New Jersey, 1991.
 - 33) Hwu, C., and Yen, W.J., “On the Anisotropic Elastic Inclusions in Plane Elastostatics,” *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, 1993(Sep.), pp. 626-632.
 - 34) Lee, J.K., Choi, S.J., and Mal, A., “Stress Analysis of an Unbounded Elastic Solid with Orthotropic Inclusions and Voids Using a New Integral Equation Technique,” *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 16, 2001, pp. 2789-2802.
 - 35) Wang, X., Pan, E., and Sudak, L.J., “Uniform Stresses inside an Elliptical Inhomogeneity with an Imperfect Interface in Plane Elasticity,” *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 75, 2008, pp. 054501-1-054501-5.
 - 36) ADINA User’s Manual, Version 8.5, ADINA R & D, Inc., 2008.
 - 37) Lee, J.K., “Volume Integral Equation Method for Multiple Anisotropic Inclusion Problems in an Infinite Solid under Uniaxial Tension,” *Journal of the Korean Society for Composite Materials*, Vol. 23, No. 4, 2010, pp. 7-13.