論文

섬유보강재에서 계면균열로 인한 탄성계수 변화에 관한 연구

문호정* · 최낙윤* · 엄윤용*

Investigation of Elastic Moduli Change due to Interfacial Cracks in Fiber-Reinforced Materials

Ho-Jeong Moon*, Narg-Yoon Choi*and Youn-Young Earmme*

ABSTRACT

A method to compute effective elastic moduli in fiber-reinforced composite having circular-arc shaped interfacial cracks is proposed and the effective elastic moduli are computed. The potential energy change due to the circular-arc shaped cracks in unidirectionally fiber-reinforced composites is first expressed in terms of the effective elastic moduli in the composite material having cracks and the effective elastic moduli in the same composite material without cracks. The potential energy change is computed by using L integral, which can be obtained easily from well-known solutions.

For the particular case of the circular-arc shaped cracks in homogeneous medium, it is shown that the result in this study is identical to the result of Laws and Brockenbrough, when the latter result is properly interpreted. The validity of this method is also discussed.

초 록

원호계면균열을 갖는 섬유보강재의 유효탄성계수를 구하는 방법이 제안되었으며, 이러한 방법에 의해 유효탄성계수를 계산하였다. 우선, 보강섬유가 일방향으로 배열된 섬유보강재에서 원호균열로 인한 포텐셜에너지의 변화를 균열을 가진 섬유보강재와 균열이 없는 섬유보강재의 유효탄성계수들의 항으로 나타내었다. 이러한 포텐셜에너지는 잘 알려진 해로부터 쉽게 구해질 수 있는 L적분을 이용하여 얻어졌다. L적분을 이용하는데 있어서, 구하고자 하는 유효탄성계수를 갖는 기지안에 원호계면균열을 갖는 하나의 섬유가 개재되어 있다고 가정하는데, 이는 자기일치성 방법에 의거한 것이다.

* 한국과학기술원 기계공학과

Laws와 Brockenbrough는 직선균열을 포함하는 균질재료의 유효탄성계수를 계산한 바 있는데, 이 결과가 원호균열을 갖는 균질재료의 특별한 경우에 대해서 얻어지는 값과 일치함을 보였다. 또한, 이러한 방법에 의거해 얻어진 결과의 유효성에 대해서도 언급되어졌다.

1. 서 론

항공기, 로보트, 각종 첨단기기 등에서 복합재료의 활용은 이미 세계적인 흐름이 되어가고 있다. 그것은 복합재료가 강도, 강성, 부식저항, 마모저항, 온도에 따른 거동, 단열, 방음, 경량화 등등에 있어서 기존의 금속재료보다 우수한 기계적 성질을 갖고 있기 때문이다. 이러한 복합재료의 성질은 기지(matrix)안에 들어가는 개재물(inclusion)의 기하학적 성질과 재료특성 그리고 구성원소들간의 계면특성에 따라 무척 다양하게 변화하는데, 이때마다 실험에 의존하여 복합재료의 특성을 알아낸다는 것은 확실한 방법이긴 하나 많은 시간적, 경제적 댓가를 치루어야 한다. 그래서, 복합재료의 구성원소들의 재료특성만으로 전체 복합재료의 특성, 특히 탄성계수들을 예측하는 문제에 대해 미시역학(micromechanics)을 이용한 많은 연구가 진행되어왔다. 이들 연구들은 주로 계면특성을 고려하지 않고, 섬유/기지재료 사이가 완전한 결합(perfect bonding)이라는 가정하에 이루어졌는데, 최소 포텐셜에너지와 최소 공액에너지의 원리로부터 탄성계수에 관한 유계해(bound solution)를 얻어내는 방법[1~3]과 근사적인 방법으로서 널리 알려진 자기일치성(self-consistent)방법[4~7]에 의하여 복합재료의 전체적인 탄성계수, 즉 유효탄성계수들을 예측하는 것이었다. 폴리에스터 기지(polyester matrix)안에 구형의 유리 알갱이들이 산재하고 있는 복합재료에 대해서, Laws[8]는 Richard[9]의 실험자료와 이론치와의 비교를 통하여 개재물의 부피비가 비교적 작은 영역에서 자기일치성(self-consistent)방법과 Christensen[10]의 결과가 실험치와 잘 맞는다고 보고하고 있다. 한편, 복합재료가 아닌 균질재료에서 균열로 인한 유효탄성계수의 변화를 예측하는 연구도 많이 진행되어 왔는데, 그중에서도 자기일치성(self-consistent)방법을 이용한 대표적인 연구들은 다음과 같다. Budiansky와 O'Connell[11]은 평면균열이 무작위 분포(randomly distribution)되어 있는 물체의 유효탄성계수를 자기일치성(self-consistent) 방법으로 구하였는데, 이 과정에서 균열밀도(crack density)라고 하는 기하학적 매개변수를 제안하였다. Horri와 Nemat-Nasser[12]는 임의로 분포하는 균열의 경우 응력장에 의한 균열 닫힘과 균열면 사이의 마찰로 인한 비등방성 효과를 고려하여 비등방성 탄성계수를 계산한 바 있고, Laws와 Brockenbrough[13]는 임의의 위치에 방향만 정해진 미소균열을 가진 재료의 탄성계수 변화를 자기일치성(self-consistent) 방법으로 구하였다.

