

論文

표면 손상을 입은 적층판의 강도 예측 및 분석

최덕현*, 황운봉**

Prediction and Analysis of Fracture Strength for Surface Flawed Laminates

D. H. Choi*, W. Hwang**

ABSTRACT

In this paper, the fracture strength of the surface damaged laminates was predicted by applying the fracture strengths of the unflawed and flawed laminates. For prediction, the theoretical equation about the fracture strength of laminates was simplified applying classical laminate theory and was applied to the surface damaged laminates. Lagace's and Tsai's experimental data were used for verifying the theoretical equation. Moreover, to verify the theoretical prediction, an experiment was performed. Surface unflawed laminate and flawed laminates were fabricated and the experiments were made and these results were compared with theoretical predictions. The specimens' fiber direction was same to the tensile direction and the theoretical predictions and the experimental results were showed good agreement. Therefore, by this equation, the fracture strength of structures made of composites will be able to be predicted when the surface of the structures was damaged.

초 록

본 논문에서는 표면 손상을 입은 적층판의 파괴 강도를 결함이 없는 적층판의 파괴 강도와 결함이 있는 적층판의 파괴 강도를 이용하여 예측하였다. 이를 위해 고전 적층판 이론을 적용하여 적층판의 파괴 강도식을 단순화했으며 이를 표면 손상을 입은 적층판에 적용하였다. 단순화한 적층판의 파괴 강도 이론식의 검증을 위해 Lagace와 Tsai의 논문에서 측정한 데이터를 이용하였다. 또한, 표면 손상을 입은 적층판의 파괴 강도 예측식의 검증을 위해 실험을 수행하였다. 실험을 위해 표면 결함이 없는 적층판과 표면 결함이 있는 적층판을 제작하여 실험하였으며 이 결과를 예측식과 비교하였다. 시편의 섬유 방향은 인장 방향과 같은 방향으로 제작되었으며, 예측식과 실험 결과는 잘 일치하였다. 따라서 본 논문에서 예측한 표면 결함이 있는 적층판의 파괴 강도 예측식을 이용하여 복합재료가 사용되는 구조물이 표면 손상이 되었을 때 이 구조물의 파괴 강도를 예측할 수 있을 것이다.

Key Words : 표면손상(Surface damage), 파괴강도(Fracture strength), 섬유방향(Fiber direction), 순차파괴(Gradual failure)

1. 서 론

산업이 발전함에 따라 기계산업 분야에서 새로운 재료에 대한 요구가 끊임없이 계속 되고 있다. 과거에 대부분의 산업에 사용되던 스틸과 같은 금속은 현재 다양한 엔지니어링 플라스틱이나 성능이 우수한 다른 금속으로 바뀌고

있다. 현재까지 개발된 재료 중 가벼우면서도 기존 재료의 강도를 유지하면서 특정 방향의 강도를 높일 수 있는 복합재료는 그 사용이 증가하고 있는 추세이다.

한편, 복합재료는 그 특성상 제품의 외관에 배치되기 때문에 사용 환경 및 시간에 따른 표면 손상은 불가피하다. 재료에 결함 있을 경우 응력 집중에 따른 강도 저하 모델

* 포항공과대학교 기계공학과 대학원

** 포항공과대학교 기계공학과, 교신저자(E-mail: whwang@postech.ac.kr)

은 많은 사람들에 의해 연구되어 왔다. 복합재료의 경우 Whitney와 Nuismer가 제시한 점 응력 조건이나 평균 응력 조건을 사용하여 응력 집중에 의한 강도 저하를 예측할 수 있다[1-3].

복합재료는 방향성을 가질 수 있기 때문에 특정 방향의 강도를 증가시킬 수 있다. 보통 섬유 방향과 섬유 방향에 수직인 방향의 강도는 10 배 이상 차이가 나기 때문에 높은 강도를 요구하는 방향으로 적층 방향을 조절함으로써 재료의 사용을 효율적으로 관리할 수 있을 뿐만 아니라 제품의 안전성을 확보할 수 있게 된다. 복합재료의 방향에 따른 강도는 최대 응력 조건이나 최대 변형률 조건 또는 Von Mises 조건을 사용한다[1-3].

