

論文

면내하중을 받는 보강된 복합적층판의 진동해석

박경하* · 이 인** · 전의진***

**Vibration Analysis of Stiffened Composite Laminates
Subjected to In-plane Forces**

Kyeong-Ha Park*, In Lee** and Eui-Jin Jun***

ABSTRACT

The vibration analysis of stiffened composite laminates subjected to inplane forces has been performed by the finite element method based on the 1st order shear deformable plate theory. The applied compressive in-plane forces decrease the natural frequencies of the composite laminates because the laminates under compressive loads become flexible in the transverse direction. When the in-plane load increases up to the critical buckling value, the frequency of any one mode becomes zero, and its mode shape becomes the buckling one. It is found that the moment of inertia of a stiffener, and the fiber orientation affect significantly the natural frequencies of stiffened composite laminates subjected to in-plane loading.

초 록

1차 전단변형 판이론에 근거한 유한요소법을 사용하여, 면내하중을 받고 있는 보강된 복합적층판의 진동특성을 해석하였다. 적층판에 면내 압축하중이 작용하면 횡방향으로 보다 더 유연하게 되어 고유진동수는 감소하게 된다. 면내하중을 좌굴하중까지 하중을 증가시키면, 한 진동모드의 진동수가 영이 되며, 이때 진동모드 형태는 좌굴모드 형태와 같게 된다. 압축하중을 받는 보강 복합적층판에서, 보강재의 관성모멘트 그리고 복합재료의 섬유방향 등이 적층판의 고유진동수에 중요한 영향을 미침을 알 수 있었다.

* 정희원, 한국항공우주연구소 구조역학연구실

** 정희원, 한국과학기술원 항공우주공학과

*** 정희원, 한국기계연구소

기 호 설 명

A_S	: area of cross section of stiffener	ρ_p	: mass density of plate
A_{ij}	: thickness shear stiffness($i, j=4, 5$)	ω	: natural frequency
D_{ij}	: bending stiffness($i, j=1, 2, 6$)	σ^o	: membrane stresses in plate or stiffener
h	: thickness of plate	ϵ^{NL}	: nonlinear part of Green strain tensor
[K]	: stiffness matrix of plate or stiffener		
[K _g]	: geometric stiffness matrix of plate or stiffener	첨 자	
[M]	: mass matrix of plate or stiffener	p	: plate
θ	: fiber angle	s	: stiffener
ϕ_x, ϕ_y	: rotations of xz- and yz-plane	x	: x-directional stiffener
ψ_i	: shape function	y	: y-directional stiffener

1. 서 론

항공기의 날개나 동체의 외피는 보통 보강재가 부착되어 있는 평판 혹은 곡판의 형태를 이루고 있기 때문에, 보강재가 있는 판넬 형태의 구조물에 대한 진동 및 좌굴특성에 대한 연구는 오래전부터 행해져 왔다. 고속으로 비행하고 있는 항공기의 동체나 날개의 외피, 로케트의 판넬 또는 가스터어빈 엔진의 로터 블레이드 등은 공력가열로 인한 열응력, 판넬 경계에서 직접 가해지는 면내하중 또는 면내에 작용하는 관성력 등을 받고 있기 때문에, 면내하중을 받고 있는 구조물에 대한 진동 및 좌굴연구는 항공기 설계시 중요한 문제이다. 최근 항공기의 고성능화 및 경량화에 따른 복합재료의 사용은 점점 증가하고 있으며, 이에 따른 복합재료 구조물에 대한 연구 또한 빠른 속도로 증가하고 있는 추세이다.