복합재료는 일반적으로 고온에서 성형되어 계면 근처에 높은 잔류응력이 생기는데, 섬유/기지간의 접합이 불충분하면 계면의 분리(debonding)가 일어나 계면균열을 형성하게 된다. 본 연구에서는 이러한 계면균열들이 재료의 기계적 성질에 미치는 영향을 유효탄성계수의 변화로써 나타내었다. 논문의 구성은 2장에서 문제의 정의 및 가정에 대하여 설명하였고, 3장에서는 유효탄성계수의 정의 및 자기일치성 방법에 의한 수식화 과정을 나타내었으며, 4장에서는 수치계산의 결과 및 토의, 5장에서는 연구결과를 요약하였다.

2. 문제의 정의 및 가정

보강섬유와 기지는 등방성 재료이며, 동일한 모양과 크기의 원통형 보강섬유가 모두 일정한 방향(여기서는 3-축 방향으로 가정하였음)으로 배열되어 있는 섬유보강재라고 가정한다. 이와 같은 구조의 섬유보강재는 거시적으로 5개의 독립된 유효탄성계수가 존재하는 횡등방성재료(transversely isotropic material)로 생각할 수 있다[10]. 이러한 재료내부에서 기지와 보강섬유 사이에 원호계면균열이 동일한 크기로 무작위 분포하는 경우를 생각해 보자[Fig. 1

참조]. 여기서, 원호계면균열은 접촉이 없는 열린 균열(open crack)이라고 가정한다. 균열이 무작위 분포하기 때문에 섬유보강재가 횡등방성 재료라는 가정은 유효하며, 5개의 독립된 유효탄성계수(즉, $\bar{E}^*=\bar{E}_1^*=\bar{E}_2^*$, $\bar{\nu}^*=\bar{\nu}_{12}^*=\bar{\nu}_{21}^*$, $\bar{E}_3^*$, $\bar{\nu}_{31}^*$, $\bar{\mu}_{13}^*=\bar{\mu}_{23}^*$)중 3-축 방향의 영 계수(Young's modulus) $\bar{E}_3^*$와 포와송의 비(Poisson's ratio) $\bar{\nu}_{31}^*(=\bar{\nu}_{32}^*)$에서는 균열로 인한 영향이 무시될 만큼 작다고 생각한다. 즉, $\bar{E}_3^*=E_3^*$, $\bar{\nu}_{31}^*=\nu_{31}^*$라고 가정한다. 이러한 조건하에서 횡단면인 평면 1-2상의 2개의 독립된 유효탄성계수($\bar{E}^*$, $\bar{\nu}^*$ 또는 $\bar{\mu}^*$, $\bar{\kappa}^*$)를 구하는 것이 주된 관심사이다.

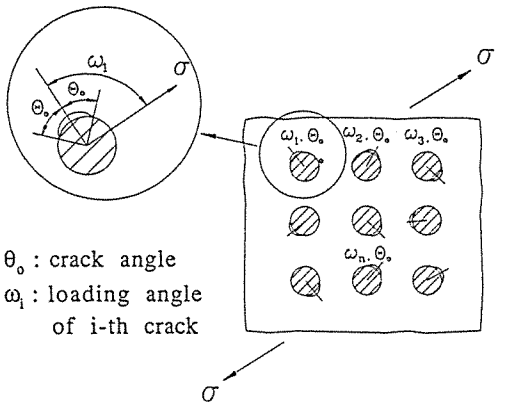

Fig. 1. Crack Model in Fiber-Reinforced Materials.

3. 유효탄성계수

전체 포텐셜에너지의 차이를 $\Delta\Phi$, i번째 균열로 인한 포텐셜에너지의 변화량을 $\Delta\xi_i$라 하면, 균열이 무작위 분포한다는 가정때문에 하중각 ω_1, ω_2, ……, ω_n은 전체 포텐셜에너지 변화량 $\Delta\Phi$의 독립변수가 되지 못하며, 또한 균열의 총수 n이 상당히 큰 수이고, 균열의 크기가 모두 동일하므로, $\Delta\Phi=\Delta\Phi(\theta_0)$, $\Delta\xi_i=\Delta\xi_i(\theta_0,\omega_i)$로 주어지며, 이때 θ_0는 균열각으로서 각 균열길이($=2R\theta_0$)를 대표하는 각이며, ω_i는 각 균열의 중심과 원형섬유중심을 잇는 직선과 하중축이 만나서 이루는 각으로서 균열의 위치를 나타내며 하중각이라고 부른다[Fig. 1참조]. 균열의 총수 n이 상당히 큰 수이기 때문에, 포텐셜에너지의 변화량 $\Delta\Phi$는 아래처럼 쓸 수 있다.

$$\Delta\Phi(\theta_0)=\sum_{i=1}^{n}\Delta\xi_i(\theta_0,\omega_i)\cong n\int_{-\pi}^{\pi}\Delta\xi(\theta_0,\omega)f(\omega)d\omega. \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

여기서, $f(\omega)$는 ω에 대한 확률밀도함수(probability density function)로서, 하중각 ω가 무작위 분포한다는 가정 때문에 $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}$이 되며, 식(1)은 다음과 같이 주어진다.

$$\Delta\Phi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta\xi(\theta_0,\omega)\ d\omega. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

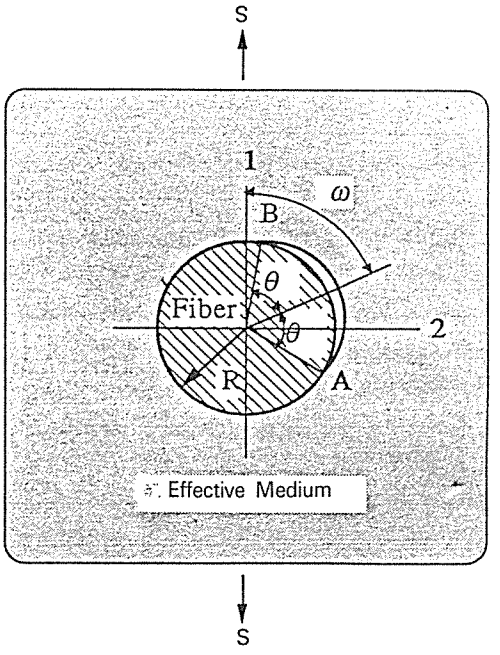

Fig. 2. Self-Consistent Scheme of Fibrous Composites with Circular-Arc Shaped Interfacial Cracks.