본 연구에서는 적층판의 파괴 강도를 단순화했다. Tsai와 Wu는 스칼라 함수를 이용해 이방성 재료의 강도 예측식을 구하였다[4]. 그러나 본 연구에서는 고전 적층판 이론을 이용하여 중간면에 대칭인 적층판의 파괴 강도식을 단순화 하였다. 그리고, 적층판의 파괴 강도식의 검증에 위해 Lagace[5]의 실험 결과 및 Tsai[6]의 예측식과 비교하였다. 본 연구의 목표는 표면 손상된 적층판의 파괴 강도를 결함이 없는 적층판의 파괴 강도와 결함이 있는 적층판의 파괴 강도를 이용해 예측하고자 한다. 이를 위해, 단순화한 적층판의 파괴 강도식을 확장 시켰다. 또한, 이를 검증하기 위해 6장의 적층판 중 결함이 없는 시편 및 1장, 2장, 3장, 6장에 결함이 있는 적층판 시편을 제작하여 파괴 강도를 측정, 비교하였다.

2. 고전 적층판 이론을 이용한 중심면에 대칭인 적층판의 파괴 강도 이론식

2.1 고전 적층판 이론

고전 적층판 이론에서는 적층판의 파괴 강도 측정에 Fig. 1의 first-ply-failure에 대한 응력-변형률 그래프를 이용한다[3]. 적층판에 작용되는 힘과 모멘트는 식 (1)~(3)의 관계식을 이용하여 계산되며 식에서 N 과 M 은 하중과 모멘트를, ϵ^0 와 κ 는 중심면에서의 변형률과 곡률을, 그리고 A 와 B 및 D 는 변형된 강성 행렬이다. 만약 적층판이 대칭이라면 B 는 영행렬이 되며 적층판에 가해지는 힘은 ϵ^0 와 A 의 곱이 되고 최대 힘을 단면적으로 나누면 파괴 강도가 된다[3].

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}_{Total} = \sum_{n=1}^k \begin{Bmatrix} N^{(n)} \\ M^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix}_{Total} = \sum_{n=1}^k \begin{Bmatrix} \epsilon^{0(n)} \\ \kappa^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} N^{(n)} \\ M^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{(n)} & B^{(n)} \\ B^{(n)} & D^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon^{0(n)} \\ \kappa^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

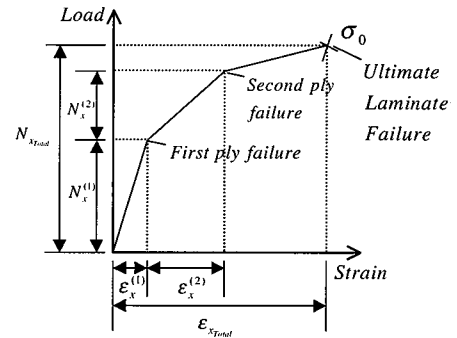


Fig. 1 Load-Strain Curve for Uniaxial Loaded Laminat.

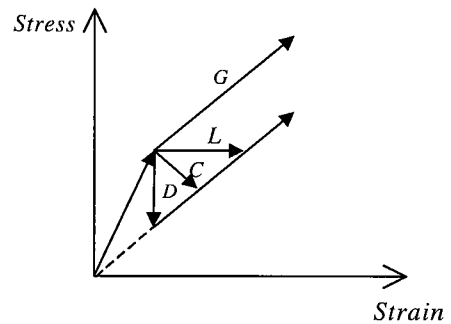


Fig. 2 Possible Stress-Strain Diagram.

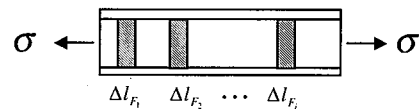


Fig. 3 Schematic Diagram of Local Fracture.

2.2 적층판의 파괴 강도식

적층판의 응력-변형률 그래프는 Fig. 2와 같이 4가지 모델이 가능하다[2]. 응력-변형률 곡선은 하중 제어일 경우 L , 변위 제어일 경우에는 D , 일반적으로는 C 와 같이 움직이며, 응력 완화를 고려하지 않을 때는 G 를 따른다. Tsai와 Hahn[6]은 적층판에 힘이 가해질 때 파괴 강도가 가장 낮은 층은 국부적으로 계속해서 파괴가 일어나면서 힘을 받기 때문에 적층판의 파괴 모델이 G 와 같을 것이라 하였다. Fig. 3은 국부적으로 파괴가 계속해서 발생하는 적층판의 개략적인 모형이다. 빗금 친 부분은 국부적으로 파괴가 일어나는 부분이고 흰색의 윗판과 아래판은 파괴가 일어나지 않은 경우이다.