면내하중의 영향을 고려한 등방성 재료의 평판에 대한 자유진동 해석은 오래전부터 행해져 왔다. Leissa[1]은 고전평판이론을 사용하여 사각평판의 고유진동수와 모드형태를 해석적으로 구하였으며, Roufaeil과 Dawe [2]는 Mindlin 평판이론과 Rayleigh-Ritz 방법을 사용하여 면내하중을 받고 있는

등방성 평판의 자유진동을 해석하였다. 이들은 평판의 두께가 두꺼운 경우, 고전평판이론으로 해석한 결과가 부정확함을 수치적으로 보여주었다. Ilanko와 Tillman[3]은 면내하중을 받고 있는 등방성 평판의 고유진동수를 실험적으로 구하였다. 직교이방성 재료에 대한 연구도 활발히 진행되었으며, Soni와 Rao[4]는 여러가지 경계조건을 갖는 직교이방성 사각평판의 진동특성을 해석하였다. 그리고 Laura와 Luisoni[5]는 면내하중이 작용할 때 경계에서 회전 유연성(rotational flexibility)을 갖는 얇은 직교이방성 사각평판을 고전평판이론과 Galerkin방법을 사용하여 근사적으로 해석하였다. 그리고 Dawe와 Craig[6]는 대칭 복합적층판의 좌굴문제와 면내하중이 있는 경우의 진동문제를 전단변형 판이론과 Rayleigh-Ritz와 Finite strip 방법 등을 사용하여 해석하였다. 그러나 보강재(stiffener)가 부착된 복합적층판의 경우, 면내하중의 영향을 고려한 진동해석은 거의 이루어져 있지 않다.

본 연구에서는 보강재가 부착된 대칭 복합적층판에 대하여, 면내하중이 작용할 때의 판의 고유진동수와 모드형태를 전단변형이론에 근거한 유효요소법을 사용하여 해석하였다. 적층판의 중립면에 대해, 등

방성재료의 보강재가 대칭으로 부착된 경우만을 다루었으며, 횡전단변형과 회전 관성의 영향 등이 고려되었다. 보강재에 사용된 유한요소는 Mukhopadhyay와 Mukherjee[7]가 사용한 방법과 마찬가지로 평판의 형상함수를 1차원화하여 사용하였다.

2. 보강 복합적층판의 유한요소 수식화

보강재가 부착된 복합적층판의 좌표계와 기하학적 형상은 그림 1에 나타내었으며 보강 적층판의 진동 해석을 하기 위해서 다음과 같은 가정을 하였다.

- (1) 복합적층판은 대칭으로 적층되었으며 보강재는 등방성 재료로 이루어졌다.
- (2) 적층판의 중립면에 대하여 보강재가 대칭으로 부착되었다.
- (3) xy-평면(그림 1참조) 내에서 일어날 수 있는 보강재의 굽힘을 무시하였다.
- (4) 보강재가 x축 또는 y축에 평행하게 부착되었다고 가정하였다.
- (5) 보강재가 나타날 수 있는 warping효과를 무시하였다.

2-1. 보강 적층판의 변형에너지

길이대 두께비가 큰 경우나 복합재료와 같이 재료의 이방성이 심한 경우에 고전평판이론을 사용하면

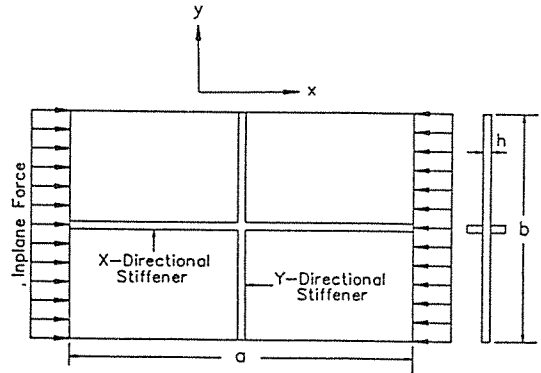


Fig. 1. Geometry of Stiffened Rectangular Plate Subjected to Inplane Force.

해석결과에 큰 오차가 있으므로 전단변형을 고려한 판이론을 사용하는 것이 바람직하다. 두께방향으로 횡전단 변형률이 일정하다고 가정하여 횡전단변형을 1차로 근사화한 Mindlin 평판이론을 사용하였다. 이 이론에 따라 평판의 변위성분은 다음과 같이 가정할 수 있다[8].

