

論文

유한요소법을 이용한 복합재 적층판의 초기 및 최종 파단 강도 해석

신의섭* · 주 진* · 이해경*

Analysis of First and Last Failure Strengths on Composite Laminates Using Finite Element Method

Eui-Sup Shin*, Gene Joo* and Hae-Kyung Lee*

ABSTRACT

A finite element computational procedure is developed for the progressive failure analysis of composite laminates. This procedure is based on the first-order shear deformation plate theory providing stress predictions for thin and moderately thick laminates, even in case of unsymmetric lamination geometry. In order to calculate the interlamina stresses at free edges, 3D solid element is also developed. Connecting regions between these elements are specified, on which the solutions of the plate meshes are transferred as kinematic boundary conditions of solid meshes.

Out of various failure criteria, three most representative criteria are selected and compared : i. e. maximum stress theory, Tsai - Wu criterion, and Hashin's criterion. As a progressive failure mechanism, elementwise ply discount method and spring analogy model are adopted. These methods are effectively combined with the FEM. The termination of failure is determined by evaluating the decreased determinant of global stiffness matrix.

Various numerical examples are presented to verify the above methods. First ply failure (FPF) analysis of laminates subjected to bending loads can be achieved. As a result, Hashin's criteria predicts reasonable FPF load level with its failure locations and modes in comparison to the other criteria mentioned above. Finally, we can perform the progressive failure analysis up to last ply failure (LPF).

* 서울대학교 항공우주공학과

초 록

복합재 적층판의 파단 진전 해석을 위해, 기존의 파단 이론에 유한요소법을 적용한 계산법을 개발하였다. 응력에 관한 해석 과정은 일차 전단변형 판이론으로 정식화시킨 유한요소에 기초하는데, 이는 비교적 두꺼운 비대칭 적층판에까지 적용 가능하게 하기 위함이다. 한편 자유경계단에서의 층간응력을 구하기 위하여, 3차원 탄성체 요소도 개발하였다. 이들의 혼용시에는, 평판 모델의 해가 국부적 탄성체 모델의 기하학적 경계조건으로 넘겨지는 연결부분이 존재한다.

잘 알려진 파단 판정론 중에서 가장 대표적인 최대 응력 이론, Tsai-Wu 이론, Hashin 이론에 의한 판정식들을 사용하였다. 적층 구조물의 연속적 파단 메카니즘으로, 요소별 단층 강성 저하법과 스프링 유사 모델을 채택하였다. 이러한 방법들이 유한요소법과 효율적으로 결합되도록, 컴퓨터 알고리즘을 구성하였다. 파단 현상의 종결은 전체 강성도 행렬의 행렬식 감소 상태를 추적함으로써 이루어졌다.

본 논문 이론의 타당성을 검증하고, 복합재 적층판의 파단 특성을 알아보기 위해 다양한 수치 계산 예를 제시하였다. 먼저 세 파단 판정식을 사용하여, 휨 하중을 받는 여러 적층판의 초기 강도 해석을 하였다. 다른 두 판정식과 비교해본 결과, Hashin 판별식은 적절한 초기 파단 하중, 파단 장소 및 모우드를 예측하였다. 마지막으로 연속적 파단 해석을 하였고, 최종 강도를 구하였다.

1. 서 론

최근에 들어서 고성능 항공기와 헬리콥터를 비롯한 항공우주 분야등의 구조물에 다양한 종류의 복합재료가 사용되고 있다. 중량비 강성과 강도 등의 역학적 특성들이 기존의 금속재료에 비해 우수하고, 특히 고유의 방향성을 이용한 예비설계 단계에서의 최적설계 적용이 가능하므로, 경량성과 경제성을 요구하는 고성능 구조물에의 응용범위가 확대일로에 있다. 더욱 광범위한 응용을 위해서는 다양한 하중 상태에서의 변형 특성에 대한 매우 정확한 해석 방법과, 안전성과 신뢰성에 바탕을 둔 설계과정이 필요하다. 극한설계의 입장에서는, 복합재 적층판의 최종 파단 강도를 정량화하는 공학적 해석과 이에 근거한 설계자료 확보가 절실한 실정이다. 그러므로 본 논문에서는 적층판에 관한 초기, 최종 파단 강도 및 강성 변화 예측에 관한 연구를 수행하였다.

이방성 재료에 대한 파단 판정식에 관해서는 1960년대 말에서부터 많은 고찰들이 있었다[1~4]. Sandhu[1]는 지난 50년에 걸쳐 개발된 파단 이론에 대해 간단히 정리하였다. Soni[2]가 행한 조사에 의하면 이 중 가장 많이 쓰이는 파단식으로는 최대

응력 이론, 최대 변형도 이론, Tsai-Hill 판정식, Hoffman 판정기준, Chamis 판정 기준, Tsai-Wu 판정 기준[5]을 들 수 있다. Hashin[6]은 섬유강화 복합재료의 파단 모우드와 이의 주원인이 되는 응력 성분을 찾기 위해, 각 모우드에 독립적인 모델을 세워, 파단 판별식을 이차식으로 근사시켰다. 이 밖에도 응력텐서의 3차항까지 포함시킨 파단 판정식에 대해 많은 검토가 있었다.

중요한 파단 현상인 층간분리에 대해서는 여러 각도에서 연구가 이루어져 왔으나, 아직도 발생 메카니즘이 명확히 밝혀져 있지 않다. Reifsneider등[7]은 층간 수직응력을 가지고 자유경계단에서의 층간분리 발생을 예측하였다. Harris와 Orringer[8]은 층간 전단응력들도 층간분리에 기여한다는 것을 보였다.

한편 복합재 적층판의 거동에 대한 연구는, 유한요소법과 더불어 많은 연구가 이루어져 왔다. 구조물에 사용되는 항공기 재료의 경우 두꺼운 판을 사용할 가능성이 증대되고 있는데, Kirchhoff 가정을 전제로 하는 고전 판이론은 전단변형을 무시함으로써 처짐을 과소 평가한다. 또한 복합재료는 전단 강성비가 작아서, 전단변형 효과의 영향이 두드러진다.

횡방향 전단변형을 포함한 판이론은 Reissner, Mindlin에 의해 연구되기 시작했으며, 1966년에 Yang, Norris와 Stavsky[9]는 이를 이방성 평판 문제로 확장하였다. 최근에는 전단변형 이론에 있어서 고차 이론에 대한 연구들이 활발히 진행되고 있다. 전단 변형을 고려한 평판을 유한요소법에 적용함에 있어서 C^0 연속조건만 만족하면 되므로, 현재는 널리 보편화되어 있다. 이때 얇은 판의 해석에 있어서는 shear locking 현상이 생기는데, 선택적 감소적분에 의해 개선된다.