따라서 고전 적층판 이론과 Gradual Failure 모델, G 를 이용하여 중심면에 대칭인 n 개의 각도로 만들어진 적층판의 파괴 강도식을 식 (4)처럼 단순화 할 수 있다.

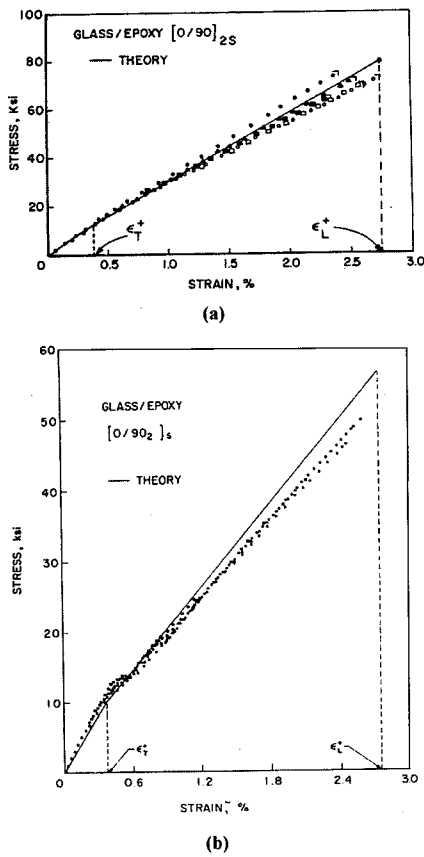


Fig. 4 Experimental and Theoretical Stress-Strain Curves by Hahn and Tsai[6] (a) [0/90]_{2s} (b) [0/90]_{2s}.

$$S_{xTotal} = \frac{1}{T_{total}} \left[\sum_{k=1}^{n-1} (K^{(k)} - K^{(k+1)}) \epsilon_k + K^{(n)} \epsilon_n \right] \quad (4)$$

$$K^{(k)} = A_{11}^{(k)} - \frac{A_{12}^{(k)2}}{A_{22}^{(k)}} \quad [A]^{(k)} = \sum_{p=k}^n T_p [Q]_p$$

식 (4)에서 A 는 Q 의 변환을 통해 계산되며, 적층판폭을 1, 두께를 1로 생각했을 때 T_{total} 은 총 적층판의 개수가 되며, T_p 는 P 번째 파괴되는 적층판의 개수가 된다. 식 (4)에서 반드시 지켜야 하는 것은 변형량의 순서이다. 파괴 변형량 ϵ_i 는 $\epsilon_j (i < j)$ 보다 작은 값이어야 한다. 위 식은 이런 규칙대로 변형량의 순서를 정했을 때의 적층판의 파괴 강도식이 된다.

2.3 적층판 파괴 강도식의 검증

앞에서 제시한 파괴 강도식의 검증을 위해 Lagace[5]와

Tsai[6]의 실험 데이터와 주어진 물성치를 파괴 강도식에 대입하여 비교해 보았다. Fig. 4는 Tsai의 실험 결과와 Tsai가 제시한 이론식을 비교한 그래프이다[6]. Fig. 4(a)에서 첫번째 적층판 파괴 응력은 약 14 ksi이고 두번째 적층판 파괴 응력은 약 79 ksi이다. Fig. 4(b)에서는 첫번째 적층판 파괴 응력은 약 10 ksi이고 두번째 적층판 파괴 응력은 약 55 ksi이다. Fig. 5는 본 연구에서 제시한 적층판 파괴 강도식을 통해 얻은 응력-변형률 그래프이다. Fig. 4와 Fig. 5에서 첫번째 적층판 파괴 응력과 두번째 적층판 파괴 응력이 잘 일치함을 알 수 있다.

Lagace[4]는 탄소섬유/에폭시에 대해 $[0 \pm \theta]_s(B1)$ 와 $[\pm \theta / 0]_s(A1)$ 그리고 $[+ \theta / 0 - \theta]_s(C1)$ 에 따른 적층판의 파괴 강도를 측정하였다. Table 1은 Lagace에 의해 측정된 실험의 평균값과 앞서 제시한 적층판의 파괴 강도식을 통해 계산된 각 경우의 파괴 강도이다. θ 방향의 적층판의 강도는 최대 응력 조건을 사용해 계산하였다. Lagace에 의해 측정된 실험치는 오차범위가 3~15 %이다.