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

여기서 w는 횡방향의 변위(deflection)이며, ϕ_x 와 ϕ_y 는 각각 xz, yz평면의 회전(rotation)을 나타낸다. 대칭으로 적층된 복합적층판에서 굽힘과 횡전단 변형에 의한 변형에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{1}{2} \int_A \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} dA \dots\dots\dots (2) \\ &+ \frac{1}{2} \int_A \begin{Bmatrix} \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} dA \end{aligned}$$

여기서 D_{ij} 와 A_{ij} 는 각각 bending stiffness, thickness-shear stiffness이며 다음과 같이 정의된다.

$$D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 (\bar{Q}_{ij})_k dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3),$$

$$i, j = 1, 2, 6$$

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k_i k_j (\bar{Q}_{ij})_k dz = k_i k_j \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}),$$

$$i, j = 4, 5 \dots \dots \dots (3)$$

여기서 k_i 는 전단보정계수(shear correction factor)이며 Whitney[9]의 해석방법으로 구하였으며 \bar{Q}_{ij} 는 transformed reduced stiffness[10]이다.

x방향의 보강재와 y방향의 보강재에서의 굽힘에너지와 횡전단과 비틀림 변형으로 인한 변형에너지의 합은 다음과 같다.

$$U_s = U_s^x + U_s^y$$

$$= \frac{1}{2} \int E_s^x I_s^x \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int G_s^x A_s^x k_s^x \left(\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int G_s^x J_s^x \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int E_s^y I_s^y \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 dy$$

$$+ \frac{1}{2} \int G_s^y A_s^y k_s^y \left(\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy$$

$$+ \frac{1}{2} \int G_s^y J_s^y \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right)^2 dy \dots \dots \dots (4)$$

여기서 k_s^x 와 k_s^y 는 각각 x축과 y축에 평행한 보강재의 전단보정계수이며, E_s 는 Young's modulus, G_s 는 shear modulus, I_s 는 단면의 관성모멘트 그리고 J_s 는 polar moment of inertia이다.

2-2. 보강 적층판의 포텐셜에너지

면내하중이 작용하여 내부에 membrane stress가 존재하게 되고 membrane stress는 구조물의 횡방향 거동에 대한 강성에 영향을 미치게 된다. 따라서 Green변형률의 비선형 부분에 membrane stress가

작용하여 생겨나는 포텐셜에너지를 해석에 포함시킴으로써 membrane stress가 진동에 미치는 영향을 고려할 수 있다[2]. Green 변형률의 비선형 항들은 다음과 같다.

$$\epsilon_x^{NL} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$\epsilon_y^{NL} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \dots \dots \dots (4)$$

$$\epsilon_{xy}^{NL} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

적층판에서 membrane stress로 인한 포텐셜 에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$V_p = - \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x^o \epsilon_x^{NL} + \sigma_y^o \epsilon_y^{NL} + 2\tau_{xy}^o \epsilon_{xy}^{NL}) dz dA \dots \dots \dots (6)$$

여기서 $\sigma_x^o, \sigma_y^o, \tau_{xy}^o$ 는 각각 x축, y축 방향의 면내 응력과 면내 전단응력을 나타낸다. 위식에 (1)과 (5)식을 대입하여 전개한후 정리하면

$$V_p = - \frac{1}{2} \int_A \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x^o dz \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y^o dz \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right.$$

$$+ 2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}^o dz \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left. \right\} dA$$

$$- \frac{1}{2} \int_A \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x^o z^2 dz \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 \right] \right.$$

$$+ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y^o z^2 dz \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$+ 2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}^o z^2 dz \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right] \left. \right\} dA \dots \dots \dots (7)$$

x축과 y축에 평행한 보강재에서 발생하는 포텐셜에너지의 합은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 V_s &= V_s^x + V_s^y \\
 &= -\frac{1}{2} \int \sigma_{xs}^o \left\{ A_s^x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + I_s^x \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + J_s^x \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \\
 &\quad -\frac{1}{2} \int \sigma_{ys}^o \left\{ A_s^y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + J_s^y \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right)^2 + I_s^y \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 \right\} dy \\
 &\quad \dots\dots\dots (8)
 \end{aligned}$$

여기서 σ_{xs}^o , σ_{ys}^o 는 보강재에 작용하는 면내응력을 나타낸다.

