

## 論文

포물선 형태의 균열열림변위를 사용한 직교 적층판의  
모재균열에 의한 강성저하 해석

이재화\* · 홍창선\*

**Analysis of Stiffness Reduction due to Transverse Cracks in Cross-Ply Laminates Using the Parabolically Assumed Crack Opening Displacement**

Jae-Hwa Lee\* and Chang-Sun Hong\*

**ABSTRACT**

A simple shear-lag method, taking into account the effect of crack opening displacement, is proposed for the analysis of stiffness reduction due to transverse cracks in cross-ply laminated composites. This method is based on the concept of interlaminar shear layer and a parabolic assumption for the crack opening displacement. The perturbed stress field due to transverse cracks is determined from the through-the-thickness integration of equilibrium equation. In this analysis, the traction free condition is satisfied on the transverse crack surfaces. The distribution of normal stress in transverse cracked ply is compared with previous finite element result. Experimental and predicted results for the stiffness reduction of laminates are in good agreement for various cross-ply laminated composites.

**초 록**

모재균열 열림변위의 영향을 고려하여 직교적층판의 모재균열에 의한 강성저하를 해석하기 위한 간단한 전단-지연방법을 제안하였다. 본 방법에서는 층간전단층 개념과 포물선 형태의 모재균열 열림변위 가정을 사용하였다. 평형방정식의 두께방향 적분식과 모재균열 면에서의 응력자유조건을 사용하여 모재균열 주위의 응력분포를 결정하였다. 제안된 방법의 타당성을 검토하기 위하여 파손층 하중방향 응력의 분포를 기존의 유한요소 해석결과와 비교하여 보았다. 제안된 방법에 의한 강성저하 예측결과를 실험결과와 비교하여 보았는데 다양한 직교 적층구조에 대해서 잘 일치하였다.

\* 정회원, 한국과학기술원 항공공학과

## 1. 서 론

복합재료 적층구조물의 초기손상은 섬유방향 강도(longitudinal strength)에 비해서 현저히 작은 횡방향 강도(transverse strength)로 인하여 모재 균열(transverse crack)이 발생, 증가하는 것이 일반적인 양상이다[1]. 복합재료 구조물의 특성인 적층구조에 의해서 모재균열이 최종파단을 즉시 유발하지는 않으나, 모재균열은 적층구조물의 강성을 저하시키고 균열선단에서 발생하는 층간응력(interlaminar stress)으로 인하여 층간분리(delamination)를 유기한다. 또한 모재균열은 열팽창 계수를 변화시켜서 치수불안정(dimensional instability) 문제 및 부식환경의 경로를 제공하여 강화 섬유의 부식문제 등을 유발하여서 구조물의 역학적 성능을 저하시킨다.

모재균열에 의한 구조물의 성능저하 중에서 거시적인 거동에 영향을 주는 적층판의 강성저하(stiffness reduction)를 예측하기 위하여 많은 연구가 수행되었다. 적층판의 강성저하를 예측하기 위해서는 모재균열 주위의 응력해석이 선행되어야 하므로 기존의 연구들은 응력해석 방법에 따라 전단-지연방법(shear-lag method), 근사탄성해방법(approximate elasticity method), 연속체 손상역학방법(continuum damage mechanics method)으로 구분할 수 있다.

근사탄성해방법[8, 9] 및 연속체 손상역학방법[10-12]은 수식화 과정이 복잡하고 실험에 의해서 결정해야 하는 상수가 많아서 강성저하 예측에 쉽게 적용하기가 어려우므로, 많은 연구가 비교적 간단한 전단-지연방법을 사용하였다[2-7]. 이 방법은 모재균열 주위에서 파손층( $90^\circ$ 층)으로부터 인접층( $0^\circ$ 층)으로 하중을 전달하는 층간전단응력(interlaminar shear stress)이 양 층의 변위차에 비례한다고 가정하여 간단한 평형방정식(equilibrium equation)으로부터 모재균열 주위의 응력분포를 구한다.

기존의 전단-지연방법은 층간전단응력과 양 층의 변위차 간의 비례상수인 전단상수(shear parameter)를 결정하는 방법에서 차이를 보이고 있다. 즉

층간전단층(interlaminar shear layer)을 고려한 방법, 임의의 전단상수를 사용한 방법, 파손층의 전단강성(shear modulus)을 사용한 방법으로 분류할 수 있다. 층간전단층을 고려한 방법[2-4]은 주된 전단변형(shear deformation)이 파손층과 인접층 사이의 모재과다(resin-rich) 영역에서 발생한다는 실험결과[2]에 근거하여 전단변형을 층간전단층에 한정된 방법이다. 이 방법에서는 층간전단층을 전단 스프링(shear spring)으로 가정하여 층간전단층의 전단강성과 두께의 비를 전단상수로 사용한다.

