

論文

기능 경사 압전 세라믹 스트립의 균열에 관한 연구

신정우*, 김성찬**

The Crack Problem for Functionally Graded Piezoelectric Ceramic Strip

Jeong Woo Shin⁺, Sung Chan Kim⁺⁺

ABSTRACT

We consider the problem of determining the singular stresses and electric fields in a functionally graded piezoelectric ceramic strip containing a Griffith eccentric crack under anti-plane shear loading with the theory of linear piezoelectricity. Fourier transforms are used to reduce the problem to the solution of two pairs of dual integral equations, which are then expressed to a Fredholm integral equation of the second kind. Numerical values on the stress intensity factor and the energy release rate are obtained.

초 록

면외전단하중(anti-plane shear loading)을 받는 기능경사 압전 세라믹 무한 스트립(functionally graded piezoelectric ceramic strip)의 상하 양쪽 끝단의 중앙에 평행하게 존재하는 유한한 크기의 균열(Griffith crack)에 대한 특이응력(singular stress)과 전기장(electric field)을 선형 압전 이론(theory of linear piezoelectricity)을 이용하여 결정한다. 푸리에 변환(Fourier transform)을 이용하여 복잡적분 방정식을 구성하며, 이를 제2종 Fredholm 적분 방정식(Fredholm integral equation of the second kind)으로 표현한다. 또한 응력세기계수(stress intensity factor)와 에너지 해방률(energy release rate)에 대한 수치 결과를 제시하였다.

1. 서 론

1880년에 Curie 형제가 기계적 하중을 받으면 전하(charge)를 발생시키고 전기적 하중하에서는 응력(stress)을 발생시키는 압전 현상을 발견하였고, 압전 세라믹이 발견된 후 이는 작동기(actuator), 센서(sensor) 등의 다양한 공학 분야에서 널리 응용되고 있다. 기계적 하중과 전기적 하중이 동시에 작용하는 경우, 균열(crack)과 같은 내부 결함은 압전 재료를 이용한 장치의 성능에 미치는 영향이 크므로, 이에 대한 연구가 최근에 매우 활발히 진행되고 있다.

Deeg[1]은 무한압전재료(infinite piezoelectric body)의 파괴역학(fracture mechanics)적 문제를 이론적 관점에서 처음 소개하였다. Pak[2]은 기계적 전단하중과 전기적 평면 하중을 동시에 받는 무한한 크기의 압전재료에 존재하는 균열 선

단(crack tip)에서의 응력(stress)과 전기변위(electric displacement) 등의 엄밀해(closed form)를 복소 변수 방법(Complex variable approach)을 이용하여 구하였다. Shindo등[3,4]은 적분 변환법(integral transform method)을 이용하여 기계적 전단하중과 전기적 평면 하중을 동시에 받는 압전 세라믹 무한스트립(piezoelectric ceramic infinite strip)에 평행한 균열과 수직인 균열에 대한 해를 제시하였으며, Kwon과 Lee[5]가 유한한 크기의 사각형 모델에 대한 해를 제시하였다. 그러나 이와 같은 압전 재료는 모두 균질(homogeneous)하며, 기능 경사 압전 재료(functionally graded piezoelectric material)에 대한 해는 제시된 바가 없다.

본 연구에서는 선형 압전 이론(theory of linear piezoelectricity)을 이용하여 기계적 전단 하중(out-of-plane mechanical load)과 전기적 평면 하중(in-plane electrical load)을 동시에

*+ 한국항공우주연구원, 연구원, 교신저자(E-mail:jeongdal@kari.re.kr)

** 한국항공우주연구원, 선임연구원

받는 기능 경사 압전 세라믹 무한 스트립을 고려하고, 상하 양쪽 끝단의 중앙에 평행하게 존재하는 유한한 크기의 균열(Griffith crack)에 대하여 Gao와 Fan[6]이 제시한 전기적 도전 조건(contineous crack boundary condition)을 적용한 경우의 해를 적분 변환법을 이용하여 구하였다. 푸리에 변환(Fourier transform)을 이용하여 복합 적분 방정식(dual integral equation)을 구성하였으며, 이를 제 2종 Fredholm 적분 방정식(Fredholm integral equation of the second kind)으로 표현하여 해를 구하였다. 또한 응력세기계수(stress intensity factor)와 에너지 해방률(energy release rate)에 대한 수치 결과를 제시하였다.

