

## 論文

### 복합재료 회전원판의 면내응력 해석

구교남<sup>\*+</sup>

#### In-plane Stress Analysis of Rotating Composite Disks

Kyo-Nam Koo<sup>\*+</sup>

#### ABSTRACT

Rotating circular disks are widely used in data storage devices as well as in traditional industrial machines. Faster rotating speed is required in data storage devices for higher data transfer rate. In this paper an application of composite materials to CD is proposed to increase critical speeds and the strength analysis was performed. A differential equation of displacement is derived for the analytic stress distribution of rotating polar orthotropic disk. The stress distributions for typical GFRP and CFRP disks and the maximum allowable speeds subjected to a constraint of tensile strength are presented in addition to polycarbonate disk. The results show that the application of CFRP to rotating disk can increase the maximum allowable rotating speed but this may not be applicable to GFRP disk.

#### 초 록

회전원판은 전통적인 산업기기 뿐만 아니라 최근에 정보저장기기에 많이 사용되고 있다. 특히 빠른 정보전달 속도를 위해서는 회전정보기기의 회전수를 증가시키는 것이 필수적이다. 이를 위해 본 연구에서는 CD에 복합재료를 적용하여 강도해석을 수행하였다. 회전하는 극직교 이방성 원판의 응력분포의 계산을 위해 변위에 대한 미분방정식을 유도하였다. 기존 제품인 폴리카보네이트 CD 뿐만 아니라 전형적인 유리섬유 복합재료와 탄소섬유 복합재료를 선정하여 응력 분포를 계산하였으며 인강강도를 구속조건으로 하는 최대 허용회전수를 구하였다. 해석결과 탄소섬유 복합재료 원판의 경우 최대 허용 회전속도가 증가하지만 유리섬유 복합재료 원판의 경우에는 그렇지 않음을 보였다.

**Key Words:** 회전원판(rotating disk), 면내 응력(in-plane stress), 극직교 이방성(polar orthotropic), CD

### 1. 서 론

환형판(annular disk) 또는 원판(circular disk)은 산업기기에서 매우 다양한 형태로 사용되고 있다. 그 응용사례로는 원형 전기톱, 터빈, 브레이크 디스크 등 전통적인 산업기계 뿐만 아니라 최근 하드 디스크, CD-ROM(compact disk), DVD-ROM(digital versatile disk) 등의 정보저장기기 등을 들 수 있다. 특히 취급하는 정보량이 증가함에 따라 정보 전달 속도를 높이기 위해 이들 정보저장기기에 들어가는 디스크의 회전속도의 증가도 급격하게 이루어지고 있다. 현재 시

판되고 있는 CD-ROM의 최대 회전속도는 52배속이며 디스크의 임계속도(critical speed)는 약 7,000 rpm 정도로 이미 초임계속도(supercritical speed)에서 구동되고 있으므로[1] 그 이상의 속도에서도 안정적이며 안전한 재료가 필요하다.

회전원판의 응력분포는 강도계산 뿐만 아니라 진동해석 및 임계속도 계산에 요구된다. 등방성 회전원판에 대한 응력해석은 19세기 초 이래로 다루어지기 시작했으며 일반적인 탄소론 교재 대부분에서 다룰 정도로 매우 진부한 문제이다. 복합재료의 그 응용성이 다양해지면서 1970년대 경부터 다양한 효과를 고려한 극직교 이방성(polar orthotropic)

\*+ 울산대학교 항공우주공학과, 교신저자(E-mail: knkoo@mail.ulsan.ac.kr)

회전 원판에 대한 응력해를 다루기 시작했다[2-5]. 이들 대부분의 논문에서의 특징은 응력분포의 해석해(analytic solution)를 구하는데 있어서 구성방정식, 평형방정식과 변형을 적합방정식을 만족시키는 응력함수(stress function)에 대한 미분방정식을 다룬다는 점이다. 응력함수에 대한 미분방정식은 축대칭 문제에 대해서는 궁극적으로 변위에 대한 미분방정식과 같은 형태를 가지나 축대칭 문제가 아닌 경우에는 적절한 응력함수의 선택이 용이하지 않을 수 있다.