유한요소법을 통하여 복합재료의 파단을 해석하는 연구로서, Reddy와 Pandey[10]는 판 요소와 여러 파단 판정식을 써서 초기 파단 하중에 대해 계산을 하였다. Ochoa등[11]은 고차 전단 판이론을 바탕으로 적층판의 최종 강도를 예측했다. Lee[12]는 3차원 탄성체 요소를 써서, 인장력을 받는 경우의 최종 파단을 해석하였다. 또 Irvine과 Ginty[13]는 파단 진전에 관해, 유한요소 코우드에 의한 수치 결과를 체계적인 실험 결과와 비교하였다. 최근에는 Hwang과 Sun[14]이 혼합장 반복법과 Newton-Raphson 반복법을 적용한 3차원 요소와 균열 선단 요소를 사용하여 복합재의 파단 현상을 묘사하였다.

그러나 이러한 일련의 연구들은 몇 가지 제한을 가지고 있다. 첫째로, 특수한 목적에 국한된 응력 해석법을 사용하고 있다. 예를 들어 층간분리 예측 시에는 자유경계단에서의 층간응력에만 초점을 맞추어서 이론을 전개하거나 유한요소 모델을 구성하므로, 적층판의 기하가 복잡해지면 해석하기가 곤란해진다. 둘째로는 파단 판정식의 인장과 압축 영역에서의 비대칭성을 고려한 이론 공식화가 미비하다는 점이다. 특히 휨 거동을 하는 경우, 일반적으로 인장 부분에서 먼저 파단이 일어나므로, 이후에는 적층 형상이 완전 비대칭이 된다. 따라서 대칭 적층을 가정하고 유도된 이론을 가지고는, 비록 대칭 적층 판일지라도, 휨 하중등을 받는 연속적 파단 해석에 무리가 뒤따르게 된다. 또한 비대칭 적층판 자체의 수치적 파단 강도 해석도 그리 많지는 않은 편이다.

이런 점들에 유의하여 본 논문에서는 일차 전단 변형 비대칭 적층 판이론을 이용하였고, 9절점 45 자유도 유한요소를 써서 적층판의 응력 해석을 하

였다. 자유경계단처럼 층간분리가 예상되는 부분의 층간응력 해석을 위하여, 18절점 54자유도의 탄성체 요소도 개발하였다.

단층의 파단 판정으로는 Hashin 판별식을 사용하여 초기 파단 발생에 대해 기존의 파단 이론과 비교·검토를 하였고, 층간분리를 예측할 수 있는 간단한 판정식도 추가하였다. 파단의 진행과정은 단층의 강성 저하와 스프링 유사 모델[15]로 묘사하였다. 적층각, 적층순서, 두께, 경계조건 등에 따른 파단 특성을 알아보기 위해, 위의 이론들을 코우드화하여 수치적 연구를 수행하였다. 본 논문에서의 연구 과정을 Fig.1에 정리하였다.

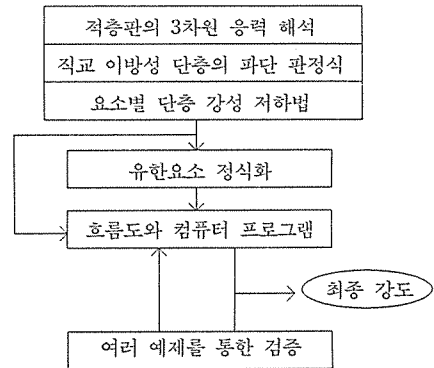


Fig. 1. Study Procedure for Failure Analysis of Composite Laminates

2. 복합재 적층판의 파단 이론

본 논문에서는 적층판의 파단을 “단층들의 연속적인 파단”이라는 거시역학적 접근 방법을 채택하였다.

2-1. 단층에서의 파단 발생 판정식

응용 범위에 따른 적절한 적층 이론과 구성방정식, 변형 또는 운동 기하학으로부터 구하여진 응력텐서로써 복합재 단층의 파단 기준이 공식화된다. 이 중 가장 대표적인 최대 응력 이론, Tsai-Wu이론[5], Hashin이론[6]을 정리하였다.

* 최대 응력 이론 (비간섭 판정식 ; MST)

$$\begin{aligned} -X_- < \sigma_1 < X_+ & \quad -S_T < \sigma_4 < S_T \\ -Y_- < \sigma_2 < Y_+ & \quad -S_L < \sigma_5 < S_L \\ -Y_- < \sigma_3 < Y_+ & \quad -S_L < \sigma_6 < S_L \end{aligned} \quad (1)$$

* Tsai-Wu이론 (간섭, 텐서 이차 판정식 ; T-W)

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (i, j=1, 2, \dots, 6) \quad (2)$$

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{X_+} - \frac{1}{X_-} \\ \frac{1}{Y_+} - \frac{1}{Y_-} \\ \frac{1}{Y_+} - \frac{1}{Y_-} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad [F_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{X_+ X_-} & \frac{-0.5}{\sqrt{X_+ X_- Y_+ Y_-}} & \frac{-0.5}{\sqrt{X_+ X_- Y_+ Y_-}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{Y_+ Y_-} & \frac{-1}{2Y_+ Y_-} & \frac{1}{Y_+ Y_-} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{S_T^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{S_L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{S_L^2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

SYM

Hashin은 응력의 회전 등방성 불변량들의 향으로 표현된 이차 파단 기준식을 제시하였다. 파단 모우드를 4가지로 나누어, 각각에 대해 파단 판정식을 세웠다.

* 인장 섬유 모우드(TF)와 압축 섬유 모우드(CF)

$$\begin{aligned} \sigma_1 &> 0 \\ (\sigma_1/X_+)^2 + (\sigma_5^2 + \sigma_6^2)/S_L^2 &= 1 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sigma_1 < 0 \quad \sigma_1 = -X_- \quad (5)$$

* 인장 기지 모우드(TM)와 압축 기지 모우드(CM)

$$\begin{aligned} \sigma_2 + \sigma_3 &> 0 \\ (\sigma_2 + \sigma_3)^2/Y_+^2 + (\sigma_4^2 - \sigma_2\sigma_3)/S_T^2 + (\sigma_5^2 + \sigma_6^2)/S_L^2 &= 1 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 + \sigma_3 &< 0 \\ (\sigma_2 + \sigma_3)[(Y_-/2S_T)^2 - 1]/Y_- + (\sigma_2 + \sigma_3)^2/4S_T^2 &+ (\sigma_4^2 - \sigma_2\sigma_3)/S_T^2 + (\sigma_5^2 + \sigma_6^2)/S_L^2 = 1 \end{aligned} \quad (7)$$

위의 이론을, σ_6/S_L 을 매개변수로 하여 T300/

943에 대해, $\sigma_1/X_+ - \sigma_2/Y_+$ 공간상에 도시한 것이 Fig.2이다. 위의 식들과 Fig.2에서 보듯이, MST는 모든 파단 모우드간에 상호영향이 없음을 알 수 있다. T-W이론은 상호영향이 너무 강하고, 식(3)에서 물리적으로 모순이 있다. 반면에 Hashin이론은 두 이론 사이의 중간적 성향을 가지고, 상호영향이 적절하다.