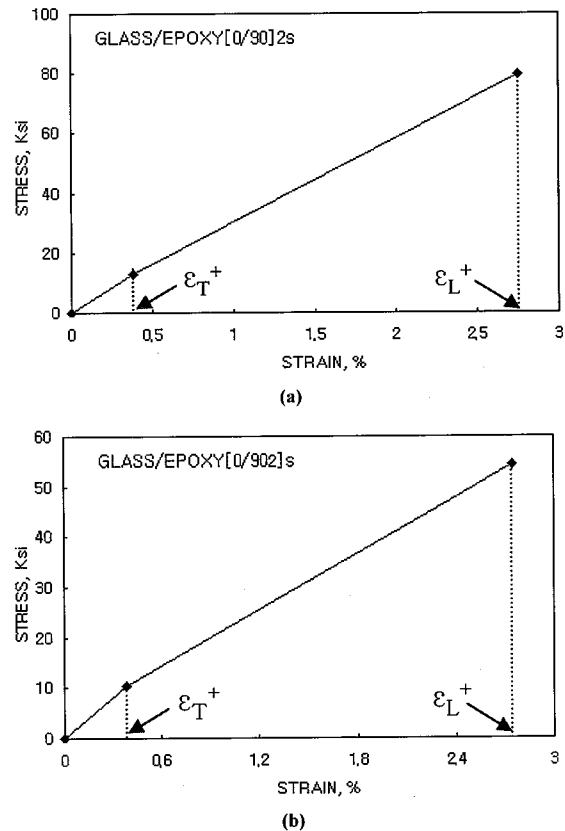


Fig. 5 Theoretical Stress-Strain Curves (a) [0/90]_{2s} (b) [0/90]_{2s}.

Table 1 Fracture Strengths for Each Case(MPa)

| Angle | $[0 \pm \theta]_s$ | $[\pm \theta 0]_s$ | $[+ \theta 0 - \theta]_s$ | Gradual |
|-------|--------------------|--------------------|---------------------------|---------|
| 15 | 1003 | 998 | 999 | 1082 |
| 30 | 945 | 855 | 918 | 896 |
| 45 | 787 | 732 | 730 | 659 |
| 60 | 814 | 698 | 585 | 605 |
| 75 | 733 | 672 | 549 | 593 |
| 90 | 732 | 679 | 561 | 591 |

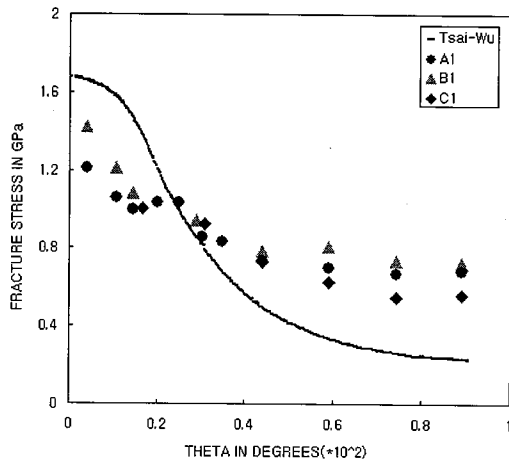


Fig. 6 Theoretical and Experimental Data for Fracture Strength of Graphite/Epoxy by Tsai & Wu and Lagace[5].

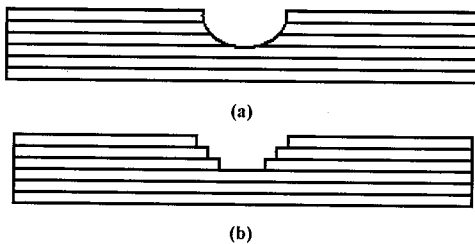


Fig. 7 Real model and Simplified Model for the Surface Damaged Laminate.