임의의 전단상수를 사용한 방법[5]은 임의로 가정한 전단상수를 실험에서 구한 초기 모재균열 발생하중으로부터 결정하는 방법인데 결정된 전단상수가 적층구조에 따라 변하고 있으며, 층간 파괴인성치(interlaminar fracture toughness) 자료가 추가로 필요하다. 파손층의 전단강성을 사용한 방법[6, 7]은 파손층 변위를 포물선형으로 가정하여 층간전단응력을 직접 구하는 방법인데, 결정된 파손층의 응력분포가 응력자유조건(stress free condition)을 만족시키지 못하고 있다.

기존의 전단-지연방법들은 모재균열의 열림변위(opening displacement)로 인한 모재균열 주위의 전단변형을 적절히 고려하지 못하여, 모재균열 주위에서 현저하게 나타나는 응력의 두께방향 변화를 묘사하지 못한다. 또한 변형상태를 너무 단순하게 가정하여서 변형이 심하게 구속되므로, 기존의 전단-지연방법으로 구한 파손층 하중방향 응력분포는 균열 간의 중앙에서 발생하는 최대응력에 매우 빨리 도달하고 있다. 초기 모재균열 발생하중의 예측에는 최대응력 부근의 응력분포가 중요하므로 기존의 전단-지연방법들이 효과적으로 이용되었다. 강성저하 예측에는 모재균열 주위에서의 응력분포가 중요하므로 파손층의 두께가 두꺼워져서 모재균열 열림변위의 영향이 커지는 경우에 기존의 전단-지연방법으로부터 예측한 강성저하는 실험결과에 비해서 작게 예측하게 된다. 모재균열에 의한 적층판의 강성저하를 정확하게 예측하기 위해서는 모재균열의 열림변위로 인한 변형을 적절히 고려할 수 있는 응력해석 방법이 필요하다.

본 연구에서는 모재균열 열림변위의 영향을 고려하여 모재균열이 있는 직교적층판(cross-ply laminate)의 강성저하를 해석하기 위한 간단한 전단-지연방법을 제안한다. 제안된 방법은 층간전단층 개념과 모재균열의 열림변위를 포물선(parabola) 형태로 가정한 변위장을 사용하였다. 평형방정식의 두께방향 적분식과 적절한 경계조건을 사용하여 지배방정식(governing equation)을 구하고, 지배방정식의 해에 모재균열면에서의 응력자유조건을 부과하여 모재균열 주위의 변위, 응력장을 구한다. 제안된 방법의 응력분포 결과를 기존의 유한요소 해석(finite element analysis) 결과와 비교하고, 적층판의 강성저하 예측결과를 실험결과와 비교하여 제안된 방법의 타당성을 검증하였다.

## 2. 모재균열 주위의 응력해석

다수의 모재균열이 발생한  $[0_n/90_m]$  적층구조의 형상을 Fig. 1과 같이 모형화(modelling) 하였다. 모재균열이  $2L$ 의 등간격으로 분포하고 있다고 가정하여 두개의 모재균열이 있는 단위구조(unit cell)

에 대하여 응력해석을 수행하였다. 참고문헌 [2]의 실험결과에 근거하여 기존의 전단-지연방법[3, 4]에서와 동일하게 층간전단층 개념을 사용하였으며, 하중조건은 외부하중(mechanical loading)과 적층구조 성형온도(curing temperature)와 실제 사용 온도 간의 차이로 인한 열하중(thermal loading)을 고려하였다.

수식화 과정에서 변위, 응력 등에 사용된 첨자 1, 2는 각각 파손층( $90^\circ$ 층)과 인접층( $0^\circ$ 층)의 성분임을 나타내며, 각 층의 기하학적인 상수 및 좌표축을 Fig. 1에 보였다. 해석에서 고려하는 각 층의 응력 및 변형상태와 해석에 필요한 재료상수(material properties)를 기존의 전단-지연방법[3, 4]과 본 연구에서 제안한 방법과 비교하여 Fig. 2에 보였다. 모재균열의 열림변위로 인하여 발생하는 파손층에서의 전단변형을 기존의 전단-지연방법에서는 전혀 고려하지 않고 있음을 알 수 있다.