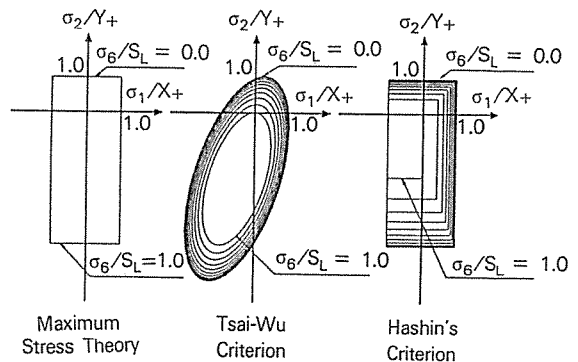


Fig. 2. Failure Envelopes in $\sigma_1/X_+ - \sigma_2/Y_+$ Space ($\sigma_6/S_L = 0.0, 0.1, 0.2, \dots, 1.0$)

적층판을 구성할 때의 중요한 문제점중 하나는 단층들 사이에서의 층간응력 발생이다. 인접층이 서로 다른 성질(탄성계수, 적층각 등)을 가질 때, 각각 독립적으로 변형하려는 경향을 보유하므로 층간응력이 생긴다. 특히 자유경계단 부근에서 큰 값을 나타내고, 층간분리를 야기한다. 층간분리에 관한 간단한 판정으로는, Lee[12]가 사용했던 식을 쓰기로 한다.

$$\sigma_3 = Z_D \quad (\sigma_4^2 + \sigma_5^2)^{1/2} = S_D \quad (8)$$

2-2. 적층판의 파단 진행모사

FPF 후에도 적층판은 더 높은 하중을 전달 수 있고 계속되는 파단을 예측하기 위해 추가적인 해석을 요구한다. 파단 진전의 근사법으로써 재료의 강성 저하량으로 단층의 손상 축적을 묘사한다. 휨 거동 시와 같이 층내 평면에서의 응력구배가 큰 경우에는 파괴가 일어나지 않은 부분의 강성까지를 조기에 평가절하할 위험이 있으므로, 유한요소별로 단층의 강성을 저하시켜 갈 것이다 (EPDM; Elementwise Ply Discount Method). 파단의 형태에 따른 강성

저하의 종류로 다음과 같은 3가지를 고려하여, 손상 영역을 특성화한다. Fig.3에 파단의 형태를 도시하였다.

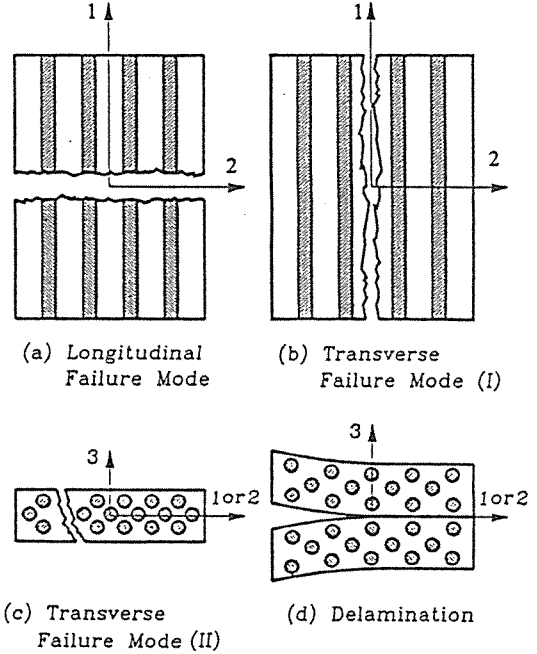


Fig.3. Schematic Representation of Various Failure Modes

* 섬유 모드 (종방향 파단 모드)

$$[C_{123}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

* 기지 모드 (횡방향 파단 모드)

$$[C_{123}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & 0 & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

* 층간분리 모드

$$[C_{123}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (11)$$

본 논문에서는 최종 강도 해석을 위한 파단 진행 모델로, 병렬연결 스프링 유사 모델을 고려한다 [15]. 이는 하중 조절(load-control) 실험에서의 파단 발생시에, 변위의 점프(jump) 현상과 강성도 저하 등을 정확히 설명할 수 있다.

복합재 적층판은 유한요소 정식화를 통해

$$[K]_{\langle i \rangle} \{U\} = [F] = k_{LF} \{F_o\} \quad (12)$$

의 선형방정식을 만족하는 거동을 한다. k_{LF} 는, 하중이 비례적으로 증가함으로써 도입된 하중배수이고, $\{F_o\}$ 는 단위하중이다. 해석의 첫번째 단계로서는

$$[K]_{\langle i \rangle} \{U\}_{\langle i \rangle 0} = \{F_o\} \quad (13)$$

에서 $\{U\}_{\langle i \rangle 0}$ 를 구한다. 단위응력 $\{\sigma_{123}\}_{\langle i \rangle 0}$ 를 계산하고 전체 계가 선형임을 고려하면, 하중이 $\{F\}$ 일 때의 응력은 $k_{LF}\{\sigma_{123}\}_{\langle i \rangle 0}$ 이다. 이 응력값을 요소 단층별로 판정식에 대입하면, 현재 $\langle i \rangle$ 강성 상태에서 파단이 일어나는 하중배수 $k_{LF\langle i \rangle}$ 와 파단 모우드를 구할 수 있다.

파단이 발생하였으므로 EPDM에 의해 파단이 발생한 요소 단층의 강성도 계수를 저하시켜서, 새로운 $[K]_{\langle i+1 \rangle}$ 을 조립하게 된다. 동일한 하중 레벨에서 다음 식을 얻는다.

$$[K]_{\langle i+1 \rangle} \{U\}_{\langle i \rangle} = [F]_{\langle i \rangle} = k_{LF\langle i \rangle} \{F_o\} \quad (14)$$

$\{U\}_{\langle i \rangle}$ 와 $\{\sigma_{123}\}_{\langle i \rangle}$ 를 가지고 다시 파단식을 대입하여, $[K]_{\langle i+1 \rangle}$ 과 $k_{LF\langle i \rangle}$ 하에서 파단 발생 여부를 판정한다.