균열 하나로 인한 포텐셜에너지의 변화량 $\Delta\xi$를 구하기 위해서 Fig. 2에서 보인 바와 같이 한개의 섬유를 따라 계면균열이, 구하려는 유효탄성계수 $\bar{\mu}^*$, $\bar{\kappa}^*$를 가진 유효매체(effective medium) 안에

존재하고 있다고 생각하는 자기일치성(self-consistent) 방법을 이용한다. Budiansky와 Rice[14]는 원호균열로 인한 포텐셜에너지 변화량 $\Delta\xi$와 보존적분 L과의 관계가 $-\frac{\partial(\Delta\xi)}{\partial\theta} = L$ 임을 보인 바 있는데, 이를 이용하면 식(2)는 다음과 같이 주어진다.

$$\Delta\Phi = -\frac{n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\theta_o} L(\theta,\omega)\ d\theta\ d\omega$$

$$= -\frac{n}{2\pi}\int_{0}^{\theta_o}\int_{-\pi}^{\pi} L(\theta,\omega)\ d\omega\ d\theta\ . \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

여기서, L적분은 Knowles와 Sternberg[15]에 의해서 발표되었던 것으로 아래와 같이 정의되어지며, 원호균열에 대해서 그 적분값이 보존되어지는 성질이 있다[16].

$$L = \oint \in_{3ij}(wx_j n_i + T_i u_j - T_k u_{k,i} x_j)ds. \quad \cdots \quad (4)$$

여기서, $\in_{3ij}$는 순환기호(permutation symbol)를 나타내며, w는 변형률에너지밀도(strain energy density), T_i는 트랙션 벡터(traction vector), u_i는 변위(displacement), n_k는 바깥방향으로 수직한 단위벡터를 의미한다.

원호계면균열을 가진 섬유보강재의 유효탄성계수 $\bar{\mu}^*$, $\bar{\kappa}^*$를 구하기 위해서는 2개의 방정식이 필요한데, 이는 2개의 하중조건을 고려하므로써 얻을 수 있다. 본 절에서는 계산의 편의상 평면변형률상태에서 양축응력과 단축응력의 2가지 하중상태를 고려하기로 하자.

3-1. 양축응력상태인 경우

크기가 σ인 양축응력이 작용하는 섬유보강재에서 균열을 갖고 있을 때와 없을 때의 포텐셜에너지를 각각 고려해 보자. 균열이 없는 섬유보강재의 포텐셜에너지는 $-\frac{\sigma^2 A}{2K^*}$(본 논문에서 에너지는 단위길이당 에너지를 의미함)인데, 여기서, A는 횡단면적이고, K^*는 균열이 없는 섬유보강재의 평면변형률 체적강성계수(plane strain bulk modulus)라고 부르며, 아래 식(5)와 같은 관계가 있다[10]

$$K^* = \frac{E^*}{2(1-\nu^*-2\nu_{31}^{*2}\frac{E^*}{E_3^*})} = \frac{2\mu^*}{\kappa^*-1}\ . \quad \cdots\cdots \quad (5)$$

Muskhelishvili[17]는 등방성재료에 대해서 탄성계수 μ와 κ에 관한 관계식들을 유도한 바 있는데, 이 과정을 그대로 따라가면 횡등방성재료에 대해서도 그 관계를 얻을 수 있다. 따라서, 식(5)에서 μ^*와 κ^*는 횡등방성재료의 탄성계수들이므로, 평면 변형률 상태에서 κ^*의 값은 다음과 같이 얻어진다.

$$\kappa^* = \frac{3-\nu^*-4\nu_{31}^{*2}\frac{E^*}{E_3^*}}{1+\nu^*}\ . \quad \cdots\cdots \quad (6)$$

$E_1^* = E_2^* = E^*$: 1-축과 2-축 방향의 영계수,

E_3^* : 3-축방향의 영계수,

ν_{ij}^* : i방향의 응력이 가해졌을 때, j방향의 변형률에 대한 포와송의 비, 즉, $\nu_{ij}^* = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$,

$\mu_{23}^*, \mu_{31}^*, \mu_{12}^* = \mu^*$: 각각 평면 2-3, 평면 3-1 평면 1-2에서의 전단계수.