본 연구에서는 응력함수를 다루는 대신 변위에 대한 미분방정식의 해를 구한 뒤 응력분포를 구하는 직접적인 방법을 사용하였다. 또한 원주방향과 반경방향의 탄성계수비  $E_{\theta}/E_r=9$ 가 되어 응력해가 특이하게(singular)될 때에도 해를 구하여 통합식을 제시하였다. 구해진 해를 이용하여 CD와 같은 제원을 갖는 섬유섬유 복합재료(GFRP) 및 탄소 섬유 복합재료(CFRP) 회전원판의 응력분포를 계산하였으며 인장강도를 구속조건으로 하는 최대 허용 회전수를 구하였다. 이들 최대 회전수를 일반 CD인 폴리카보네이트(polycarbonate) CD의 최대 회전수와 비교하였다. 그리고 CD와 제원이 같은 회전원판에 대해  $E_{\theta}/E_r$ 값의 변화에 따른 반경응력과 원주응력의 분포를 비교하였다.

### 2. 지배방정식과 일반해

섬유강화복합재료를 원판에 적용하는 방법은 Fig. 1과 같이 두 가지 방법을 생각할 수 있다. (a)는 섬유를 반경방향으로 배열한 원판이며 (b)는 섬유를 원주방향으로 배열한 원판이다. 두 가지 경우 모두 극직교 이방성 원판(polar orthotropic disk)으로 모델링할 수 있다. Fig. 2와 같은 극좌표계에서 극직교 이방성 원판의 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_{\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_r}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}} & \frac{\nu_{\theta r}E_r}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}} & 0 \\ \frac{\nu_{r\theta}E_{\theta}}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}} & \frac{E_{\theta}}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{r\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_{\theta} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

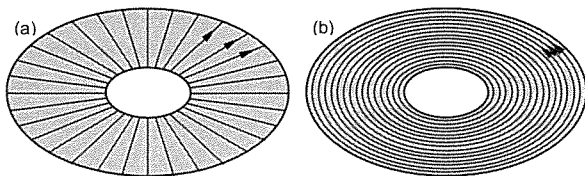


Fig. 1 (a) Radially-reinforced(RR) composite disk and (b) Circumferentially-reinforced(CR) composite disk.

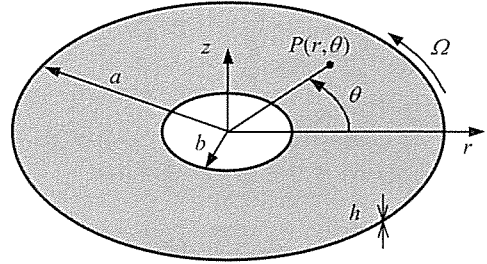


Fig. 2 Coordinates and geometry of rotating disk.

여기서  $\nu_{r\theta}/E_r = \nu_{\theta r}/E_{\theta}$ 인 관계가 성립한다.

극좌표계에서 면내 변형률은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_{\theta} &= \frac{1}{r} \left( u_r + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} \right) \\ \gamma_{r\theta} &= r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_{\theta}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하고 z-방향으로 두께 h에 대해 적분하면 다음과 같이 단위길이당 평면력을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} N_{\theta} &= \nu_{\theta r} K_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + K_{\theta} \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_{\theta}}{r \partial \theta} \right) \\ N_r &= K_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_{r\theta} K_{\theta} \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_{\theta}}{r \partial \theta} \right) \\ N_{r\theta} &= h G_{r\theta} \left( -\frac{u_{\theta}}{r} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $K_r$ 과  $K_{\theta}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$K_r = \frac{E_r h}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}, \quad K_{\theta} = \frac{E_{\theta} h}{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}} \quad (4)$$

일정한 회전수  $\Omega$ 로 회전하는 원판의 r-방향으로의 평형방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$-\frac{\partial(rN_r)}{\partial r} - \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial \theta} + N_{\theta} = \rho \Omega^2 r^2 \quad (5)$$

여기서  $\rho$ 는 원판의 밀도이다. 회전수가 일정할 때  $N_{r\theta} = 0$ 이고 축대칭 문제이므로  $\partial(\cdot)/\partial \theta = 0$ 임을 이용하면  $N_r$ 과  $N_{\theta}$ 는 다음과 같이 단순화된다.

$$N_r = K_r \frac{du_r}{dr} + v_{,r} K_{\theta} \frac{u_r}{r} \quad (6.a)$$

$$N_{\theta} = v_{\theta,r} K_r \frac{du_r}{dr} + K_{\theta} \frac{u_r}{r} \quad (6.b)$$

식 (6)을 식 (5)에 대입하며 정리하면 다음과 같이 코시-오일러(Cauchy-Euler) 방정식 형태로 정리된다.