Table 1에서 Lagace의 실험 결과는 적층 순서에 따라 파괴 강도가 다르다. Lagace는 이를 적층 순서에 따라 층 사이에 작용하는 전단 응력과 박리의 차이 때문이라고 설명했다. 그러나 본 연구에서 제시하는 적층판의 파괴 강도식에서는 같은 각도로 이루어져 중심면에 대칭인 적층판의 강도는 같은 값으로 계산된다. 이는 고전 적층판 이론에서 대칭인 적층판에 대한 A는 각 경우에 대해 같은 값을 갖기 때문이다. Fig. 6은 Tsai와 Wu가 제시한 이방성 재료의

강도 예측식을 Lagace의 실험 결과와 비교한 그래프이다 [5]. 예측식의 그래프에서 보듯이 Tsai와 Wu가 제시한 이방성 재료의 강도 예측식에서도 같은 각도로 이루어져 대칭인 적층판의 파괴강도는 같은 값을 가진다. 또한 Fig. 6에서 적층 각도가 약 25°까지는 예측식이 실험 데이터보다 파괴강도가 높으며, 적층 각도가 약 25°보다 커지면 예측식이 실험 데이터보다 작게 계산되는 결과가 나타나고 있다[5]. 이는 Table 1의 결과와 잘 일치하고 있다. 따라서 본 연구에서 제시하는 적층판의 강도식은 Lagace의 실험 결과와 Tsai의 예측식과 경향이 유사하여 중심면에 대칭인 적층판의 파괴 강도를 예측하는데 적용될 수 있다.

3. 표면 손상을 입은 복합재료 적층판의 파괴 강도

3.1 표면 손상을 입은 적층판의 파괴 강도

표면 손상을 입은 적층판은 Fig. 7(a)와 같다. 이를 Fig. 7(b)처럼 반경이 다른 원형 결함으로 단순화 시키면 2장에서 유도된 적층판의 파괴 강도식으로부터 식(5)와 같이 m 개의 각도 층이 표면 손상을 입은 적층판의 파괴 강도 예측식을 세울 수가 있다. 식 (5)에서 T_{total} 및 K 그리고 ϵ 는 2장에서 정의한 것과 같다. 여기에서 σ_0 는 결함이 없는 층의 파괴 강도이고 σ_N 은 결함이 있는 층의 파괴 강도이다.

$$\sigma_y = \frac{1}{T_{total}} \left[\sum_{k=1}^{n+m-1} (K^{(k)} - K^{(k+1)}) \epsilon_k + K^{(n+m)} \epsilon_{n+m} \right]$$

$$K^{(k)} = A_{11}^{(k)} - \frac{A_{12}^{(k)2}}{A_{22}^{(k)}}, \quad \epsilon_k = \frac{\sigma_0}{E_\theta^{(k)}}, \quad \epsilon_n = \frac{\sigma_N}{E_\theta^{(n)}} \quad \text{where } E_\theta^{(k)} = E_\theta^{(h)} \quad (5)$$

$$[A]^{(k)} = \sum_{p=k}^{n+m} T_p [Q]_{\theta_p}, \quad \text{where } [Q]_{\theta_p}^{hole} = [Q]_{\theta_p}$$

2장에서 유도된 적층판의 파괴 강도식은 n 개의 각도 층이므로 $n-1$ 개까지 각 층이 파괴가 일어날 때의 변형률에 변형된 강성을 곱하여 더한 반면, m 개의 각도 층에 결함이 있을 경우 결함을 입은 층을 새로운 각도 층으로 생각하면 $(n+m-1)$ 개까지 더하여 식을 확장을 시킬 수 있다. 한편, 같은 방향의 층에 대해 결함이 없는 층과 결함이 있는 층의 강성은 서로 같으며 표면 손상에 따른 중심면에 대한 적층판의 대칭성은 유지된다고 가정하였다. $[Q]_\theta$ 는 주어진 강성을 변환 규칙에 따라 계산한다[1-3]. 또한 2장에서 정한 변형률의 순서 규칙을 반드시 지켜야 한다. 이때 각 변형률의 식(5)에서 정의한 것과 같이 파괴 강도를 강성으로 나눈 값이 된다. 따라서, 표면 결함이 있는 적층판의 파괴 강도는 결함이 없는 부분의 파괴 강도와 결함이 있는 부분의 파괴 강도로 측정될 수 있다.

4. 표면 손상을 입은 적층판의 파괴 강도 측정 실험

본 연구에서는 예측식을 검증하기 위해 실험을 수행하였다. 시편은 인장강도 2.2 GPa, 영률 140 GPa, 프와송비 0.31인 Dupont사의 Carbon Unidirectional Prepreg USN 125A를 사용하였으며 결함은 직경이 4.4 mm인 수공용 펀치를 사용하여 제작하였다. 결함이 없는 적층판의 강도 및 표면 결함이 있는 적층판의 강도를 측정하여 이를 이론 강도와 비교하여 예측식을 검증하였다.