2-3. 보강 적층판의 운동에너지

대칭 적층판의 운동에너지는 다음과 같이 구해진다.

$$T_p = -\frac{1}{2} \int_A \left\{ p \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I \left[\left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} dA \dots\dots\dots (9)$$

여기서 $(p, I) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_p (1, z^2) dz$, ρ_p 는 판의 한층의 밀도이다. 그리고 x축과 y축에 평행한 보강재의 운동에너지의 합은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 T_s &= \frac{1}{2} \int \rho_s^x \left\{ A_s^x \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_s^x \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right)^2 + J_s^x \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int \rho_s^y \left\{ A_s^y \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_s^y \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)^2 + J_s^y \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right)^2 \right\} dy \\
 &\quad \dots\dots\dots (10)
 \end{aligned}$$

2-4. 유한요소 지배방정식

보강 적층판에 대한 전체 변형에너지, 포텐셜에너지와 운동에너지는 다음과 같이 보강재와 복합적층판의 에너지의 합으로서 이루어진다.

$$\begin{aligned}
 U &= U_p + U_s \\
 V &= V_p + V_s \dots\dots\dots (11) \\
 T &= T_p + T_s
 \end{aligned}$$

임의 시각에 e번째 평판요소내의 변위 w^e, ϕ_x^e, ϕ_y^e 는

다음과 같이 보간된다.

$$\begin{aligned}
 w^e(x, y, t) &= \sum_{i=1}^N w_i^e(t) \psi_i^e(x, y) \\
 \phi_x^e(x, y, t) &= \sum_{i=1}^N \phi_{xi}^e(t) \psi_i^e(x, y) \dots\dots\dots (12) \\
 \phi_y^e(x, y, t) &= \sum_{i=1}^N \phi_{yi}^e(t) \psi_i^e(x, y)
 \end{aligned}$$

여기서 ψ_i 는 형상함수를 나타낸다. 보강재로 보강된 복합적층판이 단순 조화운동(simple harmonic motion)을 한다고 가정하면,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = i\omega w, \quad \frac{\partial \phi_x}{\partial t} = i\omega \phi_x, \quad \frac{\partial \phi_y}{\partial t} = i\omega \phi_y \dots (13)$$

(12)과 (13)식을 사용하여, Hamilton원리를 적용하면,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U - V) dt = 0 \dots\dots\dots (14)$$

다음과 같은 유한요소 운동방정식이 얻어진다.

$$\left(([K^e] + [K_g^e]) - \omega^2 [M^e] \right) \begin{Bmatrix} \{w^e\} \\ \{\phi_x^e\} \\ \{\phi_y^e\} \end{Bmatrix} = \{0\} \dots\dots\dots (15)$$

$$\begin{aligned}
 \text{여기서} \quad [K^e] &= [K_p^e] + [K_s^e] \\
 [K_g^e] &= [K_{gp}^e] + [K_{gs}^e] \\
 [M^e] &= [M_p^e] + [M_s^e]
 \end{aligned}$$

$[K^e]$, $[M^e]$ 는 각각 적층판의 강성행렬과 질량행렬을 나타낸다. 그리고 $[K_g^e]$ 는 면내하중으로 인한 강성의 변화를 나타낸다.

위와 같은 요소행렬들을 결합하여 다음과 같은 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left(([K] + [K_g]) - \omega^2 [M] \right) \{\Delta\} = \{0\} \dots\dots\dots (16)$$

윗식에 주어진 경계조건을 대입한 후 고유치 문제를 풀면, 보강재로 보강된 복합적층판의 고유진동수와 모드 형태를 구할 수 있다. 보강재에 대한 형상함수는