이는 동일 하중 상태에서 평행상태 도달 여부를 조사하는 것이다(ESC ; Equilibrium State Checking). 만약 이 ESC과정에서 파단이 또 발생하면, 다시 EPDM과 유한요소 적분에 의해 $[K]_{\langle i+2 \rangle}$ 를 구성하고,

$$[K]_{\langle i+2 \rangle} \{U\}_{\langle i \rangle} = [F]_{\langle i \rangle} = k_{LF\langle i \rangle} \{F_o\} \quad (15)$$

를 풀어서 ESC과정을 계속 반복한다. ESC과정에서 더 이상의 파단 발생이 없으면, 식(12)로 되돌아가서 위의 전과정을 계속 반복하여 파단이 발생하는 하중배수 $k_{LF\langle i \rangle}$, $k_{LF\langle i+1 \rangle}$, $k_{LF\langle i+2 \rangle}$, ...을 구한다.

마지막으로 최종 단층 파단 LPF는 물리적으로 강체 운동 발생으로 정의되나, 수학적으로는

$$\det[K] = 0 \quad (16)$$

으로 정의를 내릴 수 있다. 실제로는 파단이 진전함에 따라 $\det[K]$ 가 조금씩 감소하다가, 어느 한계에 이르르면 급격히 감소하는 경향을 가진다(gross failure). 따라서 본 알고리즘에서는 적절한 공차를 도입하여 LPF 판정으로 다음 식을 사용하기로 한다.

$$\langle \text{System D.O.F.} \rangle \sqrt{\det[K]_{\langle i \rangle} / \det[K]_{\langle o \rangle}} \leq \text{TOL}_{LPF} \quad (17)$$

이상으로 FPF하중, LPF하중, 하중-변위 관계, 강성도 저하 등을 수치적으로 구함으로써, 복합재 적층판의 파단 과정에 관계된 역학적 변화를 묘사하게 된다.

예상되는 대표적인 하중-변위 관계를 Fig.4에 도시하였다.

$[K]$ 는 전체 강성도행렬이고, $[F]$ 는 전체 하중벡터이다.

본 해석에서는 Fig. 6처럼 각 절점에서 u_0, u_1, v_0, v_1, w_0 의 자유도를 갖는 9절점, 45자유도 등계수 유한요소를 사용한다. 좌표 성분과 변위, 회전은 다음과 같이 보간된다.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^9 h_{9k}(r, s) \langle x_k, y_k \rangle \quad (25)$$

$$\langle u_0, u_1, v_0, v_1, w_0 \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^9 h_{9k}(r, s) \langle u_{0k}, u_{1k}, v_{0k}, v_{1k}, w_{0k} \rangle \quad (26)$$

h_{9k} 는 9절점 Lagrange계 요소에 대한 형상함수이다.

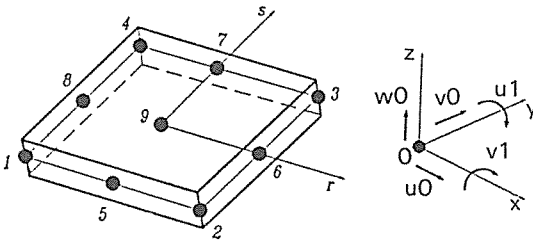


Fig. 6. 9-Node, Isoparametric Finite Element (Plate)

3-2. 3차원 탄성체의 유한요소 정식화

적층판을 3차원 탄성 고체로 이루어져 있다고 생각하자. 탄성체의 경계 S_3 은 평판 해석 결과로부터 기하학적 경계조건을 넘겨받는 연결부분이다.

$$u = \bar{u}_{PL}, \quad v = \bar{v}_{PL}, \quad w = \bar{w}_{PL} \quad \text{on } S_3 \quad (27)$$

S_2 와 S_3 상을 제외한 탄성체에 가상변위 $\delta u, \delta v, \delta w$ 를 적용하게 되면, 식(19)를 얻는다. 구성방정식으로 식(20)을 대입하면 다음 지배방정식을 얻는다. 하첨자 SO 는 탄성체임을 뜻한다.

$$[K]_{SO} \{U\}_{SO} = \{F\}_{SO} \quad (28)$$

$$[K]_{SO} = \iiint_V [B]^T [C] [B] dV \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \{F\}_{SO} = & \iiint_V [H]_{SO}^T \{f\} dV + \left(\iint_{S_T} [H_{S_T}]_{SO}^T \{\bar{\sigma}_T\} dS_T \right. \\ & \left. - \iint_{S_B} [H_{S_B}]_{SO}^T \{\bar{\sigma}_B\} dS_B \right) + \iint_{S_I} [H_{S_I}]_{SO}^T \{\bar{\sigma}_n\} dS_I \quad (30) \end{aligned}$$

유한요소로는 Fig. 7의 18절점, 54자유도 등계수 요소를 사용한다. 좌표 성분과 변위는 다음과 같이 보간된다. h_{18k} 는 18절점 Lagrange계 요소에 대한 형상함수이다.

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^9 h_{9k}(r, s) \langle x_k, y_k \rangle \quad (31)$$

$$z = z_B + (z_T + z_B)(\zeta + 1)/2$$

$$\langle u, v, w \rangle = \sum_{k=1}^{18} h_{18k}(r, s, \zeta) \langle u_k, v_k, w_k \rangle \quad (32)$$

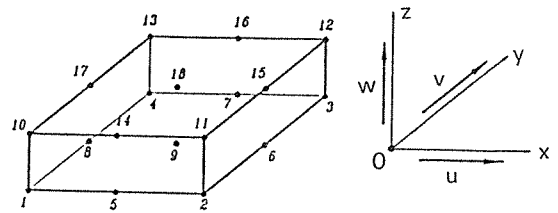


Fig. 7. 18-Node, Isoparametric Finite Element (Solid)

S_1 일부에 응력벡터가 영인 부분을 자유경계단이라 하는데 일차 전단변형 이론의 경우에는, 합력 N_n, N_{nt}, N_{nz} 와 합모멘트 M_n, M_{nt} 의 값이 경계조건에 대입된다. 따라서 자유경계단을 해석하려면 3차원 요소를 사용하여야 한다.

4. 수치계산 결과 및 검토

4-1. 프로그램의 검증과 층간응력 해석

유한요소 코우드의 검증을 위해, 복합재 적층판의 휨 거동 해를 엄밀해와 비교하였다. 요소수를 증가시키면서 수렴성 확인을 하였고, 두께비와 가로 세로비의 영향, 적용 범위를 알아보았다. 두께비가 20보다 작아지면 횡방향 전단효과가 두드러지고, 평판요소 결과가 고전 적층판 결과로부터 약간씩 벗어난다. 선택적 감소적분에 의해 shear locking 현상은 발생하지 않았다.