파손층 및 인접층의 변위성분을 선형성분(linear component)과 모재균열로 인한 교란성분(perturbed component)의 합으로 가정하였다. 선형성분은 모재균열이 없는 적층판에서 외부하중과 열하중에

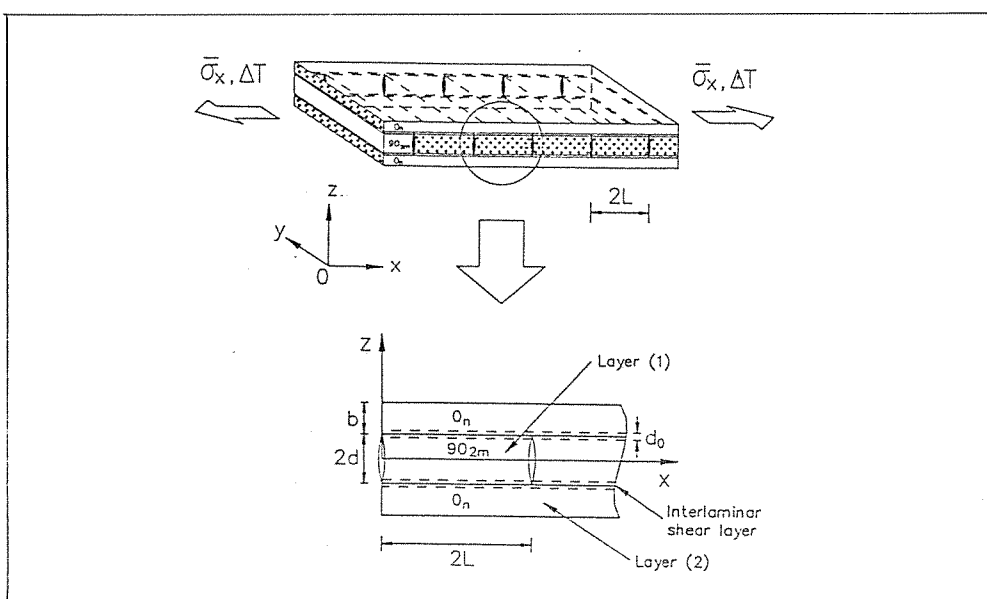


Fig. 1 Transverse cracked cross-ply laminate and analytical model.

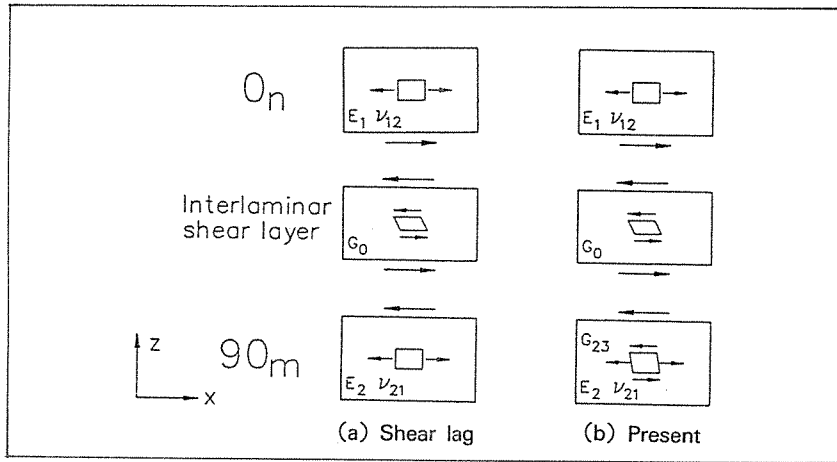


Fig. 2 Schematic diagram of analysis models .