2. 해석 모델의 수학적 표현

Fig. 1에 나타난 해석 모델과 같이 x축으로 무한한 비균질 압전 세라믹 스트립에 길이 2a의 균열이 상하(y축) 대칭되는 중앙에 위치하며, 기계적 전단 하중과 전기적 평면 하중이 동시에 작용하는 경우에 대해 고려하였다. 재료 물성치는 다음과 같이 가정한다.(Erdogan[7])

$$c_{44} = c_{44}^0 e^{\beta y} \quad (1)$$

$$d_{11} = d_{11}^0 e^{\beta y} \quad (2)$$

$$e_{15} = e_{15}^0 e^{\beta y} \quad (3)$$

여기서 c_{44} 는 탄성계수(elastic stiffness), e_{15} 는 압전 상수(piezoelectric constant), d_{11} 는 유전율(dielectric permittivity)을 의미한다. 또한 c_{44}^0 , d_{11}^0 , e_{15}^0 는 $y=0$ 에서의 재료 물성치 이고 $\beta (\geq 0)$ 는 비균질 재료상수(non-homogeneous material constant)이다.

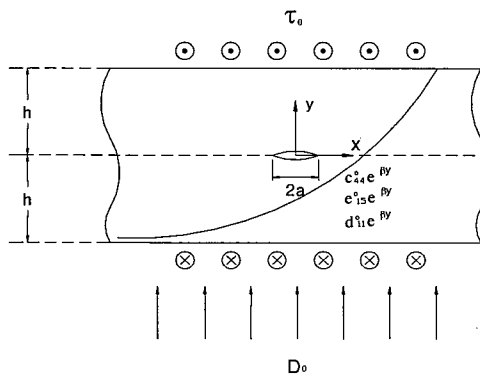


Fig. 1 A functionally graded piezoelectric ceramic strip with an eccentric crack : definition of geometry and loading.

Fig. 1에 보이는 바와 같이 균열은 가상의 접합면을 따라 놓여져 있으며 ($-a \leq x \leq a, y=0$), 접합면을 따라서는 재료 물성치가 일정하다. 모델의 형상과 작용 하중은 대칭성을 가지므로 $0 \leq x < \infty$ 의 영역에 대해서만 검토하였다.

압전 재료의 경계치 문제는 면의 전단 변위와 평면 전기장이 작용할 때로 단순화된다.

$$u_{xi} = u_{yi} = 0, \quad u_{zi} = w_i(x, y) \quad (4)$$

$$E_{xi} = E_{xi}(x, y), \quad E_{yi} = E_{yi}(x, y), \quad E_{zi} = 0 \quad (5)$$

여기서 u_{ki} 와 E_{ki} ($k=x, y, z$)는 각각 변위(displacements)와 전기장(electric fields)이다. 또한 하첨자 $i(i=1, 2)$ 는 모델의 위쪽 ($y \geq 0$)과 아래쪽 ($y \leq 0$) 영역을 나타낸다.

이 경우 구성방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{zji}(x, y) = c_{44} w_{i,j} + e_{15} \phi_{i,j} \quad (6)$$

$$D_{ji}(x, y) = e_{15} w_{i,j} - d_{11} \phi_{i,j} \quad (7)$$

여기서 σ_{zji} , D_{ji} ($j=x, y$), ϕ 는 각각 응력(stress), 전기변위(electric displacements), 전위(electric potential)를 나타낸다.

전단 하중하에서의 지배방정식은 다음과 같다.

$$c_{44} \nabla^2 w_i + e_{15} \nabla^2 \phi_i + \beta (c_{44} \frac{\partial w_i}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \phi_i}{\partial y}) = 0 \quad (8)$$

$$e_{15} \nabla^2 w_i - d_{11} \nabla^2 \phi_i + \beta (e_{15} \frac{\partial w_i}{\partial y} - d_{11} \frac{\partial \phi_i}{\partial y}) = 0 \quad (9)$$

여기서 ∇^2 은 2차원 라플라스 연산자(Laplace operator)이다.