자유경계단에서의 층간응력 해석을 위해 Fig. 8과 같이, 인장하중 상태하의 적층판을 선택하였다. 단층 두께 t 는 0.125mm이고, 탄성계수는 다음과 같다.

$$E_1 = 138 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 14.5 \text{ GPa}$$

$$v_{12} = 0.21$$

$$v_{23} = 0.21$$

$$G_{12} = 5.86 \text{ GPa}$$

$$G_{23} = 5.86 \text{ GPa}$$

적층형상은 $[45/0/-45/90]_s$ 이고, $x = \pm 30\text{mm}$ 의 면에 $u_0 = \pm 1.0\text{mm}$ 변위를 가한다. ABAQUS와

Whitcomb, Raju[16] 결과와 비교하였다. Fig.9는 층간 전단응력 τ_{xz} 의 두께방향 변화이고, Fig.10은 경계단에 다가갈 때의 σ_z 를 도시한 것이다. 본 연구 결과가 보다 섬세한 층간응력구배를 보여주며, 이는 경계단에서의 세밀한 요소분할 때문이다. 구체적인 검증과정은 참고문헌[17]을 참고하기 바란다.

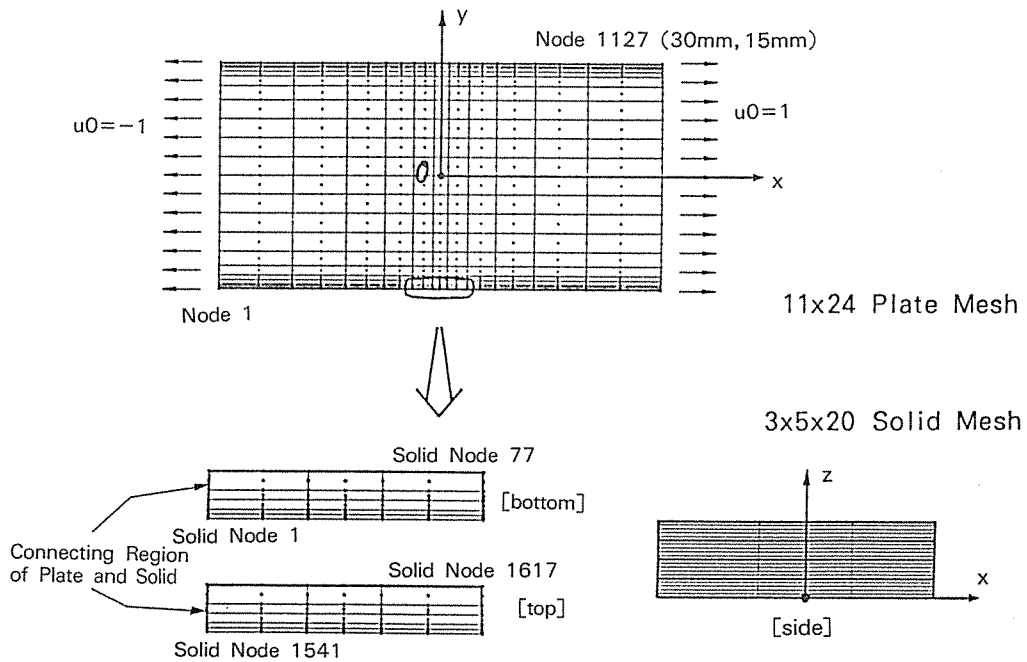


Fig.8. Finite Element Modeling of Plate and 3D Solid

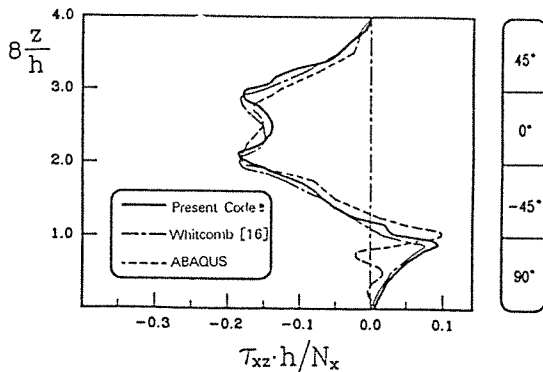


Fig.9. Through-The-Thickness Variations of τ_{xz} in $[45/0/-45/90]_s$

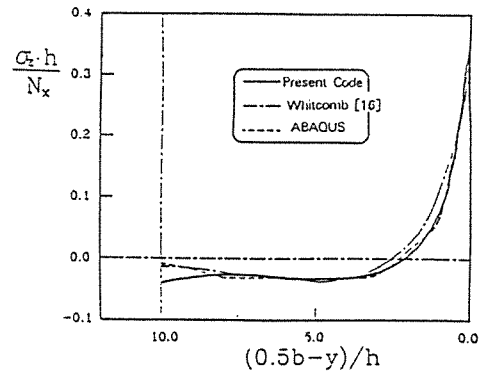


Fig.10. Through-The-Width Variations of σ_z in $[45/0/-45/90]_s$

4-2. 복합재 적층판의 초기 파단 강도 해석

직사각형 적층판의 휨 거동을 중심으로 FPF강도 해석을 하였다. 사용된 재료는 T300/5208이고, 역학적 특성치를 Tbl.1에 나타내었다. 복잡한 대칭 적층판 $[45/-45/90/0/45/90/-45/0]_s$ 를 선택하였고, $[\theta/-\theta/0/-\theta]_T$ 는 θ 를 0° 에서 90° 까지 변화시키면서, 반대칭 교차적층판의 예로 해석하였다. Fig. 11에는 윗면에서 균일 분포 압력을 받는 적층판의 기하와, 4변 단순지지된 경계조건을 도시하였다. 파단을 각 요소의 단층마다 18개($3 \times 3 \times 2$) Gauss 적분점에서 점점하였고, Reddy, Pandey[10] 결과와 비교하였다.

Tbl.2는 FPF하중 결과인데, Hashin판정은 최대 응력 이론과 비슷한 하중배수, 파단 위치, 파단 모우드를 제공하였고, Tsai-Wu이론은 약간 높은 값을 예고하였다. 더 많은 점에서 파단 발생을 판정하였으므로, Reddy의 결과보다 낮은 하중배수를 얻을 수 있었다. Hashin이론의 경우, 초기 파단후에 적층순서의 대칭성이 깨졌다. Fig. 12는 파단 하중배수 등고선을 Hashin이론에 의해 그린 것으로, Layer 1, 16의 중앙과 우상, 좌하 모서리가 가장 위험함을 가시화하였다.

$[\theta/-\theta/0/-\theta]_T$ 적층판에서 θ 에 따른 FPF값의 변화를 Fig. 13에 도시하였고, 90° 부근에서 가장 높은 값이 예측되었다.