이때, 우측 상첨자 '*'는 섬유보강재임을 의미한다. 균열이 있는 섬유보강재의 포텐셜에너지는 $-\frac{\sigma^2 A}{2\bar{K}^*}$이 되고, 여기서 $\bar{K}^*$는 균열이 있는 섬유보강재의 평면변형률 체적강성계수(plane strain bulk modulus)라고 부르며, 다음과 같은 관계식을 만족한다[10].

$$\bar{K}^* = \frac{\bar{E}^*}{2(1-\bar{\nu}^*-2\nu_{31}^{*2}\frac{\bar{E}^*}{E_3^*})} = \frac{2\bar{\mu}^*}{\bar{\kappa}^*-1}\ . \quad \cdots\cdots \quad (7)$$

$$\bar{\kappa}^* = \frac{3-\bar{\nu}^*-4\nu_{31}^{*2}\frac{\bar{E}^*}{E_3^*}}{1+\bar{\nu}^*}\ . \quad \cdots\cdots \quad (8)$$

상단의 '-'표시는 균열이 있는 경우임을 나타내며, 유효탄성계수들의 관계는 앞서 설명한 균열이 없을 때와 동일하다. 따라서, 포텐셜에너지의 변화량 $\Delta\Phi$에 관한 관계식은 다음과 같다.

$$-\frac{\sigma^2 A}{2\bar{K}^*} = -\frac{\sigma^2 A}{2K^*} + \Delta\Phi. \quad \cdots\cdots (9)$$

여기서, $\Delta\Phi$는 식(3)에 의해서 얻어지며, 박재학과 엄윤용[16]의 표현을 인용하면 L적분은 다음과 같다.

$$L = -\frac{\pi R^2\sigma^2}{8}\left(\frac{1+\kappa_f}{\mu_f} + \frac{1+\bar{\kappa}^*}{\bar{\mu}^*}\right)(1+4\beta^2)F^2 . \quad \cdots\cdots (10)$$

여기서, $\beta = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\mu_f + \bar{\mu}^*\kappa_f}{\bar{\mu}^* + \mu_f\bar{\kappa}^*}\right)$,

$$F = \frac{2\sqrt{\sin\theta}}{1+e^{2\pi\beta}} \cdot \frac{\mu_f(1+\bar{\kappa}^*)\left\{\bar{\mu}^*(1+\kappa_f)+\mu_f(1+\bar{\kappa}^*)\right\}e^{\beta(\theta+\pi)}}{(\mu_f+\bar{\mu}^*\kappa_f)\left\{\bar{\mu}^*(1+\kappa_f)+2\mu_f(1+\bar{\kappa}^*)\right\} - \bar{\mu}^*(1+\kappa_f)(\bar{\mu}^*+\mu_f\bar{\kappa}^*)N_1 e^{-2\beta\theta}},$$

$$N_1 = \cos\theta - 2\beta\sin\theta$$

이며, R은 보강섬유의 반경이고, 우측 하첨자 f는 보강섬유의 재료상수임을 나타낸다. 윗 식(10)에서 보듯이 양축응력상태에서의 L은 하중각 ω에 무관하나 나중에 보일 단축응력의 경우, L은 하중각 ω의 함수이다. 식(10)을 식(3)에 대입하면,

$$\Delta\Phi = -\frac{n\pi R^2\sigma^2}{8}\left(\frac{1+\kappa_f}{\mu_f} + \frac{1+\bar{\kappa}^*}{\bar{\mu}^*}\right)(1+4\beta^2)\int_0^{\theta_o} F^2\, d\theta \quad \cdots\cdots (11)$$

을 얻는다. 따라서, 식(9)의 좌변에 식(7)을 대입하고, 우변에 식(5)와 식(11)을 대입하여 정리하면 식(12)와 같은 결과식이 주어진다.

$$(\kappa^*-1)\frac{\bar{\mu}^*}{\mu^*} - \bar{\kappa}^* + 1 + \frac{V_f}{2}\left(\frac{1+\kappa_f}{\mu_f}\bar{\mu}^* + \bar{\kappa}^* + 1\right)(1+4\beta^2)\int_0^{\theta_o} F^2\, d\theta = 0. \quad \cdots\cdots (12)$$

여기서, $V_f\left(=\frac{n\pi R^2}{A}\right)$는 보강섬유의 부피비이다.

3-2. 단축응력상태인 경우

단축응력 s가 작용하는 횡단면적 A인 섬유보강재에서 균열이 있는 경우와 없는 경우의 포텐셜에너지를 각각 고려해 보자. 균열이 없는 섬유보강재에서 포텐셜에너지는 $-\frac{s^2 A}{2E^*}$ 이며, 이때 E^*는 균열이 없는 섬유보강재의 유효 횡방향 영 계수(effective transverse Young's modulus)로서 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$E^* = 2(1+\nu^*)\mu^* = \frac{8\mu^*}{1+\kappa^*+8\mu^*\frac{\nu_{31}^{*2}}{E_3^*}} . \quad \cdots (13)$$

균열이 있는 섬유보강재에서 포텐셜에너지는 $-\frac{s^2 A}{2\bar{E}^*}$ 이고, 이때 $\bar{E}^*$는 균열이 있는 섬유보강재의 유효 횡방향 영 계수(effective transverse Young's modulus)이며, 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\bar{E}^* = 2(1+\bar{\nu}^*)\bar{\mu}^* = \frac{8\bar{\mu}^*}{1+\bar{\kappa}^*+8\bar{\mu}^*\frac{\nu_{31}^{*2}}{E_3^*}} . \quad \cdots (14)$$

따라서, 포텐셜에너지의 변화량 $\Delta\Phi$에 관한 관계식은 다음과 같다.

$$-\frac{s^2 A}{2\bar{E}^*} = -\frac{s^2 A}{2E^*} + \Delta\Phi. \quad \cdots\cdots (15)$$

양축응력상태인 경우와 마찬가지 방법으로 포텐셜에너지의 변화량 $\Delta\Phi$를 구할 수 있다. 이때 사용되는 L적분을 구하기 위해 Perlman과 Sih[18]가 구한 응력해석결과를 이용하는데, 그들 결과에 포함된 약간의 오류를 수정한 후 하중각 ω의 항으로 정리하면, 단축응력상태에서의 보존적분 L은 다음과 같다.