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + r \frac{du_r}{dr} - \mu^2 u_r = - \frac{\rho h \Omega^2 r^3}{K_r} \quad (7)$$

여기서  $\mu^2 = E_{\theta}/E_r$ 이며 이 값이 9가 되면 식 (7)의 해는 특이하게 되므로  $\mu$ 에 따라 일반해는 다음과 같이 두 경우로 나누어진다.

$$u_r(r) = C_1 r^{\mu} + C_2 r^{-\mu} - \frac{\rho h \Omega^2}{K_r} g(r) \quad (8)$$

where  $g(r) = r^3/(9 - \mu^2)$  for  $\mu \neq 3$

$$g(r) = (r^3 \ln r)/6 \quad \text{for } \mu = 3$$

$r = b$ 에서 고정되고  $r = a$ 에서 자유인 경계조건은 다음과 같다.

$$u_r(b) = 0, \quad N_r(a) = 0 \quad (9)$$

식 (9)의 경계조건을 적용하여  $u_r$ 을 구하고 식 (6)에 대입하면 원심력에 의한 평면력을 구할 수 있다.

$$\frac{N_r}{\rho h \Omega^2} = k \left\{ (C_{r1} - \delta_{\mu 3}) r^{\mu-1} - \frac{C_{r2}}{r^{\mu+1}} - C_{r3} r^2 f(r) \right\} \quad (10)$$

$$\frac{N_{\theta}}{\rho h \Omega^2} = k \left\{ (C_{\theta 1} - v_{\theta,r} \delta_{\mu 3}) r^{\mu-1} + \frac{C_{\theta 2}}{r^{\mu+1}} - C_{\theta 3} r^2 f(r) \right\} \quad (11)$$

여기서 각각의 계수는 다음과 같이 정의된다.

$$C_{r1} = \frac{(1 + \mu v_{,r}) \{ (3 + v_{\theta,r}) f(a) + \delta_{\mu 3} \} a^3 b^{-\mu} + (\mu - v_{\theta,r}) a^{-\mu} b^3 f(b)}{D} \quad (12.a)$$

$$C_{r2} = \frac{(\mu + v_{\theta,r}) f(a) - (3 + v_{\theta,r}) f(b) + \delta_{\mu 3}}{a^{\mu} b^3 D} \quad (12.b)$$

$$C_{r3} = 3 + v_{\theta,r} \quad (12.c)$$

$$C_{\theta 1} = \mu C_{r1} \quad (12.d)$$

$$C_{\theta 2} = \mu C_{r2} \quad (12.e)$$

$$C_{\theta 3} = \mu^2 (1 + 3v_{\theta,r}) \quad (12.f)$$

$$D = (1 + \mu v_{,r})(a/b)^{\mu} + (1 - \mu v_{,r})(b/a)^{\mu} \quad (12.g)$$

$$\begin{cases} k = 1/(9 - \mu^2), \delta_{\mu 3} = 0, f(r) = 1 & \text{for } \mu \neq 3 \\ k = 1/6, \delta_{\mu 3} = 1, f(r) = \ln(r) & \text{for } \mu = 3 \end{cases} \quad (12.h)$$

### 3. 계산결과 및 검토

본 연구에서 유도된 해를 CD-ROM과 같은 재원을 갖는 원판에 적용하였으며 CD-ROM의 기하학적인 재원은 다음과 같다.

$$b = 15 \text{ mm}, \quad a = 60 \text{ mm}, \quad h = 1.2 \text{ mm}$$

Table 1에는 본 연구에서 사용된 재료들의 물성치를 나타낸다. PC는 폴리카보네이트(polycarbonate)로 기존의 CD-ROM의 재료이고, GFRP는 전형적인 유리섬유강화 복합재료인 E-glass/Epoxy로 선택하였으며 CFRP는 탄소섬유강화 복합재료로 T300/N5208을 선택하였다. Table 1에서 하첨자 1과 2는 각각 섬유방향과 섬유에 수직인 방향을 뜻하며 X와 Y는 1과 2방향으로의 인장강도를 의미한다.