의해서 나타나는 성분이다. 파손층에서의 교란성분은 중립면(mid-plane)에 대한 대칭을 고려하여 포물선 형태로 가정하였으며, 인접층에서의 교란 성분은 두께방향으로 일정하다고 가정하였다. 폭 방향 변위는 모재균열에 의해서 교란되지 않는다고 가정하였으며, 각 층의 두께방향 변위는 무시하였다. 각 변위성분은 식(1)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u_1(x, z) &= \varepsilon_{x0}x + \phi_{10}(x) + \phi_{11}(x) \left(\frac{z}{d}\right)^2 \\ v_1(y) &= \varepsilon_{y0}y \\ u_2(x) &= \varepsilon_{x0}x + \phi_{20}(x) \\ v_2(y) &= \varepsilon_{y0}y \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

여기서  $u, v$ 는 각각  $x, y$  방향의 변위성분이며,  $d$ 는  $90^\circ$ 층 두께의 절반이다. 하첨자 0가 있는 변형률 성분은 외부하중에 의한 변형률 성분과 열하중으로 인한 변형률 성분이며, 고전적층판이론(classical laminate theory)으로부터 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x0} &= \varepsilon_{x0}^M + \varepsilon_{x0}^T \\ \varepsilon_{y0} &= \left(-\frac{A_{12}}{A_{22}} \varepsilon_{x0}^M + \varepsilon_{y0}^T\right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

여기서 상첨자 M과 T는 각각 외부하중과 열하중에 의해서 발생한 성분임을 나타내며,  $A_{12}, A_{22}$ 는 적층판 강성행렬(laminate extensional stiffness matrix)의 성분이다.

가정된 변위성분으로부터 각 층의 변형률 성분은 다음의 식(3)과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(1)}(x, z) &= \frac{\partial u_1(x, z)}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^{(1)} = \frac{dv_1(y)}{dy}, \\ \gamma_{xz}^{(1)}(x, z) &= \frac{\partial u_1(x, z)}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (3) \\ \varepsilon_x^{(2)}(x, z) &= \frac{du_2(x)}{dx}, \quad \varepsilon_y^{(2)} = \frac{dv_2(y)}{dy} \end{aligned}$$

두께방향 변형과 인접층에서의 전단변형을 고려하지 않으므로 횡등방성(transversely isotropic) 재료에 대한 구성방정식(constitutive equation)으로부터 파손층 및 인접층의 응력-변형률 관계(stress-strain relation)는 식(4)와 같다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(1)} \\ \sigma_y^{(1)} \\ \tau_{xz}^{(1)} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{22} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} \\ \varepsilon_y^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(2)} \\ \sigma_y^{(2)} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(2)} \\ \varepsilon_y^{(2)} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

여기서  $Q_{ij}(i, j=1, 2)$ 는 복합재료 단층의 축소강성(reduced stiffness) 행렬의 성분이며,  $Q_{44}=G_{23}$ 이고  $G_{23}$ 는 횡등방성 평면에서의 전단강성이다.

층간전단층을 전단 스프링으로 가정하면 각 층의 인접면에서의 층간전단응력은 식(5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\tau(x) &= \frac{G_0}{d_0} [u_2(x) - u_1(x)]_{z=d} \\ &= \frac{G_0}{d_0} [\phi_{20}(x) - \phi_{10}(x) - \phi_{11}(x)]\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

여기서  $G_0$ ,  $d_0$ 는 각각 층간전단층의 전단강성 및 두께이다.

파손층과 인접층의 경계면에서의 전단응력 연속 조건(continuity condition)과 적층판 표면에서의 응력자유조건은 식(6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}z=d \text{에서 } \tau_{xz}^{(1)} &= \tau_{xz}^{(2)} = \tau \\ z=d+b \text{에서 } \tau_{xz}^{(2)} &= 0\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

여기서  $b$ 는 0°층의 두께이다.

변위장 가정으로부터 만족하여야 하는 평형방정식은 식(7)과 같다.

$$\frac{\partial \sigma_x^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(j)}}{\partial z} = 0 \quad (j=1, 2) \quad \dots\dots\dots (7)$$

평형방정식에 각 층의 변위성분 가정과 동일한 차수의  $\left(\frac{z}{d}\right)$ 를 곱하고 각 층의 두께방향으로 적분한다. 식(7)의 조건을 만족시키면서 부분 적분(integration by parts)하여 정리하면 식(8)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_0^d \sigma_x^{(1)} dz + \tau &= 0 \\ \frac{d}{dx} \int_0^d \sigma_x^{(1)} \left(\frac{z}{d}\right)^2 dz - \frac{2}{d} \int_0^d \tau_{xz}^{(1)} \left(\frac{z}{d}\right) dz + \tau &= 0\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \int_d^{d+b} \sigma_x^{(2)} dz - \tau = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

식(8)에 식(1), (3), (4), (5)를 대입하여 정리하면 식(9)와 같은 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$[A] \frac{d^2}{dx^2} \{\Phi\} + [C] \{\Phi\} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