$$L = \frac{\pi R^2 s^2 \alpha}{32\bar{\mu}^*}\left\{a_1(a_1-2d_1\cos\theta e^{-2\beta\theta})\cos^2 2\omega + b_1^2\sin 2\omega + a_2^2 + d_1^2 e^{-4\beta\theta} + 2a_2(a_1-d_1\cos\theta e^{-2\beta\theta})\cos 2\omega + 2b_1 d_1 \sin\theta e^{-2\beta\theta}\sin 2\omega\cos 2\omega\right\}. \quad \cdots\cdots \quad (16)$$

여기서,

$$\alpha = \left\{(1+\kappa_f)\frac{\bar{\mu}^*}{\mu_f} + 1 + \bar{\kappa}^*\right\}\frac{\sin\theta}{\cosh^2\pi\beta}e^{2\beta\theta}(4\beta^2+1),$$

$$a_1 \equiv \frac{(1+\kappa_f)\mu_f(1+\bar{\kappa}^*)\bar{\mu}^*(M_2-M_1^2)}{\bar{\mu}^*(1+\kappa_f)(\bar{\mu}^*+\mu_f\bar{\kappa}^*)N_1 e^{2\beta\theta} - (\mu_f+\bar{\mu}^*\kappa_f)\left\{\bar{\mu}^*(1+\kappa_f)+2\mu_f(1+\bar{\kappa}^*)\right\}},$$

$$a_2 \equiv \frac{\mu_f(1+\bar{\kappa}^*)\left\{\bar{\mu}^*(1+\kappa_f)+\mu_f(1+\bar{\kappa}^*)\right\}}{\bar{\mu}^*(1+\kappa_f)(\bar{\mu}^*+\mu_f\bar{\kappa}^*)N_1 e^{2\beta\theta} - (\mu_f+\bar{\mu}^*\kappa_f)\left\{\bar{\mu}^*(1+\kappa_f)+2\mu_f(1+\bar{\kappa}^*)\right\}},$$

$$b_1 \equiv \frac{\mu_f(1+\bar{\kappa}^*)(M_2-M_1^2)}{(\mu_f+\bar{\mu}^*\kappa_f)+(\bar{\mu}^*+\mu_f\bar{\kappa}^*)N_1 e^{2\beta\theta}}, \qquad d_1 \equiv \frac{\mu_f(1+\bar{\kappa}^*)}{(\bar{\mu}^*+\mu_f\bar{\kappa}^*)},$$

$$M_1 = \cos\theta + 2\beta\sin\theta, \qquad M_2 = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1) + 2\beta\sin 2\theta + \beta^2(1-\cos 2\theta)$$

이다. 식(16)을 식(3)에 대입하면, 단축응력상태에서의 포텐셜에너지 변화량 $\Delta\Phi$가 아래와 같이 주어진다.

$$\Delta\Phi = -\frac{n\pi R^2 s^2}{64\bar{\mu}^*}\Gamma. \quad \cdots\cdots \quad (17)$$

여기서, Γ는 아래와 같이 정의된다.

$$\Gamma \equiv \int_0^{\theta_0}\alpha(a_1^2 + 2a_2^2 + b_1^2 - 2a_1 d_1\cos\theta e^{-2\beta\theta} + 2d_1^2 e^{-4\beta\theta})\,d\theta.$$

식(15)의 좌변에 식(14)를 대입하고, 그 우변에 식(13)과 식(17)을 대입하면, 다음과 같은 결과식(18)을 얻는다.

$$(1+\kappa^*)\frac{\bar{\mu}^*}{\mu^*} - 1 - \bar{\kappa}^* + \frac{V_f}{4}\Gamma = 0. \quad \cdots\cdots \quad (18)$$

따라서, μ^*, κ^*, μ_f 및 κ_f가 주어진다면, 2개의 비선형 방정식 (12)와 (18)을 풀어 $\bar{\mu}^*$와 $\bar{\kappa}^*$를 구할 수 있다. 본 연구에서는 이들 방정식의 근을 Newton-Raphson방법에 의하여 구하였다.

3-3. 원호균열을 포함하는 균질재료, (보강섬유와 기지가 동종재료인 경우)

원호계면균열을 가진 섬유보강재의 특별한 경우로서 기지와 보강섬유가 동종재료일 때를 살펴보자. 즉, 균질한 등방성 재료(μ,κ)내에서 일정한 반경 R을 가지는 원호균열이 동일한 크기로 무작위 분포하며, 이 때의 균열은 모두 열린 균열로 가정한다. 따라서, 이런 재료도 역시 횡등방성 재료($\bar{\mu}$, $\bar{\kappa}$)로 생각한다. 앞서 계산한 것과 마찬가지로 보존적분 L과 자기일치성(self-consistent)방법을 이용하며,

이 경우에서 자기일치성 방법은 유효탄성계수 $\bar{\mu}$, $\bar{\kappa}$를 가진 유효매체안에 한 원호균열이 균열각 θ_0, 하중각 ω를 가지고 있다고 생각한다.