판의 형상함수를 일차원화하여 사용한 Mukhopadhyay와 Mukherjee[7]의 방법을 사용하였다. 일반적으로 사용되고 있는 방법 즉 보강재 요소의 절점을 평판 요소의 절점과 일치시키는 방법에 비하여, 유한요소 행렬의 조립(assembly)이 간단하고 해석 결과가 더 정확하다고 알려져 있다. 특히 평판 요소의 임의의 위치에 보강재를 위치시킬 수 있다는 것이 이 방법의 큰 장점이다. 본 연구에서 사용된 적층판의 유한요소는 9절점 등계수(isoparametric) 사각형요소이며 그림 2에서 보강된 유한요소를 보여주고 있다. 수치적분에서 shear locking을 피하기 위해 reduced integration method를 사용하였다. 복합적층판의 굽힘에너지와 운동에너지, 포텐셜에너지 항들은 3×3점 Gauss 적분을 하였고 횡전단 변형에너지 항들은 2×2점 Gauss 적분을 하였다. 그리고 보강재의 굽힘에너지, 비틀림에너지, 포텐셜에너지, 운동에너지 항들은 3점 Gauss 적분을 하였고 횡전단 에너지 항들은 2점 Gauss 적분을 하였다.

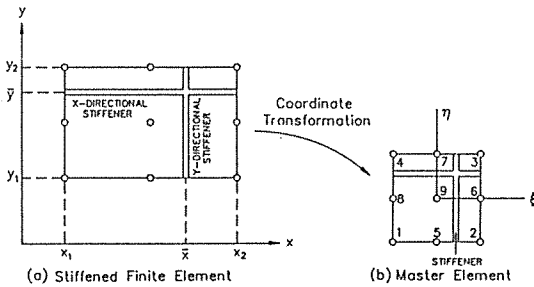


Fig. 2. Geometry of a Stiffened Finite Element.

3. 계산결과 및 검토

면내하중을 받는 보강 복합적층판의 진동해석에 대한 자료를 얻지 못하여 직접적인 보강적층판에 대한 검증은 할 수 없었다. 따라서 본 연구에서 개발된 프로그램의 검증은 등방성 재료의 평판에 대하여 면내하중이 작용할 때의 진동문제와 보강재가 있는 경우의 좌굴문제에 대하여 수행하였다. 그림 3에서는 단순지지된 등방성 사각평판(Aspect ratio =3:1, $\nu=0.3$)에 면내하중이 작용할 때 하중의 크기에 따른 진동수의 변화를 Yang[11]의 결과와 비교하였다. Yang은 FEM을 사용하여 좌굴 후의 진

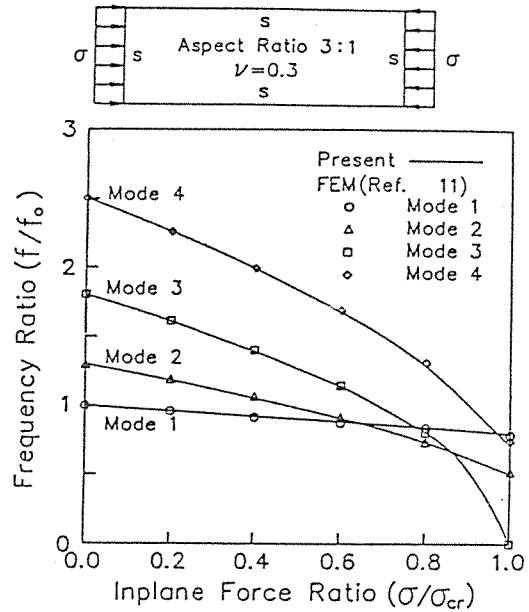
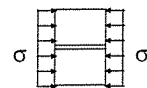


Fig. 3. Comparison of Natural Frequencies for Simply Supported Isotropic Plate Subjected to Inplane Force.

동해석도 가능하도록 비선형해석을 하였다. 그림 3에서 비교한 바와 같이 좌굴하중까지 본 연구의 결과와 Yang의 해석결과가 잘 일치함을 알 수 있다. 표 1은 aspect ratio=1, $\nu=0.3$ 이고 면적비 $A_s/bh=0.05$ 인 보강재로 보강된 등방성평판의 좌굴인자(buckling parameter; $\sigma_{cr}b^2h/\pi^2D$)를 여러 EI_s/Db 에 대해 보강재의 비틀림을 무시하여 해석한 좌굴해석 결과이다. 본 연구의 결과가 Timoshenko[12]의 결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 보강재의 굽힘강성이 증가함에 따라 좌굴하중이 증가하다가 더 이상 증가하지 않고 일정하게 유지된다. 즉 보강재의

Table 1. Comparison of Buckling Parameter ($\sigma_{cr}b^2h/\pi^2D$) for Simply Supported Isotropic Plate with a Central Stiffener.