4.1 실험 장비 및 실험 방법

본 연구에서는 Dupont사의 Carbon Prepreg 판을 사용하여 6장의 적층판에 원공 결함($d=4.4$ mm)이 없는 적층판 및 표면에서 1장, 2장, 3장 그리고 6장에 결함이 있는 적층판의 파괴 강도를 측정하였다. 측정 장비는 Shimadzu사의 UTM을 사용하여 5 mm/min의 속도로 파괴 강도를 측정하였다. Fig. 8은 실험 시편(3장에 원형 결함)의 개형이며 섬유 방향은 인장 방향과 같은 방향으로 제작하였다.

4.2 실험 결과 및 분석

실험을 통해 측정된 표면 손상된 적층판의 강도와 예측식으로 계산된 표면 손상된 적층판의 파괴 강도를 Fig. 9에 나타내었다. 그림에서 두 그래프는 잘 일치함을 알 수 있고, 따라서 본 연구에서 제시한 표면 손상된 적층판의 강도는 결함이 없는 적층판과 결함이 있는 적층판의 파괴 강도를 통해 예측이 가능함을 확인하였다.

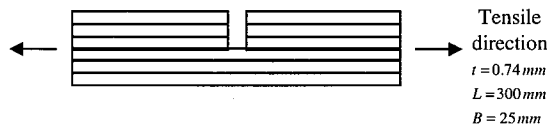


Fig. 8 Schematic Surface Damaged Laminate. (3 Holes)

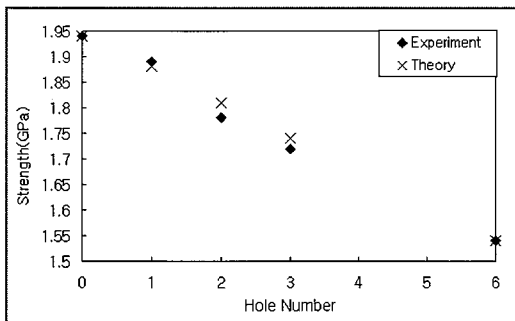


Fig. 9 Experimental and Theoretical Fracture Strength Graph.

5. 결 론

본 연구에서는 표면 손상된 적층판의 파괴 강도를 예측하기 위해 표면 손상이 없는 적층판의 파괴 강도식을 단순화하였고 이를 표면 손상된 적층판의 파괴 강도를 예측하기 위해 적용하였다. 표면 손상된 적층판의 파괴 강도식은 검증을 통해 적용 가능함을 알 수 있었고 따라서 표면 손상된 복합 재료 구조물이 손상되었을 때 위 식을 이용할 수 있을 것이다. 이를 정리하면 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

- 1) 중심면에 대칭인 적층판에 대한 파괴 강도식을 고전 적층판 이론을 적용하여 세웠다. 적층판의 파괴 강도 예측식은 각 적층판이 파괴 변형량에 도달했을 때의 변형량과 그 때의 강성을 곱하여 최종 파괴가 발생할 때까지 더한 것과 같다.
- 2) 적층판의 파괴 강도식에 대한 검증을 위해 Tsai의 예측식과 Lagace의 실험 결과와 비교하였다. 적층판의 파괴 강도식은 두 논문의 예측식 및 실험 결과와 잘 일치하였다.
- 3) 적층판의 파괴 강도식을 표면 손상된 적층판에 적용하여 표면 손상된 적층판의 파괴 강도 예측식을 세웠다. 예측식의 검증을 위해서 원공 결함이 있는 적층판을 사용하여 실험을 하였고 이 결과는 예측식의 계산값과 잘 맞았다.

참고문헌

- 1) B.D. Agarwal and L.J. Broutman, *Analysis and Performance of Fiber Composites*, Wiley-Interscience, 1980, pp. 183-222.
- 2) J.M. Whitney, *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*, Technomic, 1987, pp. 1-40.
- 3) R.F. Gibson, *Principles of Composite Materials Mechanics*, McGraw-Hill, 1994, pp. 43-269.
- 4) S.W. Tsai and E.M. Wu, "A Generalized Theory of Strength for Anisotropic Materials," *Journal of Composite Materials*, Vol. 5, 1971, pp. 58-80.
- 5) P.A. Lagace, "Static Tensile Fracture of Graphite/Epoxy," *Doctorate Thesis at the MIT*, 1982.
- 6) H.T. Hahn and S.W. Tsai, "On the Behavior of Composite Laminates After Initial Failures," *Journal of Composite Materials*, Vol. 7, 1973, pp. 102-117.