여기서 각 행렬의 성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\{\Phi\} &= \{\phi_{10} \quad \phi_{11} \quad \phi_{20}\} \\ [A] &= \begin{bmatrix} Q_{22}d & \frac{Q_{22}d}{3} & 0 \\ \frac{Q_{22}d}{3} & \frac{Q_{22}d}{5} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{11}b \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (10) \\ [C] &= \begin{bmatrix} -\frac{G_0}{d_0} & -\frac{G_0}{d_0} & \frac{G_0}{d_0} \\ -\frac{G_0}{d_0} & -\frac{4G_{23}}{3d} - \frac{G_0}{d_0} & \frac{G_0}{d_0} \\ \frac{G_0}{d_0} & \frac{G_0}{d_0} & -\frac{G_0}{d_0} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

모재균열면에서의 응력자유조건 및 임의의 단면에서의 평형조건(equilibrium condition)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}x=0, 2L \text{에서 } \sigma_x^{(1)}(x, z) &= 0 \\ \text{임의의 단면에서 } \dots\dots\dots (11) \\ \int_0^d \sigma_x^{(1)}(x, z) dz + b\sigma_x^{(2)}(x) &= (d+b)\bar{\sigma}_x \\ &= d\sigma_{x0}^{(1)} + b\sigma_{x0}^{(2)}\end{aligned}$$

여기서 하첨자 0가 있는 응력은 모재균열이 없는 적층판에 대해서 외부하중과 열하중을 고려하여 고전적층판 이론으로부터 구한 성분이며,  $\bar{\sigma}_x$ 는 외부응력(mechanical stress)이다.

식(9)의 지배방정식과 식(11)의 경계조건으로부터 파손층 및 인접층의  $x$ 방향 변위성분은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 u_1(x, z) &= \varepsilon_{x0}x + \frac{\sigma_{x0}^{(1)}}{Q_{22}} \left[ \alpha_2(-\beta_3 e^{\lambda_2 x} + \beta_4 e^{-\lambda_2 x}) - \alpha_1(-\beta_1 e^{\lambda_1 x} + \beta_2 e^{-\lambda_1 x}) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{z}{d}\right)^2 \{ \zeta_1 \alpha_1(-\beta_1 e^{\lambda_1 x} + \beta_2 e^{-\lambda_1 x}) - \zeta_3 \alpha_2(-\beta_3 e^{\lambda_2 x} + \beta_4 e^{-\lambda_2 x}) \} \right] \quad \dots\dots\dots (12) \\
 u_2(x) &= \varepsilon_{x0}x - \frac{d\sigma_{x0}^{(1)}}{bQ_{11}} \left[ \alpha_1 \left( \frac{\zeta_1}{3} - 1 \right) (-\beta_1 e^{\lambda_1 x} + \beta_2 e^{-\lambda_1 x}) + \alpha_2 \left( 1 - \frac{\zeta_3}{3} \right) (-\beta_3 e^{\lambda_2 x} + \beta_4 e^{-\lambda_2 x}) \right]
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{\zeta_3}{\lambda_1(\zeta_1 - \zeta_3)}, \quad \alpha_2 = \frac{\zeta_1}{\lambda_2(\zeta_1 - \zeta_3)} \\
 \beta_1 &= \frac{1 - e^{-2\lambda_1 L}}{e^{2\lambda_1 L} - e^{-2\lambda_1 L}}, \quad \beta_2 = \frac{e^{2\lambda_1 L} - 1}{e^{2\lambda_1 L} - e^{-2\lambda_1 L}} \quad \dots\dots\dots (13) \\
 \beta_3 &= \frac{1 - e^{-2\lambda_2 L}}{e^{2\lambda_2 L} - e^{-2\lambda_2 L}}, \quad \beta_4 = \frac{e^{2\lambda_2 L} - 1}{e^{2\lambda_2 L} - e^{-2\lambda_2 L}}
 \end{aligned}$$

식 (12), (13)에서  $\pm \lambda_1$ ,  $\pm \lambda_2$ 는 식(14)와 같은 고유치(eigenvalue) 문제의 고유치이며,  $\zeta_i$ 는 고유벡터(eigenvector)의 성분이다. 즉 고유치가  $\pm \lambda_1$  일때의 고유벡터는  $\{1 - \zeta_1 \zeta_2\}$ 이고, 고유치가  $\pm \lambda_2$  일때의 고유벡터는  $\{1 - \zeta_3 - \zeta_4\}$ 이다.