Table 1 Material properties

Properties	PC	GFRP	CFRP
$E_1$	2.2 GPa	38.6 GPa	181.0 GPa
$E_2$	2.2 GPa	8.27 GPa	10.3 GPa
$G_{12}$	0.846 GPa	4.14 GPa	7.17 GPa
$\nu_{12}$	0.30	0.26	0.28
$\rho$	1220 kg/m <sup>3</sup>	1800 kg/m <sup>3</sup>	1600 kg/m <sup>3</sup>
X	54.9 MPa	1062 MPa	1500 MPa
Y	54.9 MPa	31 MPa	40 MPa

Fig. 3은 일반 CD인 PC 원판의  $\sigma_r/\Omega^2$ 와  $\sigma_{\theta}/\Omega^2$ 의 분포를 나타내고 있다. 반경방향 응력은 예상대로 중심으로부터 갈수록 증가하는 양상이며 원주방향 응력은  $r/a = 0.485$ 에서 최대값을 갖는다.

극직교 이방성 원판은 반경방향으로 보강된(radially reinforced: RR) 원판과 원주방향으로 보강된(circumferentially reinforced: CR) 원판으로 고려할 수 있다. 각각의 경우 물성치는 다음과 같이 고려해야 한다.

$$\text{RR disk: } E_r = E_1, \quad E_{\theta} = E_2, \quad G_{r\theta} = G_{12}, \quad \nu_{,r\theta} = \nu_{12}$$

$$\text{CR disk: } E_r = E_2, \quad E_{\theta} = E_1, \quad G_{r\theta} = G_{12}, \quad \nu_{,r\theta} = \nu_{21}$$

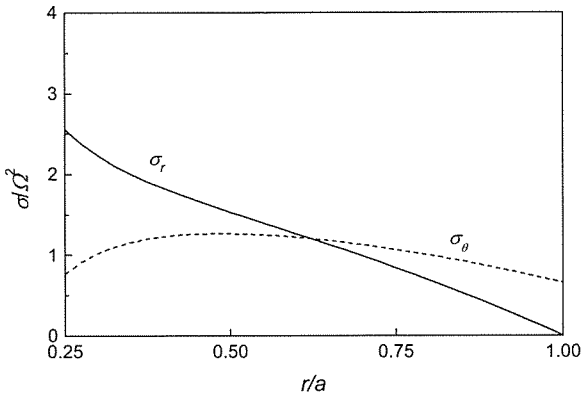


Fig. 3 Stress distribution of polycarbonate disk.

Fig. 4 ~ Fig. 7에 GFRP와 CFRP로 이루어진 원판의 응력 분포를 제시하였다. 사용된 재료상수와 원판의 치수는 다르지만 참고문헌 [2]에 제시된 결과와 유사한 분포는 갖는다.

Fig. 4는 반경 방향으로 섬유가 배열된 RR GFRP 원판의 응력분포이며  $\mu^2 = 0.214$ 에 해당된다. Fig. 3의 등방성 원판과 응력분포는 유사하나 이  $\sigma_\theta/\Omega^2$ 에 비해  $\sigma_r/\Omega^2$ 가 매우 크게 나타나고 있다. Fig. 5는 원주 방향으로 섬유가 배열된 CR GFRP 원판의 응력분포이며  $\mu^2 = 4.67$ 에 해당된다. CR GFRP 원판은 거의 모든 반경에서  $\sigma_\theta/\Omega^2$ 가  $\sigma_r/\Omega^2$  보다 큰 값을 갖고 있다.  $\sigma_r/\Omega^2$ 의 분포의 변화는 RR GFRP 원판에 비해 완만하며  $\sigma_\theta/\Omega^2$ 의 최대값은 갖는 반경의 위치는 바깥쪽으로 대폭 이동하였음을 알 수 있다.

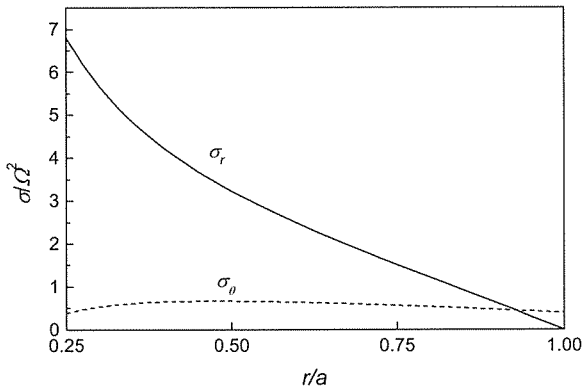


Fig. 4 Stress distribution of RR GFRP disk.