균질재료의 2차원 균열문제이므로, $\bar{E}_3 = E$, $\bar{\nu}_{31} = \nu$라고 가정한다. $c \equiv \frac{n\pi R^2}{A}$ 라 하면, $\beta=0$, $\bar{\mu}^* = \bar{\mu}$, $\bar{\kappa}^* = \bar{\kappa}$, $\mu^* = \mu$, $\kappa^* = \kappa$, $\mu_f = \bar{\mu}$, $\kappa_f = \bar{\kappa}$ 이므로, 식(12)와 식(18)은 다음과 같이 변화된다.

$$(\kappa-1)\frac{\bar{\mu}}{\mu} - (1-2c\frac{1-\cos\theta_0}{3-\cos\theta_0})\bar{\kappa} = -(1+2c\frac{1-\cos\theta_0}{3-\cos\theta_0}), \quad \cdots\cdots (19)$$

$$(\kappa+1)\frac{\bar{\mu}}{\mu} + (q-1)\bar{\kappa} = 1-q. \quad \cdots\cdots (20)$$

여기서, $t=3-\cos\theta_0$이고, $p=2c(1-\frac{2}{t})$이며, $q=\frac{c}{4}(-\frac{t^3}{3}+5t^2-20t+\frac{140}{3}-\frac{48}{t})$이다. 따라서, 2개의 선형방정식(19)와 (20)을 연립하여 풀면, 다음과 같은 해가 얻어진다.

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{2(q-1)}{(\kappa+1)p-(\kappa-1)q-2}, \quad \cdots\cdots (21)$$

$$\frac{\bar{\kappa}}{\kappa} = -\frac{(\kappa+1)p-(\kappa-1)q+2\kappa}{\kappa[(\kappa+1)p-(\kappa-1)q-2]}. \quad \cdots\cdots (22)$$

위의 원호균열을 가진 균질재료에서 극한의 경우 ($R\to\infty$, $\theta_0\to 0$, $R\theta_0 = a = \text{const.}$)를 생각함으로써, 원호균열문제에서 직선균열문제로 전환되는데, 이와 같은 직선균열문제에서 Budiansky와 O'Connell[11]은 균열밀도(crack density)라고 하는 기하학적 매개변수 ε를 아래와 같이 제안한 바 있다.

$$\varepsilon = \frac{4}{\pi A}\sum_{j=1}^{n} a_j^2. \quad \cdots\cdots (23)$$

따라서, 극한의 경우를 고려하여 식(21)과 식(22)로부터 직선균열문제에서의 값들을 구한후, 식(23)을 이용하여 균열밀도 매개변수의 항으로 나타내면 아래와 같다.

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{4(4-\pi^2\varepsilon)}{16+(\kappa-3)\pi^2\varepsilon} = \frac{4-\pi^2\varepsilon}{4-\pi^2\varepsilon\nu}, \quad \cdots\cdots (24)$$

$$\frac{\bar{\kappa}}{\kappa} = \frac{16\kappa+(3-\kappa)\pi^2\varepsilon}{\kappa[16+(\kappa-3)\pi^2\varepsilon]}. \quad \cdots\cdots (25)$$

Laws와 Brockenbrough[13]는 2차원 직선균열이 무작위 분포되어 있는 균질재료의 유효탄성계수를 구한 바 있는데, 위의 식(24)와 (25)는 이러한 Laws와 Brockenbrough[13]의 결과와 일치한다.

4. 수치계산의 결과 및 토의

4-1. 균질재료내에 원호균열이 존재하는 경우(보강섬유가 없는 경우)

개재물이 없는 균질재료내에 일정한 곡률반경 R을 가진 원호균열이 횡단면인 평면 1-2상에 동일한 크기 ($=2R\theta_0$)로 무작위 분포되어 있는 경우에 대해서, 식(21)과 (22)를 이용하여 그 결과를 도시하였다.

Fig.3과 Fig.4는 주어진 $c(=\frac{n\pi R^2}{A})$에 대하여 균열로 인한 유효탄성계수 $\bar{E}, \bar{G}(=\bar{\mu})$의 변화를 각각 나타낸 것이다. 여기서, 유효강성계수 $\bar{E}$와 $\bar{G}$는 균열각의 증가에 따라서 감소하며, $c > 0.3$일때 재료의 강성이 완전히 없어지는 균열각 θ_0가 존재함을 알 수 있다. $c < 0.907$(기지가 모두 반경 R인 원으로 채워져 있고, 한 원에 1개의 균열이 존재할 때, $c = 0.907$이 된다)일때 균열각 θ_0가 180°가 되더라도 균열과 균열 사이는 항상 떨어져 있어서 재료의 강성이 반드시 존재해야 함을 이해한다면, 위의 사실은 물리적으로 납득하기 어렵다. Budiansky[7]는 구형의 기공을 가지는 재료에 대하여 자기일치성(self-consistent)방법이 $V_{hole}=0.5$이상에서 재료의 강성이 존재하지 않는 결과를 초래한다며 사용상의 주의를 권고하기도 했다. Hashin[19]은 균열이 존재하는 재료에 대하여 자기일치성(self-consistent) 방법이 재료의 강성을 과소평가한다고 주장한 바, 본 논문에서도 c가 커질수록 유효탄성계수를 과소평가하는 경향이 커진다고 생각된다. 한편, 균열각들이 어느정도 크기가 되면 접촉영역이 생기게 되는데, 이러한 현상을 무시한다는 본 연구의 가정은 균열각 θ_0가 증가할수록 계산결과에 대한 신뢰도를 약화시킨다. 그러므로, 자기일치성(self-consistent) 방법 자체가 지니고 있는 결점과 균열면 사이의 접촉을 무시한다는 가정이 계산결과에 대한 유효성을 c와 균열각 θ_0의 값이 작은 영역으로 제한한다고 생각되나 좀 더 연구해야 할 과제이다.