본 모델에 대한 경계 조건은 다음과 같다.

$$\sigma_{zyi}(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x < a) \quad (10)$$

$$w_1(x, 0) = w_2(x, 0) \quad (a \leq x < \infty) \quad (11)$$

$$E_{x1}(x, 0) = E_{x2}(x, 0) \quad (0 \leq x < a) \quad (12)$$

$$\phi_1(x, 0) = \phi_2(x, 0) \quad (a \leq x < \infty) \quad (13)$$

$$\sigma_{yz1}(x, 0) = \sigma_{yz2}(x, 0) \quad (a \leq x < \infty) \quad (14)$$

$$D_{y1}(x, 0) = D_{y2}(x, 0) \quad (a \leq x < \infty) \quad (15)$$

$$\sigma_{yz1}(x, h) = \sigma_{yz2}(x, -h) = \tau_0 \quad (16)$$

$$D_{y1}(x, h) = D_{y2}(x, -h) = D_0 \quad (17)$$

여기서 τ_0 는 균일 전단 응력(uniform shear stress), D_0 는 균일 전기 변위(uniform electric displacement)를 의미한다.

3. 적분변환법을 이용한 해법

지배방정식 (8)과 (9)에 푸리에 변환을 적용하면 다음과 같은 해를 얻는다.

$$w_i(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{ A_{1i}(s) e^{q_1 y} + A_{2i}(s) e^{-q_2 y} \} \cos(sx) ds + a_{0i} e^{-\beta y} \quad (18)$$

$$\phi_i(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{ B_{1i}(s) e^{q_1 y} + B_{2i}(s) e^{-q_2 y} \} \cos(sx) ds - b_{0i} e^{-\beta y} \quad (19)$$

여기서

$$q_1 = \gamma - \frac{\beta}{2}, \quad q_2 = \gamma + \frac{\beta}{2} \quad (20)$$

$$\gamma = \sqrt{s^2 + \frac{\beta^2}{4}} \quad (21)$$

이며, $A_{ji}(s)$ 와 $B_{ji}(s)$ ($j=1, 2$)는 미지 함수(unknown function)이며, a_{0i} 와 b_{0i} 는 해석 모델의 상하 끝단에 작용하는 하중 조건(edge loading conditions)으로부터 결정되는 상수이다.

끝단 하중 조건 식 (16)과 (17)을 이용하면 관계식들로부터 a_0 , b_0 의 관계식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$a_{01} = a_{02} = \frac{e_{15}^0 D_0 + d_{11}^0 \tau_0}{\beta(c_{44}^0 d_{11}^0 + e_{15}^0{}^2)} \quad (22)$$

$$b_{01} = b_{02} = \frac{c_{44}^0 D_0 - e_{15}^0 \tau_0}{\beta(c_{44}^0 d_{11}^0 + e_{15}^0{}^2)} \quad (23)$$

문제를 간편하게 하기 위해, 미지의 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$A_{11}(s) + A_{21}(s) - A_{12}(s) - A_{22}(s) = 2D(s) \quad (24)$$

$$B_{11}(s) + B_{21}(s) - B_{12}(s) - B_{22}(s) = 2E(s) \quad (25)$$

식 (24), (25)와 끝단 하중 조건 식 (16)과 (17), 균열선상에서의 혼합 경계 조건 (10)~(13)을 사용하면 다음의 두 개의 복합 적분방정식(dual integral equation)을 구할 수 있다.

$$\int_0^\infty s F(s) \left[D(s) + \frac{e_{15}^0}{c_{44}^0} E(s) \right] \cos(sx) ds = \frac{\pi}{2} \frac{\tau_0}{c_{44}^0} \quad (0 \leq x < a) \quad (26)$$

$$\int_0^\infty D(s) \cos(sx) ds = 0 \quad (a \leq x < \infty) \quad (26)$$

$$\int_0^\infty s E(s) \sin(sx) ds = 0 \quad (0 \leq x < a) \quad (27)$$

$$\int_0^\infty E(s) \cos(sx) ds = 0 \quad (a \leq x < \infty) \quad (27)$$

여기서

$$F(s) = \frac{q_2}{s} \frac{2k}{k+1} \frac{1 - e^{-2\gamma h}}{1 + e^{-2\gamma h}} \quad (28)$$

$$k = \frac{q_1}{q_2} \quad (29)$$

식 (26)과 (27)의 해는 함수 $D(s)$ 와 $E(s)$ 를 다음과 같이 정의하여 구할 수 있다.

$$D(s) = \int_0^a \xi \Phi_1(\xi) J_0(s\xi) d\xi \quad (30)$$

$$E(s) = \int_0^a \xi \Phi_2(\xi) J_0(s\xi) d\xi \quad (31)$$

여기서 $J_0(s\xi)$ 는 영차 제1종 Bessel 함수(zero-order Bessel function of the first kind)이다.