$E I_s/Db$	5	10	15
Timoshenko (Ref. 12)	12.0	16.0	16.0
Present	12.1	16.0	16.0



* Aspect Ratio=1, $\nu=0.3$, $A_s/bh=0.05$

굽힘강성이 큰 경우에는 보강재의 굽힘은 발생하지 않고 평판에서만 좌굴이 일어남을 확인할 수 있다.

본 연구에 사용된 보강재 Aluminium alloy의 물성치와 복합재료 AS1/3501-6 graphite/epoxy의 물성치는 표 2에 나타냈다. 보강재의 단면은 사각형이며 보강재의 관성 모멘트(moment of inertia)나 면적의 기준값은 각각 $I_0=5.85208 \times 10^{-11} m^4$, $A_0=5 \times 10^{-6} m^2$ 을 택하여 계산하였다. 앞의 I_0, A_0 값들은 보강재로 보강된 등방성평판의 좌굴해석을 다른 참고문헌[12]을 참고하여 정하였다. 그림 4~8에서의 결과는 단순지지되고 종횡비가 1:1($a=b=10cm$)인 적층판에 대한 결과이다.

Table 2. Material Properties.

Property	Alumimum Alloy (2024-T4)	Graphite/Epoxy (AS1/3501-6)
E_{11} (GPa)	73	128
E_{22} (GPa)	73	11
G_{12} (GPa)	27.6	4.48
E_{23} (GPa)	27.6	1.53
ν_{12}	0.32246	0.25
density(Kg/m ³)	2775.51	1500
ply thickness(mm)		0.13

그림 4와 5에서는 각각 $[0/\pm 45/90]_s$ 적층판에 보강재가 없을 때와 있을 때의 고유진동수와 면내하중의 관계를 나타내고 있다. 면내하중이 증가함에 따라서 고유진동수는 감소하며, 좌굴하중에 도달할 때 첫번째 모드의 진동수가 0이 됨을 알 수 있다. 보강재가 없는 적층판보다 보강된 적층판의 고유진동수와 좌굴하중이 더 큼을 확인할 수 있으며, 두번째 모드와 세번째 모드에서 면내하중의 변화에 따른 고유진동수의 변화 양상이 보강재의 부착으로 인해 다르게 나타남을 알 수 있다.

그림 6에서는 면내하중이 가해질 때 보강재가 없는 $[0/\pm \theta/90]_s$ 적층판의 고유진동수와 섬유방향 θ 와의 관계를 나타낸다. 첫번째 모드의 고유진동수는 $\theta=45^\circ$ 에 대해 대칭이며 임의의 면내하중에 대해 $\theta=45^\circ$ 에서 최대값을 나타낸다. 그리고 두번째 모드의 고유진동수는 θ 의 증가에 따라서 증가하며 $\theta=90^\circ$

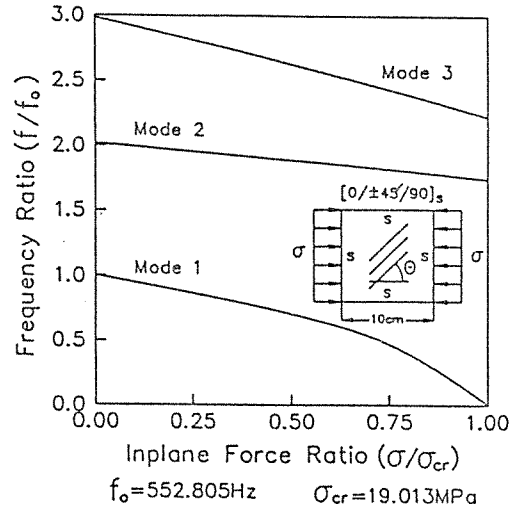


Fig. 4. Effect of Inplane Force on Natural Frequencies for $[0/\pm 45/90]_s$ Laminate.