Table 1. Properties of T300/5208 (Graphite/Epoxy) Composites

Elastic Moduli		Strength	
E_1	$19.2 \times 10^6 \text{ psi}$	X_+	$219.5 \times 10^3 \text{ psi}$
E_2, E_3	$1.56 \times 10^6 \text{ psi}$	X_-	$246.0 \times 10^3 \text{ psi}$
ν_{12}, ν_{13}	0.24	Y_+	$6.35 \times 10^3 \text{ psi}$
ν_{23}	0.49	Y_-	$6.35 \times 10^3 \text{ psi}$
G_{12}, G_{13}	$0.82 \times 10^6 \text{ psi}$	S_L	$12.6 \times 10^3 \text{ psi}$
G_{23}	$0.49 \times 10^6 \text{ psi}$	S_T	$9.80 \times 10^3 \text{ psi}$
두께	0.005 in	Z_D	$6.35 \times 10^3 \text{ psi}$
		S_D	$9.80 \times 10^3 \text{ psi}$

Table 2. FPF Load under Uniform Pressure in $[45/-45/90/0/45/90/-45/0]_s$

	REDDY[10]			PRESENT CODE **		
Mesh (Nc)	1 by 1(1)	2 by 2(4)	4 by 4(16)	2 by 2(1)	4 by 4(6)	8 by 8(28)
MST	22.176 $N_c, 16(2,2)^*$	21.816 $N_c, 16(2,2)$	20.367 $N_c, 16(2,2)$	16.597 1,1(3,3,1)TM 1,16(3,3,2)CM	18.889 1,1(3,3,1)TM 1,16(3,3,2)CM	19.403 1,1(3,3,1)TM 1,16(3,3,2)CM
T-W	20.028 $N_c, 16(2,2)$	21.479 $N_c, 16(2,2)$	20.133 $N_c, 16(2,2)$	17.302 1,1(3,3,1)	18.571 1,16(3,3,2)	17.117 1,16(3,3,2)
HAS				15.769 1,16(3,3,2)CM	18.711 1,16(3,3,2)CM	19.372 1,16(3,3,2)CM

* Load Factor(psi) / Element No., Ply No. (Gauss Pt.) Failure Mode

** Because of π -periodicity, corresponding element No. is omitted.

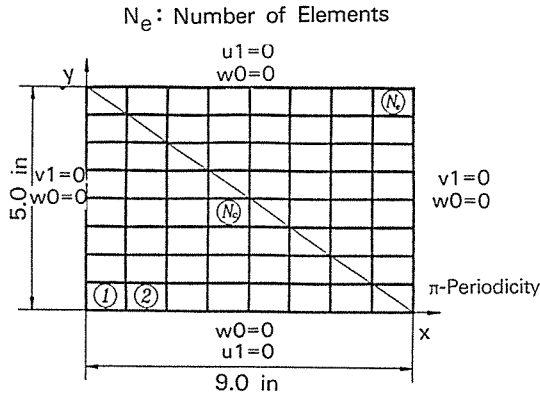


Fig. 11. The Simply-Supported Boundary Conditions

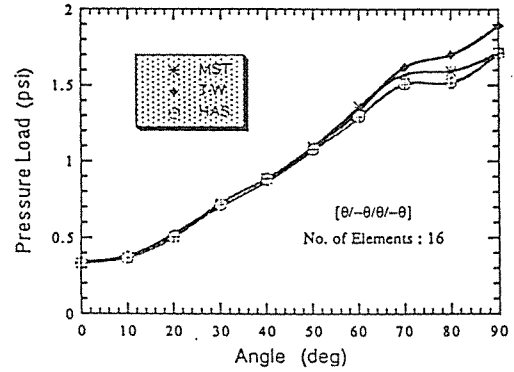


Fig. 13. FPF Load with Varying Lamination Angle in [$\theta/-\theta/\theta/-\theta$]_T

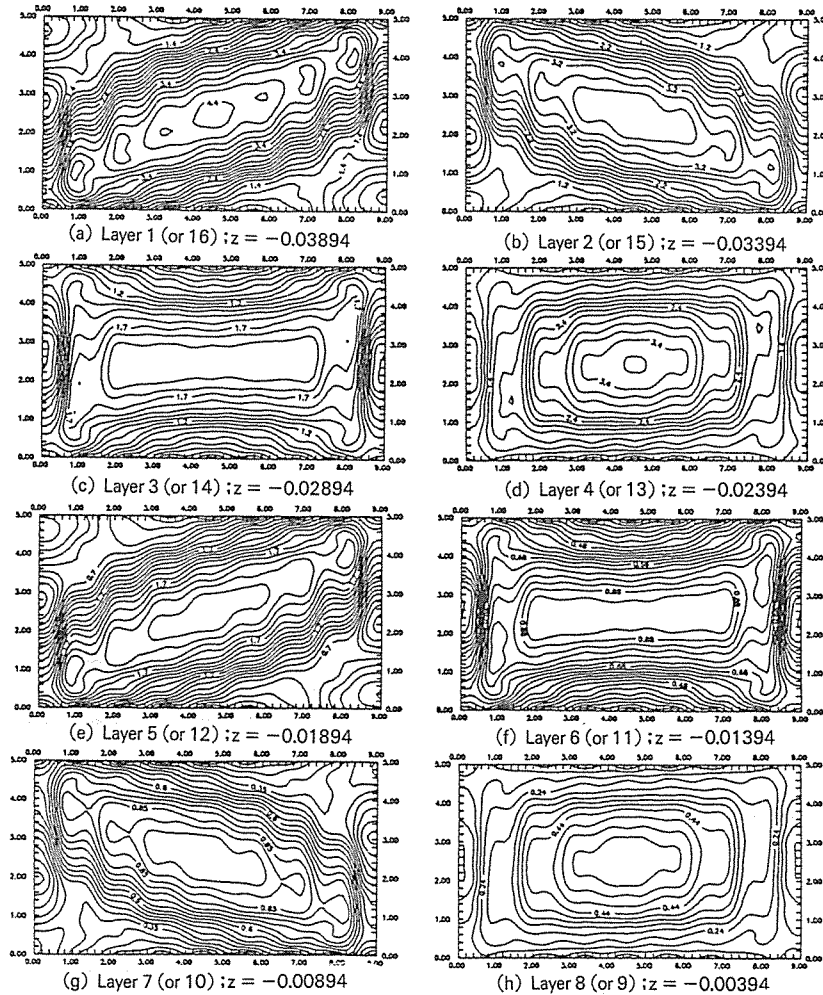


Fig. 12. Contour of $100 \times (\text{FPF Load Factor})^{-1}$ in [$45/-45/90/0/45/90/-45/0$]_s

4-3. 복합재 적층판의 최종 파단 강도 해석

FPF 해석시와 같은 조건하에서 적층판의 LPF강도 해석을 하였다. 파단 판정 이론으로는 Hashin의 판별식만 사용하였다.

Tbl.3에 정리된 결과를 보면 LPF하중은 FPF보다 3배 정도 높음을 알 수 있고, 양호한 수렴성을 보였다. Fig. 14는 파단이 진행될 때, 판 중앙에서의 w_0 와 하중배수, 강성도 저하량과의 관계이다. 첫 파단 발생후에도, 많은 요소와 단층에서 파단 발생과 평행상태 도달이 여러번 반복됨을 알 수 있다. 강성도가 차차 떨어지고, 52,010 psi까지 증가되면 평형에 도달하지 못하여 구조물이 완전 파괴됨을 시사하였다. Fig. 15는 파단 진행 과정을 시뮬레이션한 것이다. 파단 초기에는 대체적으로 각 단층에서 섬유방향으로의 기지 균열이 발행하였고, 파단 말기에는 섬유 수직방향으로 섬유가 뜰어져 나가는 경

향을 보여주었다.