식 (30)과 (31)을 식 (26)과 (27)에 대입하면, 함수 $\Phi_2(\xi) = 0$ 이며, $\Phi_1(\xi)$ 은 다음과 같은 제2종 Fredholm 적분방정식(Fredholm integral equation of the second kind)의 해가 된다.

$$\Phi_1(\xi) + \int_0^a K(\xi, \eta) \Phi_1(\eta) d\eta = \frac{\pi}{2} \frac{\tau_0}{c_{44}^0} \quad (32)$$

여기서

$$K(\xi, \eta) = \eta \int_0^\infty s \{F(s) - 1\} J_0(s\eta) J_0(s\xi) ds \quad (33)$$

식 (32)와 (33)을 무차원화 시키기 위하여 정의된 변수와 함수는 다음과 같다.

$$s = \frac{S}{a}, \quad \eta = aH, \quad \xi = aE, \quad \gamma = \frac{\Gamma}{a}, \quad \beta = \frac{B}{a}$$

$$\Phi_1(\xi) = \frac{\pi}{2} \frac{\tau_0}{c_{44}^0} \frac{\Psi(E)}{\sqrt{E}} \quad (34)$$

$$\Phi_1(\eta) = \frac{\pi}{2} \frac{\tau_0}{c_{44}^0} \frac{\Psi(H)}{\sqrt{H}}$$

식 (34)를 식 (32)와 (33)에 대입하면, 무차원화된 제2종 Fredholm 적분방정식을 구할 수 있다.

$$\Psi(E) + \int_0^1 L(E, H) \Psi(H) dH = \sqrt{E} \quad (35)$$

여기서

$$L(E, H) = \sqrt{EH} \int_0^\infty S \{F(S/a) - 1\} J_0(SH) J_0(SE) dS \quad (36)$$

$$F(S/a) = \frac{Q_2}{S} \frac{2K}{K+1} \frac{(1 - e^{-2\Gamma \frac{h}{a}})}{1 + e^{-2\Gamma \frac{h}{a}}} \quad (37)$$

$$Q_1 = \Gamma - \frac{B}{2}, \quad Q_2 = \Gamma + \frac{B}{2}, \quad K = \frac{Q_1}{Q_2} \quad (38)$$

$$\Gamma = \sqrt{S^2 + \frac{B^2}{4}} \quad (39)$$

파괴 역학(fracture mechanics)에서 다루어지는 응력세기 계수(stress intensity factor)의 개념을 다른 변수들에 대하여 확장하여 적용하면, 균열 부근에서의 세기 계수(intensity factor)들을 다음과 같이 정의하고 결정할 수 있다.

$$K^T = K_{III} = \tau_0 \sqrt{\pi a} \Psi(1), \quad K^S = \frac{\tau_0}{c_{44}^0} \sqrt{\pi a} \Psi(1) \quad (40)$$

$$K^D = \frac{e_{15}^0}{c_{44}^0} \tau_0 \sqrt{\pi a} \Psi(1), \quad K^E = 0$$

여기서 K^T 는 응력세기계수, K^S 는 변형률세기계수, K^D 는 전기변위세기계수, K^E 는 전기장세기계수를 의미한다.

면의 전단 하중을 받는 경우의 에너지 해방률(energy release rate)은 일반화된 J 적분 값과 동일하다는 연구 결과(Pak[2])를 이용하면, 균열 선단(crack tip)에서의 J 적분 결과식은 에너지 해방률 G 를 의미한다.

$$G = \frac{K^T K^S}{2} = \frac{\pi a}{2 c_{44}^0} \tau_0^2 \Psi^2(1) \quad (41)$$

에너지 해방률은 항상 양의 값이며, 기계적 하중의 제곱에 비례함을 알 수 있다.