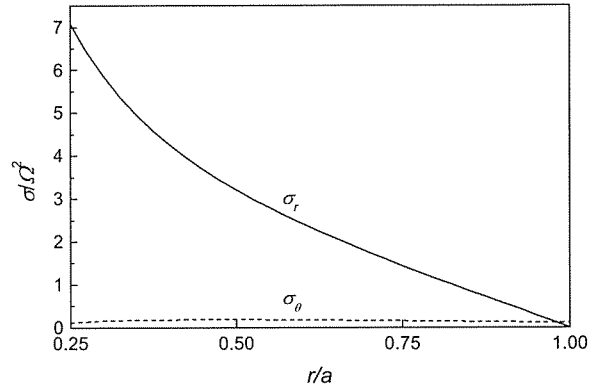


Fig. 6 Stress distribution of RR CFRP disk.

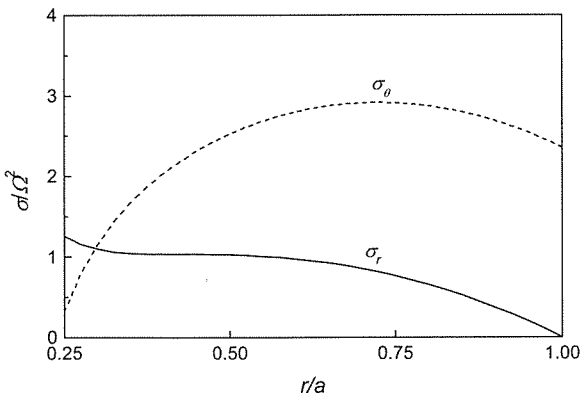


Fig. 5 Stress distribution of CR GFRP disk.

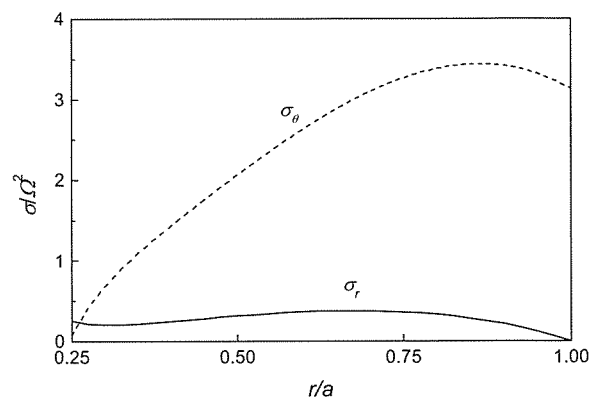


Fig. 7 Stress distribution of CR CFRP disk.

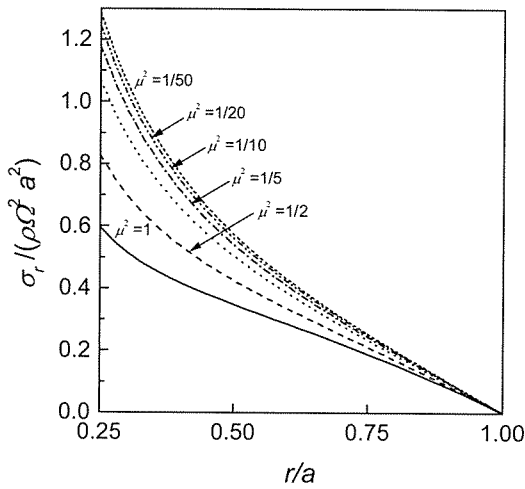


Fig. 8 Non-dimensional radial stress distribution of RR composite disk.

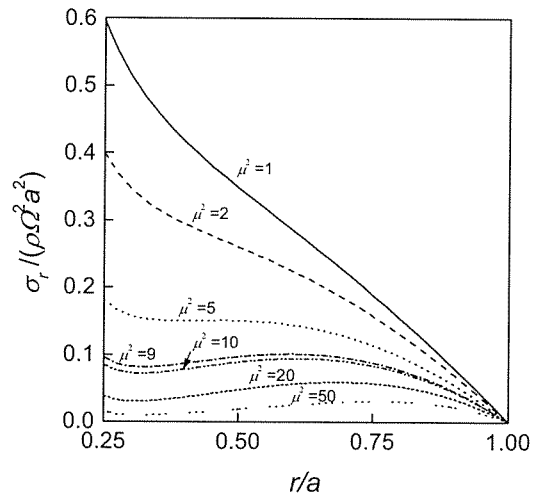


Fig. 10 Non-dimensional radial stress distribution of CR composite disk.