Fig. 16은 $[\theta/-\theta/\theta/-\theta]_T$ 인 경우로, 90° 부근에서 FPF 하중이, 70° 부근에서 LPF하중이 가장 높았다. 또한 0° 와 90° 쪽으로 접근할수록 양 하중배수의 차이가 줄어들었다.

마지막으로 Fig. 17은 인장력을 받는 $[\theta/\theta/-\theta]_S$ 적층판에서의 예측 강도와 실험강도를 비교한 것이다. 실험 데이터는 참고문헌[2]에서 인용하였다. 적층판을 평판 요소로만 모델링한 경우 $\theta=15^\circ$ 부근을 제외하고는 실험값과 잘 일치하였다. $[15/0/-15]_S$ 적층판의 경우는 예측한 값이 45%나 높은 불일치를 보여, Fig. 8과 같은 혼합 모델을 사용하여 층간응력에 의한 파단 발생 여부를 조사하여 보았다. 그 결과 층간응력 성분 τ_{xz} 에 의해 $N_x/t=684\text{MPa}$ 부근에서 첫 파단이 발생함을 알 수 있었다. 이 수치 값은 탄성체 요소의 모델링 방법 (특히 자유경계단에서 요소의 촘촘함이나 평판 요소와의 연결부분 지정 방법)에 따라 다소의 차이를 보였다.

Table 3. Failure Strengths under Uniform Pressure in $[45/-45/90/0/45/90/-45/0]_S$

Mesh(Nc)	FPF (psi)	LPF (psi)
2 by 2(1)	15.718 *	46.593
	1,1 TM **	
	1,16 CM	
4 by 4(6)	18.646	51.284
	1,1 TM	
	1,16 CM	
8 by 8(28)	19.304	52.010
	1,1 TM	
	1,16 CM	

* Load Factor/Element No., Ply No. Failure Mode

** Because of π -periodicity, corresponding element No. is omitted.

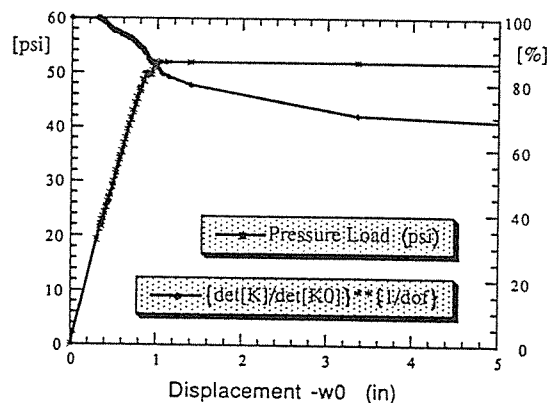


Fig. 14. Load-Stiffness-Displacement Relation in $[45/-45/90/0/45/90/-45/0]_S$
Displacement --- $-w_0$ at the Center
Stiffness --- $\{det[K]_i/det[K]_o\}$
** $\{1/system\ D.O.F.\}$