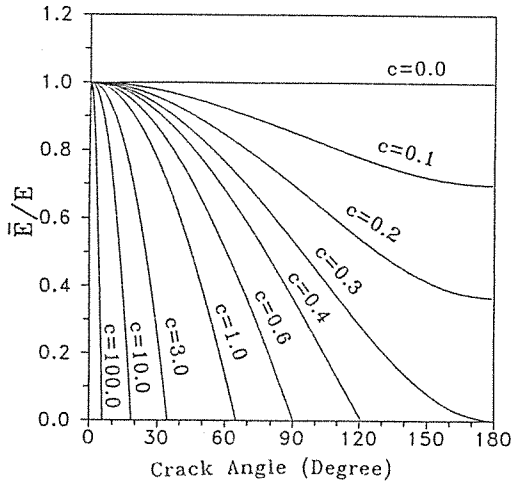

Fig. 3. Variation of Effective Transverse Young's Modulus with Crack Angle in the Cracked Homogeneous Materials.

1. $\bar{E}$: Effective Transverse Young's Modulus
2. Material Property: Polyester(E=3.5 GPa, ν=0.37)

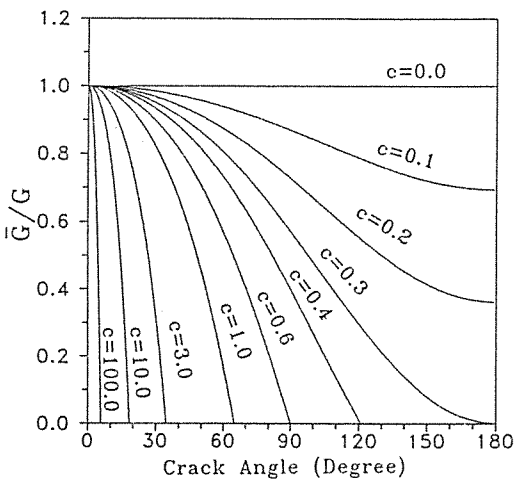

Fig. 4. Variation of Effective Transverse Shear Modulus with Crack Angle in the Cracked Homogeneous Materials.

1. $\bar{G}$: Effective Transverse Shear Modulus
2. Material Property: Polyester(E=3.5 GPa, ν=0.37)

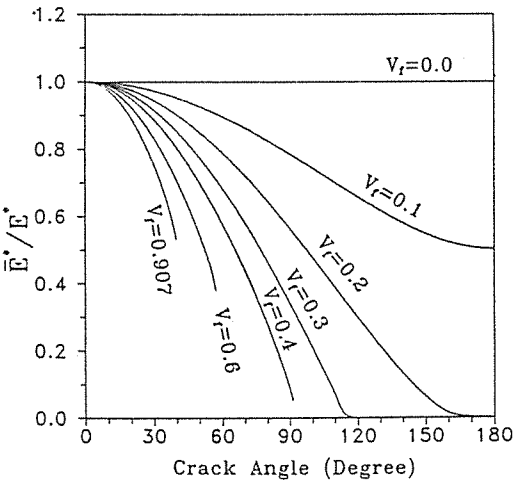

Fig. 5. Variation of Effective Transverse Young's Modulus with Crack Angle in the Cracked Fibrous Composites.

1. $\bar{E}^*$: Effective Transverse Young's Modulus
2. Material Properties:
   Glass Fiber(E_f=76.0 GPa, ν_f=0.25)
   Polyester Matrix(E_m=3.5, ν_m=0.37)

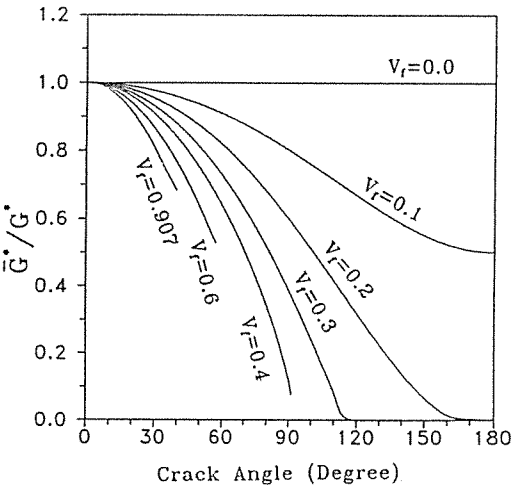

Fig. 6. Variation of Effective Transverse Shear Modulus with Crack Angle in the Cracked Fibrous Composites.

1. $\bar{G}^*$: Effective Transverse Shear Modulus
2. Material Properties:
   Glass Fiber(E_f=76.0 GPa, ν_f=0.25)
   Polyester Matrix(E_m=3.5, ν_m=0.37)

4-2. 섬유보강재내에 원호계면균열이 존재하는 경우

기지와 보강섬유사이의 계면에서 크기($=2R\theta_0$)가 일정한 원호계면균열이 무작위 분포하는, 섬유보강재의 유효탄성계수 $\bar{\mu}^*$, $\bar{\kappa}^*$를 구하기 위해서는 식(12)와 식(18)의 비선형 방정식 2개를 풀어야 되는데, 이때 μ_f, κ_f, μ^* 및 κ^*는 주어지는 값이다. 여기서, μ^*와 κ^*는 균열을 비롯한 어떠한 결함도 존재하지 않는 섬유보강재의 유효탄성계수로서, 보강섬유와 기지의 탄성계수들을 이용하여 구할 수 있다. 본 연구에서는 이것 또한 자기일치성(self-consistent)방법을 사용하여 유효탄성계수들을 구하였는데[20], 기지로는 폴리에스터($E_m=3.50$ GPa, $\nu_m=0.37$)를 선택하였고, 보강섬유로는 유리섬유($E_f=76.0$ GPa, $\nu_f=0.25$)를 선택하였다. 이들 식(12)와 식(18)은 Newton-Raphson방법으로 풀었으며, 주어진 보강섬유의 부피비(V_f)에 대해서 균열각에 따른 각각의 유효탄성계수 $\bar{E}^*, \bar{G}^*(=\bar{\mu}^*)$의 변화를 각각 Fig.5와 Fig.6에 나타내었다.