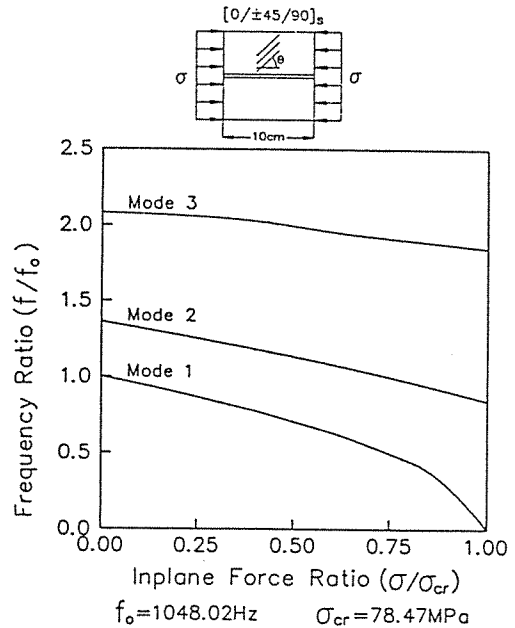


Fig. 5. Effect of Inplane Force on Natural Frequencies for $[0/\pm 45/90]_s$ Laminate with a Central Stiffener.

근처에서 최대값을 나타내고 있다.

그림 7에서는 $[0/\pm \theta/90]_s$ 적층판에 부착된 보강재의 관성모멘트가 고유진동수에 미치는 영향을 살

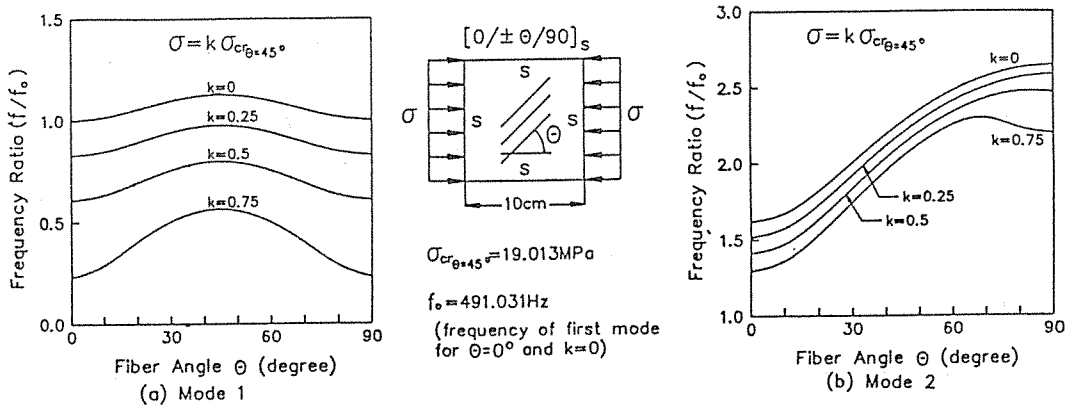


Fig. 6. Effect Fiber Angle on Natural Frequencies for $[0/\pm\theta/90]_s$ Laminate with Various σ (Inplane Force).