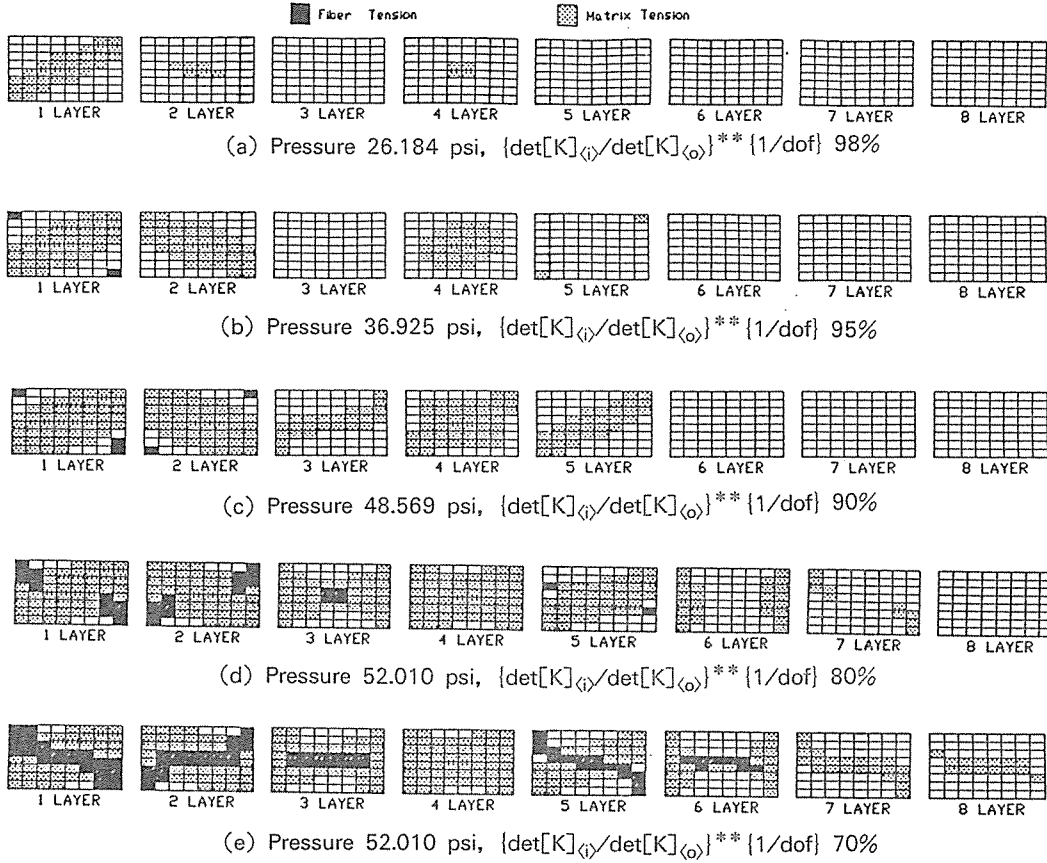


Fig.15. Simulations of Failure Propagation in $[45/-45/90/0/45/90/-45/0]_s$

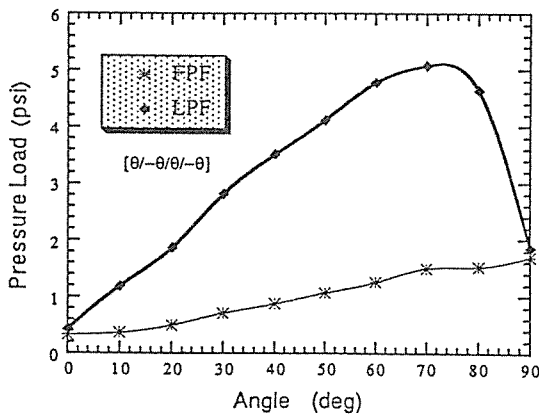


Fig.16. Failure Strengths with Varying Lamination Angle in $[0/-0/0/-0]_T$

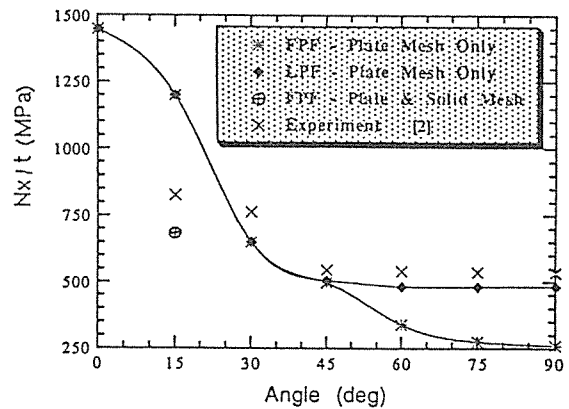


Fig.17. Failure Strengths under Uniform Tensile Loading in $[0/0/-0]_s$

5. 결 론

본 논문에서는 유한요소법을 이용하여 복합재 적층판의 초기 강도 및 최종 강도 예측에 관한 연구를 수행하였다. 이러한 연구 결과로서 얻을 수 있었던 사항을 정리하면 다음과 같다.

(가) 적층판의 응력 해석을 위하여 45자유도 평판 요소를 사용하였다. 전단변형 효과를 고려하였고, 임의의 비대칭 적층판까지 해석할 수 있도록 정식화하였다. 한편 자유경계단에서의 3차원 응력 해석을 위하여, 54자유도 탄성체 요소도 개발하였다. 이들 요소를 병합, 연결시켜 사용함으로써, 컴퓨터 계산 시간과 메모리 용량을 현저히 감소시켰다.

(나) 이 두 요소를 연결시켜 사용하여, 인장력을 받는 적층판 자유경계단에서의 층간응력 해석을 하였다. ABAQUS, 기존의 논문 결과와 비교해 본 결과, 매우 정확한 결과를 보여 주었다. 이 기법은 층간분리를 고려한 파단 해석에 유용하게 적용될 수 있을 것이다.

(다) 파단 판정론으로써 최대 응력 이론, Tsai-Wu 이론, Hashin이론을 선택하였다. 여러 적층 형상, 경계조건, 하중조건에 대해 초기 파단 해석을 하였다. 그 결과 세 이론 사이에 큰 차이는 없었고, Hashin 이론은 적절한 파단 하중, 파단 발생 위치, 파단 모양드를 제공하였다.

(라) 파단 진행 현상을 묘사하기 위해, 요소별 단층 강성 저하법과 스프링 유사 모델을 설정하였다. 이로 인해 적층판의 휨 거동시와 같이 응력구배가 큰 경우에도, 효율적인 반복해법을 통하여, 파단이 일어나는 과정과 최종 파단 강도를 계산할 수 있었다.

(마) 직사각형 적층판이 균일 압력 하중을 받는 경우는 단층의 중앙 또는 모서리 부근에서부터 파단이 시작되었다. 파단 초기에는 섬유 방향으로의 기지 균열이 관측되었고, 파단 말기에는 섬유에 수직 방향으로 섬유의 뜯어짐등이 발생하였다. 최종 강도는 경우에 따라, 초기 강도의 3~4배까지 되기도 하였다.

후 기

본 연구는 1991년도 국방과학연구소의 위탁연구비 지원으로 수행되었고, 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Sandhu, R.S. : "A Survey of Failure Theories of Isotropic and Anisotropic Materials", Technical Report, *AFFDL-TR-72-71*, 1972.
2. Soni, S.R. : "A New Look at Commonly Used Failure Theories in Composite Materials", 24th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conf., *AIAA/ASME/ASCE/AHS*, 1983, pp. 171-179.
3. Tsai, S.W. : "A Survey of Macroscopic Failure Criteria for Composite Materials", *J. Reinforced Plastics & Composites*, Vol.3, 1984, pp. 40-62.
4. 신의섭, 주진, 김승조, 이해경 : "복합재료의 거시역학적 파단판정식에 관한 고찰", 한국복합재료학회 추계학술 발표회 초록집, 1990, pp. 107-113.
5. Tsai, S.W. and Wu, E.M. : "A General Theory of Strength for Anisotropic Materials", *J. Composite Materials*, Vol.5, 1971, pp. 58-81.
6. Hashin, Z. : "Failure Criteria for Uniaxial Fiber Composites", *ASME J. App. Mech.*, Vol. 47, 1980, pp. 329-334.
7. Reifsnider, K.L. and Henneke, E.G. : "Delamination in Quasi-Isotropic Graphite Epoxy Laminates", *ASTM STP 617*, 1977, pp. 93-105.
8. Harris, A. and Orringer, O. : "Investigation of Angle-Ply Delamination Specimen for Interlaminar Strength Test", *J. Composite Materials*, Vol.12, 1978, pp. 285-299.
9. Yang, P.C., Norris, C.H., Stavsky, Y. : "Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates", *Int. J. Solids Structures*, Vol.2, 1966, pp. 665-684.
10. Reddy, J.N. and Pandey, A.K. : "A First

-Ply Failure Analysis of Composite Laminates", *Computer & Structures*, Vol.25, 1987, pp.371-393.

11. Ochoa, O.O. and Engblom, J.J. : "Analysis of Proressive Failure in Composites", *Composite Science and Technology*, Vol.28, 1987, pp. 87-101.

12. Lee, J.D. : "Three Dimensional Finite Element Analysis of Damage Accumulation in Composite Laminates", *Computers and Structures*, Vol.15, 1982, pp.335-350.

13. Irvine, T.B. and Ginty, C.A. : "Progressive Fracture of Fiber Composites", *J. Composite Materials*, Vol.20, 1986, pp.166-184.

14. Hwang, W.C. and Sun, C.T. : "Failure

Analysis of Laminated Composites by Using Iterative Three Dimensional Finite Element Method", *Computers & Structures*, Vol.33, 1989, pp.41-47.

15. Jones, R.M. : *Mechanics of Composite Materials*, Scripta Book Company, 1975.

16. Whitcomb, J.D. and Raju, I.S. : "Analysis of Interlaminar Stresses in Thick Composite Laminates with and without Edge Delamination", *Delamination & Debonding of Materials, ASTM STP 876*, 1985, pp.69-94.

17. 신의섭 : "복합재 적층판의 파단 강도 예측을 위한 유한요소 해석", 서울대학교 공학석사학위논문, 1992.