4. 수치 결과 및 고찰

식 (35)로부터 균질한(homogeneous, $\beta=0$) 압전 세라믹 스트립에 대한 해를 구하면 Shindo등[4]의 해와 같음을 알 수 있다.

적분 변환법을 이용하여 구한 응력세기계수와 에너지 해방률에 대한 기계적 하중과 전기적 하중의 영향을 알아 보기 위해서 식 (35)과 (36)을 가우스 수치 적분(Gaussian quadrature)를 이용하여 수치적으로 계산하였다. 수치 해석을 위해 적용한 $y=0$ 에서의 압전 재료 물성치는 Table 1에 나와 있는 것과 같이 일반적으로 많이 사용되는 PZT-5H 세라믹으로 가정하였다.

Table 1 Material properties of piezoelectric ceramic at $y=0$

Properties	Symbol	Unit	
탄성계수	c_{44}^0	$\times 10^{10}$ N/m ²	2.3
압전 상수	e_{15}^0	C/m ²	17.0
유전율	ϵ_{11}^0	$\times 10^{-10}$ F/m	150.4
임계 에너지 해방률	G_{cr}	N/m	5.0

여기서 N (Newton)은 힘, C (coulomb)은 전하, V (volt)는 전압, m (meter)는 길이의 단위이다.

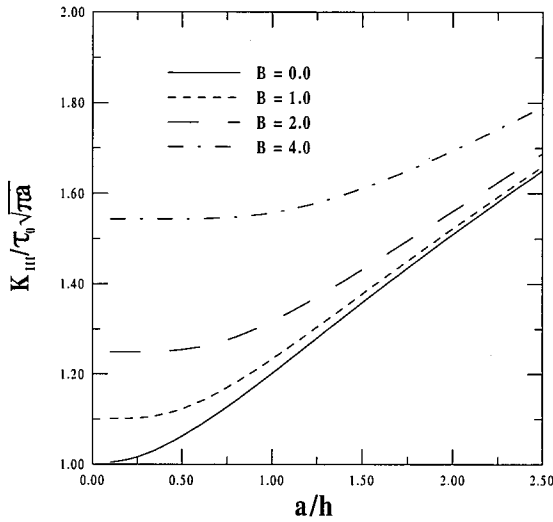


Fig. 2 Stress intensity factor $K_{III}/\tau_0\sqrt{\pi a}$ versus a/h with various values of B .

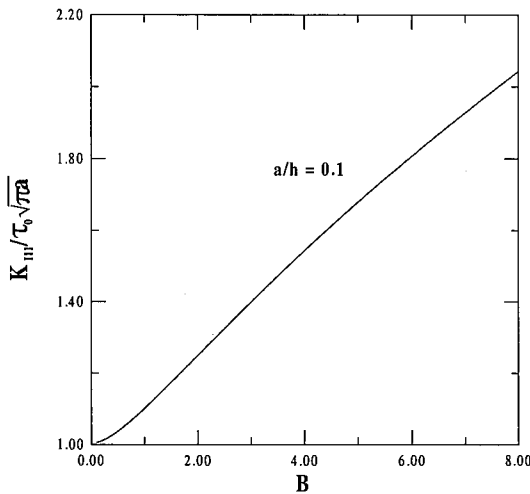


Fig. 3 Stress intensity factor $K_{III}/\tau_0\sqrt{\pi a}$ versus B at $a/h=0.1$.

Fig. 2는 무차원 균열 길이(a/h)에 대한 무차원 응력세기 계수(normalized stress intensity factor, $K_{III}/\tau_0\sqrt{\pi a}$)의 변화를 보여주고 있으며, Fig. 3은 무차원 비균질 재료상수(normalized nonhomogeneous material constant, B)에 대한 무차원 응력세기계수의 변화를 보여주고 있다. 무차원 응력세기계수는 무차원 균열 길이와 무차원 비균질 재료상수가 증가함에 따라 증가함을 알 수 있다.