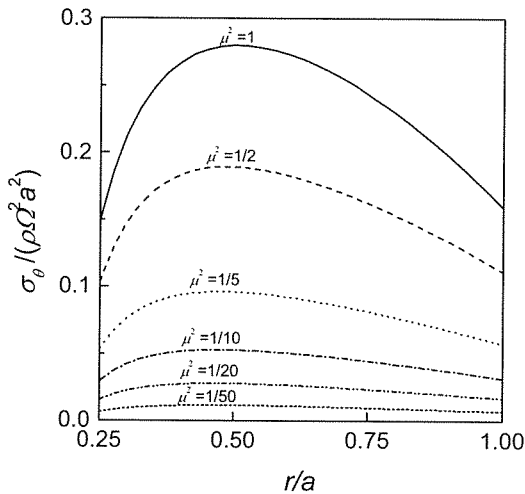


Fig. 9 Non-dimensional circumferential stress distribution of RR composite disk.

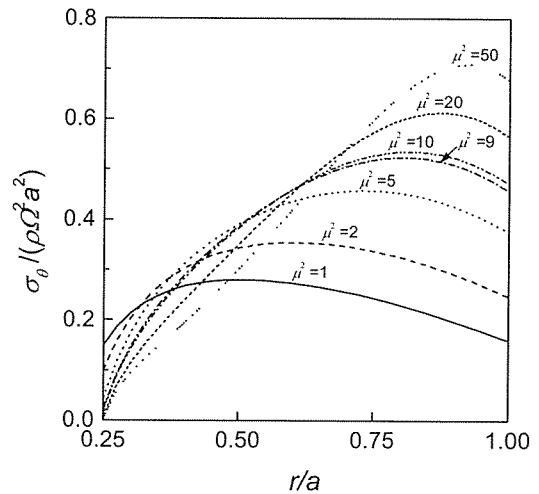


Fig. 11 Non-dimensional circumferential stress distribution of CR composite disk.

Fig. 6과 Fig. 7은 GFRP 보다 밀도는 작은 반면 강도와 강성이 더욱 우수한 CFRP 회전 원판의 응력분포를 보여준다. RR CFRP 원판의 응력분포를 살펴보면 RR GFRP와 유사한 경향을 갖고 있으나  $\sigma_{\theta}/\Omega^2$ 가 매우 작게 나타나고 있다. CR CFRP 원판의 경우  $\sigma_r/\Omega^2$ 의 분포는 다른 원판과는 달리 반경이 작아질수록 지속적으로 증가하지 않고 약간 증가하는 경향을 보이다 고정위치인  $r/a = 0.65$ 부근에서부터는 약간 감소하는 분포를 갖는다.  $\sigma_{\theta}/\Omega^2$ 의 최대값은 GFRP 원판에 비해 반경 바깥쪽으로 더욱 이동한 모습이다.

Table 2 Maximum rotating speeds based on strength

Material	Max rotating speed (rpm)	
	RR disk	CR disk
Polycarbonate		
44,216		
GFRP	X	119,287
	Y	65,208*
CFRP	X	138,941*
	Y	139,884
		98,444*

Table 2에는 인장강도를 구속조건으로 하는 최대 회전속도를 원판의 종류별로 나타내었다. GFRP나 CFRP의 경우(\*) 표시된 회전수가 최대 허용 회전속도를 나타낸다. 서론에 언급한 바와 같이 폴리카보네이트 원판은 임계속도가 약 7,000 rpm이므로 인장강도에 대한 허용 회전수는 임계속도보다 훨씬 여유가 있다. GFRP나 CFRP 원판의 최대 회전수는 RR 원판보다 CR 원판이 작게 나타난다. RR 원판의 경우 GFRP 원판은 최대 회전속도 65,208 rpm에서 기지가 파손되며 CFRP 원판은 138,941 rpm에서 섬유의 파손이 발생함을 확인할 수 있다. 반면 CR 원판의 경우 GFRP 원판과 CFRP 원판 모두 기지의 파손이 먼저 발생함을 알 수 있다.