부 록

여기에서는 식 (4)의 유도과정을 소개한다. 고전 적층판 이론에서 중심면에 대칭인 등방성 적층판의 경우 연성 강성 행렬(coupled stiffness matrix)/ B 는 영행렬이 되고 확장 강성 행렬(extensional stiffness matrix)/ A 의 원소인 A_{16} 과 A_{26} 은 0이 되어 응력과 변형률 사이에는 식 (a.1)과 같이 되고 이 행렬을 전개하여 x 방향 응력과 변형률 성분의 관계식으로 정리하면 식 (a.2)처럼 된다.

$$\{N\} = [A]\{\epsilon\} \quad (a.1)$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{16} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$N_x = A_{11}\epsilon_x + A_{12}\epsilon_y$$

$$0 = A_{12}\epsilon_x + A_{22}\epsilon_y$$

$$\therefore \epsilon_y = -\frac{A_{12}}{A_{22}}\epsilon_x$$

$$N_x = \left(A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right) \epsilon_x = K \times \epsilon_x$$

$$\text{where } K = A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \quad (a.2)$$

따라서 n 개의 방향을 가진 적층판의 x 방향으로의 인장에 의한 파괴 응력과 변형률 그래프는 Gradual 모델인 경우에 Fig. a.1의 실선과 같이 나타낼 수 있고 응력 완화 모델인 경우 점선과 같이 나타낼 수 있다. 이 그림에서 각각의 기울기는 식 (a.2)에서의 K 가 된다.

본 논문에서는 Gradual 모델을 기본으로 식을 유도하였고 Gradual 모델은 응력이 완화되지 않고 계속 증가하는 모델이므로 응력 완화 모델에서의 완화된 응력을 모두 더해 주면 Gradual 모델에서의 파괴 응력을 계산할 수 있게 된다. Fig. a.1에서 완화된 응력을 순서대로 $\Delta N_1, \Delta N_2, \dots, \Delta N_n$ 라 하면 식 (a.3)처럼 되고 이를 통해 파괴 응력 N_{tot} 를 구하면 식 (a.4)처럼 된다.

$$\begin{aligned} \Delta N_1 &= K^{(1)}\epsilon_1 - K^{(2)}\epsilon_1 = (K^{(1)} - K^{(2)})\epsilon_1 \\ \Delta N_2 &= K^{(2)}\epsilon_2 - K^{(3)}\epsilon_2 = (K^{(2)} - K^{(3)})\epsilon_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (a.3)$$

$$\Delta N_n = K^{(n)}\epsilon_n - K^{(n+1)}\epsilon_n = (K^{(n)} - K^{(n+1)})\epsilon_n$$

$$\begin{aligned} N_{tot} &= \sum_{k=1}^{n-1} \Delta N_k + N_D \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (K^{(k)} - K^{(k+1)})\epsilon_k + K^{(n)}\epsilon_n \end{aligned} \quad (a.4)$$

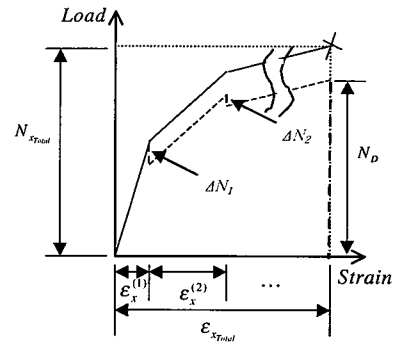


Fig. a.1 적층판의 응력-변형률 그래프.
(실선: Gradual 모델, 점선: 응력 완화 모델)

적층판의 폭을 1로 하고 적층판 두께를 1로 생각했을 때 총 적층판의 개수는 T_{total} 이 되며, T_p 를 P 번째 파괴되는 적층판의 개수라고 하면 식 (a.5)와 같이 파괴 강도식과 K 와 $[A]$ 의 관계식을 세울 수 있다.

$$\begin{aligned} S_{Total} &= \frac{1}{T_{total}} \left[\sum_{k=1}^{T-1} (K^{(k)} - K^{(k+1)})\epsilon_k + K^{(n)}\epsilon_n \right] \\ K^{(k)} &= A_{11}^{(k)} - \frac{A_{12}^{(k)2}}{A_{22}^{(k)}} \quad [A]^{(k)} = \sum_{p=k}^n T_p [Q]_p \end{aligned} \quad (a.5)$$