Fig. 4는 무차원 균열 길이(a/h)에 대한 무차원 에너지

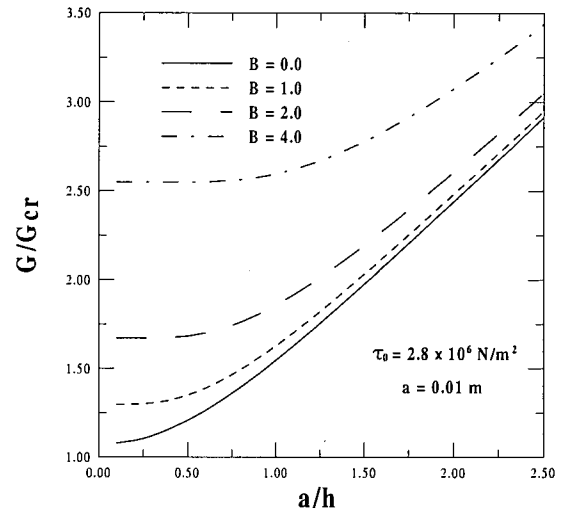


Fig. 4 Energy release rates G/G_{cr} versus a/h with various values of B ($2a=0.02$, $\tau_0=2.8\times 10^6\text{N/m}^2$).

해방률(normalized energy release rates, G/G_{cr})의 변화를 보여준다. 무차원 에너지 해방률 또한 마찬가지로 무차원 균열 길이와 무차원 비균질 재료상수가 증가함에 따라 증가함을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 선형 압전 이론을 이용하여 기계적 전단 하중과 전기적 평면 하중을 동시에 받는 기능 경사 압전 세라믹 무한 스트립에 존재하는 유한한 크기의 균열에 대하여 고려하였으며, 균열면의 전기적 도전 조건을 적용하여 각 세기 계수와 에너지 해방률을 결정하였다. 수치 해석을 이용한 결과는 해석 모델에 대한 응력세기계수와 에너지 해방률이 균열 길이와 비균질 재료 상수의 증가와 함께 증가함을 보였다. 또한 압전 재료에서도 에너지 해방률은 항상 양의 값이며, 기계적 하중의 증가에 비례한다는 것을 확인하였다.

참고문헌

- 1) W. F. Deeg, "The Analysis of Dislocation, Crack, and Inclusion Problems in Piezoelectric Solids," Ph. D. Thesis, Stanford University, Stanford, CA, 1980.
- 2) Y. E. Pak, "Crack Extension Force in a Piezoelectric Material," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, 1990,

pp. 647~653.

- 3) Y. Shindo, F. Narita and K. Tanaka, "Electroelastic Intensification Near Anti-Plane Shear Crack in Orthotropic Piezoelectric Ceramic Strip," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 25, 1996, pp. 65~71.
- 4) Y. Shindo, K. Tanaka and F. Narita, "Singular Stress and Electric Fields of a Piezoelectric Ceramic Strip with a Finite Crack Under Longitudinal Shear," *Acta Mechanica*, Vol. 120, 1997, pp. 31~45.
- 5) S. M. Kwon and K. Y. Lee, "Analysis of Stress and Electric Fields in a Rectangular Piezoelectric Body with a Center Crack Under Anti-Plane Shear Loading," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, 1999, pp. 4859-4869.
- 6) C. F. Gao and W. X. Fan, "A general solution for the plane problem in piezoelectric media with collinear crack," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 37, 1999, pp. 347-363.
- 7) F. Erdogan, "The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading," *ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, 1985, pp. 823-828.

이 대칭조건들로 인해 ε_{ij} 는 $u_{i,j}$ 로 쓸 수 있다.

육방정계(hexagonal crystal class)에 속하며, x_3 방향으로 분극(pole)되어 있는 가로 등방성(transversely isotropic) 압전 재료의 특정경우에 대하여 구성방정식은 다음의 형태를 갖는다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{zy} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{11}-c_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{zy} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}, \quad (A6)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{zy} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}. \quad (A7)$$

Appendix A

선형탄성 압전재료에 대한 구성 방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (A1)$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + d_{ik} E_k, \quad (A2)$$

여기서

$$E_k = -\phi_{,k}, \quad (A3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (A4)$$

이며, c_{ijkl} 은 일정한 전기장(electric field)에서 측정된 탄성 계수(elastic moduli), d_{ij} 는 일정 변형율에서 측정된 유전율(dielectric permittivity), e_{ikl} 은 압전상수(piezoelectric constant)이다.

재료 상수들에 대하여 일반적으로 성립되는 대칭성은

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{jilk} = c_{klij}, \quad e_{kij} = e_{kji}, \quad d_{ij} = d_{ji} \quad (A5)$$