Fig. 8 ~ Fig. 11에는 CD와 같은 제원인  $a/b=4$ 를 갖는 회전원판에 대해  $\nu_{12}=0.25$ 일 때  $\mu^2 = E_\theta/E_r$ 에 따른 무차원 응력  $\sigma_r/(\rho\Omega^2a^2)$ 과  $\sigma_\theta/(\rho\Omega^2a^2)$ 을 도시하였다. Fig. 8과 Fig. 9에서  $\mu^2=1$ 은 등방성 원판에 해당되며  $\mu^2 < 1$ 는 반경방향으로 섬유가 배열된 원판으로  $\sigma_r/(\rho\Omega^2a^2)$ 은 반경이 감소함에 따라 단조증가하며  $\sigma_\theta/(\rho\Omega^2a^2)$ 는  $\mu^2$ 에 따라 비슷한 양상을 보이나  $\mu^2$ 가 작아지면서 반경에 따라 일정하며 작은 값을 갖는다.  $\mu^2 > 1$ 는 섬유가 원주방향으로 배열된 원판으로 Fig. 10에 반경응력과 Fig. 11에 원주응력이 제시되었다. 원주강화 원판의 경우  $\mu^2=5$  이상에서부터  $\sigma_r/(\rho\Omega^2a^2)$ 이 반경에 줄어감에 따라 단조증가하지 않고 중간에서 응력의 최대치가 나타나고 있다.  $\sigma_\theta/(\rho\Omega^2a^2)$ 는  $\mu^2$ 가 커질수록 최대응력이 증가하며 최대위치가 반경 바깥쪽으로 이동해 감을 알 수 있다.  $\mu^2=9$ 일 때 반경응력과 원주응력을 도시하였는데  $\mu^2=10$ 인 경우와 비슷한 분포를 보여주고 있다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 극직교 이방성 회전원판에 작용하는 평면력을 구하기 위해 응력함수를 다루지 않고 변위에 대한 미분방정식의 해를 구한 뒤 응력분포를 구하는 직접적인 방법을 사용하였다. 구해진 응력분포식은 원주방향과 반경방향의 탄성비  $E_\theta/E_r=9$ 가 되어 해가 특이해지는 (singular) 경우를 포함한다.

구해진 응력분포 식을 이용하여 CD와 같은 제원을 갖는 유리섬유복합재료(GFRP)와 탄소섬유복합재료(CFRP)로 된 회전원판의 응력분포를 계산하였으며 인장 강도를 구속 조건으로 하는 최대 회전수를 구하였다. GFRP 원판의 경우 폴리카보네이트 원판보다 최대 허용회전수가 작게 나타

나고 있었으며 CFRP 원판은 2배 이상 증가된 값을 갖고 있음을 확인할 수 있었다. 또한 GFRP 원판과 CFRP 원판 모두 원주방향으로 보강된 원판에 의해 최대 허용 회전수가 결정되었다. 또한  $E_\theta/E_r$ 값의 변화에 따른 회전원판의 반경응력과 원주응력의 분포를 계산하여 다양한 탄성계수비에 대한 응력분포의 경향을 제시하였다.

본 연구에서 구한 응력분포는 후진파에 의한 임계속도 계산에 활용될 예정이며 최대 임계속도를 갖는 섬유배열이 달라질 것으로 예상된다.

#### 후 기

이 논문은 2005년 울산대학교의 연구비에 의하여 연구되었음.

#### 참고문헌

- 1) Lee, S.-Y., Kim, J.-Y., and Lim, S., "Critical and Flutter Speeds of Optical Disks," *Microsystem Technologies*, Vol. 8, 2002, pp. 206-211.
- 2) Tang, S., "Elastic Stresses in Rotating Anisotropic Disks," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 11, No. 6, 1969, pp. 509-517.
- 3) Reddy, T. A. and Srinath, H., "Elastic Stresses in a Rotating Anisotropic Annular Disk of Variable Thickness and Variable Density," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.16, No. 2, 1974, pp. 85-89.
- 4) Chang, C. I., "A Closed-Form Solution for an Orthotropic Rotating Disk," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 41, Dec. 1974, pp. 1122-1123.
- 5) Genta, G. and Gola, M., "The Stress Distribution in Orthotropic Rotating Disks," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, Sep. 1981, pp. 559-562.