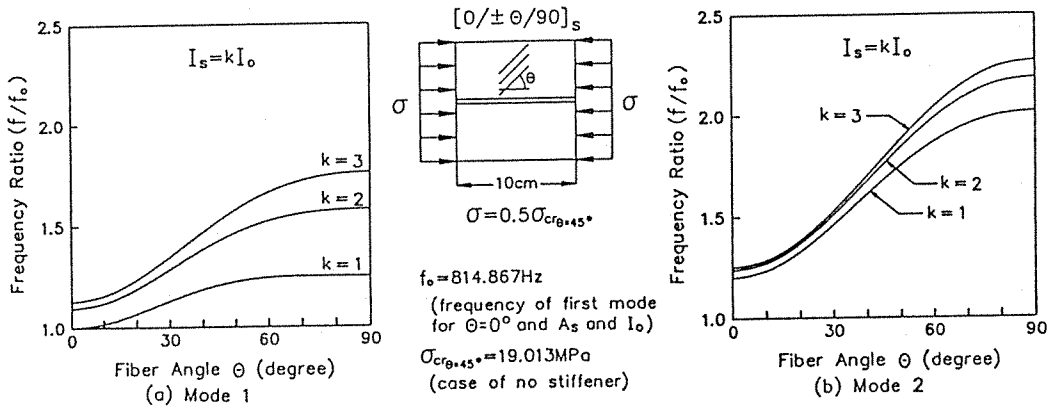


Fig. 7. Effect Fiber Angle on Natural Frequencies for $[0/\pm\theta/90]_s$ Laminate with Various I_s (Moment of Inertia).

펴보았다. 관성모멘트 값이 크면 고유진동수도 큰 값을 가짐을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 면내하중을 받는 보강된 복합적층판의 진동특성을 전단변형이론에 근거한 유한요소법을 사용하여 해석하였다. 본 연구에서의 유한요소법은 임의의 형상을 갖는 보강 적층판의 진동문제에 쉽게 적용할 수 있고 비교자료와도 잘 일치함을 알 수 있었으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 적층판에 면내 압축하중이 작용하면 횡방향으로

연화(flexible)되어 고유진동수가 감소하며, 보강재가 있는 경우 적층판의 고유진동수가 증가한다.

- (2) 좌굴하중 부근에서는 한 진동모드의 고유진동수가 영이 되며 이때 모드형태는 좌굴모드형태와 일치하게 된다.
- (3) $[0/\pm\theta/90]_s$ 적층판에 균일하게 압축하중이 작용할 때 첫번째 모드의 고유진동수는 $\theta=45^\circ$ 에서 최대값을 가진다.
- (4) 압축하중을 받고 있는 $[0/\pm\theta/90]_s$ 적층판에서 보강재의 관성모멘트를 증가시키면 고유진동수가 증가한다.

참 고 문 헌

1. A.W. Leissa, *Vibration of Plates*, NASA SP-160(1969).
2. O.L. Roufaeil & D.J. Dawe, "Rayleigh-Ritz Vibration Analysis of Rectangular Mindlin Plates Subjected to Membrane Stresses," *J. Sound & Vib.*, Vol.85, 263-175 (1982).
3. S. Ilanko & S.C. Tillman, "The Natural Frequencies of In-plane Stressed Rectangular Plates," *J. Sound & Vib.*, Vol.98, 25-34 (1982).
4. S.R. Soni and C.L. Amba Rao, "Vibrations of Thin, Orthotropic Rectangular Plates Under In-plane Forces," *Computers & Structures*, Vol.4, 1105-1115 (1974).
5. P.A.A. Laura & L.E. Luison, "Vibrations of Orthotropic Rectangular Plates with Edges Possessing Different Rotational Flexibility & Subjected to In-plane Forces," *Computers & Structures*, Vol.9, 527-532 (1978).
6. D.J. Dawe & T.J. Craig, "The Vibration and Stability of Symmetrically - laminated Composite Rectangular Subjected to In-plane Stresses," *Computers & Structures*, Vol.5, 281-307 (1986).
7. M. Mukhopadhyay & A. Mukherjee, "Finite Element Buckling Analysis of Stiffened Plates," *Computers & Structures*, Vol.34, 795-803 (1990).
8. J.N. Reddy, *Energy & Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley & Sons (1984).
9. J.H. Whitney, "Shear Correction Factors for Orthotropic Laminates Under Static Load," *J. Appl. Mech.*, Vol.40, 302-304 (1973).
10. R.M. Jones, *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill (1975).
11. T.Y. Yang and A.D. Han, "Buckled Plate Vibrations and Large Amplitude Vibrations using Higher-Order Triangular Elements," *AIAA J.*, Vol.21, 758-766 (1982).
12. S.P. Timoshenko and J.H. Gear, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill (1961).