그리고, Fig.5와 Fig.3, Fig.6과 Fig.4등을 각각 비교해 보면, 섬유보강재에서 원호계면균열로 인한 유효강성계수($\bar{E}^*, \bar{G}^*$)의 감소율이 균질재료내에서 발생하는 2차원 원호균열로 인한 것보다 더 크기 때문에, 섬유보강재내의 원호계면균열이 균질재료내에서 생기는 원호균열보다 재료의 강성을 더욱 저하시킴을 알 수 있다. Fig.5와 Fig.6으로부터, $V_f=0.2$, $\theta_0=180^\circ$와 $V_f=0.3$, $\theta_0=120^\circ$에서 재료의 강성이 없어짐을 알 수 있는데, 이와 같이 $V_f=0.907$ 이하의 범위에서 재료의 강성이 없어지는 물리적 모순의 원인은 앞절에서 지적한대로 자기일치성(self-consistent)방법 자체의 결함 때문으로 생각된다.

5. 결 론

1) 본 연구에서는 원호계면균열을 가진 섬유보강재의 횡단면상의 유효탄성계수를 $\bar{E}^*$, $\bar{G}^*$를 구하기 위해서, 보존적분 L과 자기일치성(self-consistent) 방법을 이용하여 2개의 비선형 방정식을 유도하였다.

2) 원호계면균열을 가진 섬유보강재의 특별한 경우로서 섬유와 기지가 동종재료일 때, 즉, 2차원 원호균열을 갖는 균질재료의 유효탄성계수를 마찬가지 방법에 의해 구하였으며, 그 결과를 폐형해(closed form solution)로 나타내었다.

3) 앞 절에서 계산된 수치계산결과를 통하여 균열로 인한 재료의 강성저하가 크다는 사실을 알았으며, 이는 섬유/기지재료간의 결합을 제어하는 일이 중요하다는 것을 암시한다.

후 기

본 연구는 과학재단의 목적기초 연구비의 지원을 받아 이루어졌으며, 그 지원에 심심한 감사를 표합니다.

참 고 문 헌

1. Hashin, Z. & Shtrikman, S., "A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behavior of Multiphase Materials," J. Mech. Phys. Solids, Vol.11, 1963, pp.127-140.
2. Hashin, Z. & Rosen, B.W., "The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials," Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol.31, 1964, pp. 223-232.
3. Hashin, Z., "Analysis of Properties of Fiber Composites with Anisotropic Constituents," Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol.46, 1979, pp.543-550.
4. Hershey, A.V., "The Elasticity of an Isotropic Aggregate of Anisotropic Cubic Crystals," Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 21, 1954, p.236.
5. Kröner, E., "Berechnung der Elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls," Z. Phys., Vol.151, 1958, p.504.

6. Hill, R., "A Self-consistent Mechanics of Composite Materials," J. Mech. Phys. Solids, Vol. 13, 1965, pp. 213-222.
7. Budiansky, B., "On the Elastic Moduli of Some Heterogeneous Materials," J. Mech. Phys. Solids, Vol. 13, 1965, pp. 223-227.
8. Laws, N., "Composite Materials: Theory vs. Experiment," J. Comp. Mater., Vol. 22, 1988, pp. 396-400.
9. Richard, T. G., "The Mechanical Behavior of a Solid Microsphere Filled Composite," J. Comp. Mater., Vol. 9, 1975, pp. 108-113.
10. Christensen R. M., *Mechanics of Composite Materials*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1979.
11. Budiansky, B. & O'Connell, R. J., "Elastic Moduli of a Cracked Solid," Int. J. Solids Struct., Vol. 12, 1976, pp. 81-97.
12. Horri, H. & Nemat-Nasser, S., "Overall Moduli of Solids with Microcracks: Load-Induced Anisotropy," J. Mech. Phys. Solids, Vol. 31, 1983, pp. 155-171.
13. Laws, N. & Brockenbrough, J. R., "The Effect of Micro-Crack Systems on the Loss of Brittle Solids," Int. J. Solids Struct., Vol. 23, 1987, pp. 1247-1268.
14. Budiansky, B. & Rice, J. R., "Conservation Laws and Energy Release Rate," Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 40, 1973, pp. 201-203.
15. Knowles, J. K. & Sternberg, E., "On a Class of Conservation Laws in Linearized and Finite Elastostatics," Archive Rat. Mech. Analysis, Vol. 44, pp. 187-211.
16. Park, J. H. & Earmme, Y. Y., "Application of Conservation Integrals to Interfacial Crack Problems," Mech. Mater., Vol. 5, 1986, pp. 261-276.
17. Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Trans. by Radok, J. R. M., Noordhoff, Leyden, 1953.
18. Perlman, A. B. & Sih, G. C., "Elastostatic Problems of Curvilinear Cracks in Bonded Dissimilar Materials," Int. J. Eng. Sci., Vol. 5, 1967, pp. 845-867.
19. Hashin, Z., "Analysis of Composite Materials - a Survey," Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 50, 1983, pp. 481-505.
20. Mura, T., *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff, The Hague, 1982.