$$\lambda^2 \{I\} + [A]^{-1}[C] = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

파손층 및 인접층의 응력성분은 식(12)의 변위 결과와 식(3), (4) 및 고전적층판 이론으로부터 식 (15)와 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^{(1)}(x, z) &= \sigma_{x0}^{(1)} \left[ 1 + \alpha_1 \lambda_1 (\beta_1 e^{\lambda_1 x} + \beta_2 e^{-\lambda_1 x}) - \alpha_2 \lambda_2 (\beta_3 e^{\lambda_2 x} + \beta_4 e^{-\lambda_2 x}) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{z}{d}\right)^2 \{ \zeta_3 \alpha_2 \lambda_2 (\beta_3 e^{\lambda_2 x} + \beta_4 e^{-\lambda_2 x}) - \zeta_1 \alpha_1 \lambda_1 (\beta_1 e^{\lambda_1 x} + \beta_2 e^{-\lambda_1 x}) \} \right] \\
 \sigma_y^{(1)}(x, z) &= \sigma_{y0}^{(1)} + \frac{Q_{12} \sigma_{x0}^{(1)}}{Q_{22}} \left[ \alpha_1 \lambda_1 (\beta_1 e^{\lambda_1 x} + \beta_2 e^{-\lambda_1 x}) + \alpha_2 \lambda_2 (\beta_3 e^{\lambda_2 x} + \beta_4 e^{-\lambda_2 x}) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{z}{d}\right)^2 \{ \zeta_3 \alpha_2 \lambda_2 (\beta_3 e^{\lambda_2 x} + \beta_4 e^{-\lambda_2 x}) - \zeta_1 \alpha_1 \lambda_1 (\beta_1 e^{\lambda_1 x} + \beta_2 e^{-\lambda_1 x}) \} \right] \\
 \tau_{xz}^{(1)}(x, z) &= \frac{2G_{23} \sigma_{x0}^{(1)}}{dQ_{22}} \left(\frac{z}{d}\right) \left[ \zeta_1 \alpha_1 (-\beta_1 e^{\lambda_1 x} + \beta_2 e^{-\lambda_1 x}) - \zeta_3 \alpha_2 (-\beta_3 e^{\lambda_2 x} + \beta_4 e^{-\lambda_2 x}) \right] \\
 &\quad \dots\dots\dots (15) \\
 \sigma_x^{(2)}(x) &= \sigma_{x0}^{(2)} + \frac{d\sigma_{x0}^{(1)}}{b} \left[ \alpha_1 \lambda_1 \left( \frac{\zeta_1}{3} - 1 \right) (\beta_1 e^{\lambda_1 x} + \beta_2 e^{-\lambda_1 x}) + \alpha_2 \lambda_2 \left( 1 - \frac{\zeta_3}{3} \right) (\beta_3 e^{\lambda_2 x} + \beta_4 e^{-\lambda_2 x}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\sigma_y^{(2)}(x) = \sigma_{y_0}^{(2)} + \frac{dQ_{12}\sigma_{x_0}^{(1)}}{bQ_{11}} \left[ \alpha_1 \lambda_1 \left( \frac{\zeta_1}{3} - 1 \right) (\beta_1 e^{\lambda_1 x} + \beta_2 e^{-\lambda_1 x}) + \alpha_2 \lambda_2 \left( 1 - \frac{\zeta_3}{3} \right) (\beta_3 e^{\lambda_2 x} + \beta_4 e^{-\lambda_2 x}) \right]$$

### 3. 적층구조 강성저하

#### 3-1. 강성저하 평가식

응력해석에서 결정된 인접층의 변위로부터 적층 구조의 강성저하 평가식을 유도할 수 있다. 모재 균열밀도(transverse crack density)  $1/2L$ 을 갖는 적층구조가 외부하중과 열하중을 받고 있을 경우에 적층구조의 평균 변형률은 식(16)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{\epsilon}_x = \frac{1}{L} \int_0^L \left( \frac{du_2}{dx} \right) dx \quad \dots\dots\dots (16)$$

(16)식에 식(12)를 대입하면  $\bar{\epsilon}_x$ 는 식(17)과 같이 표현된다.

$$\bar{\epsilon}_x = \epsilon_x^M(L) + \epsilon_x^T(L) \quad \dots\dots\dots (17)$$

여기서

$$\begin{aligned} \epsilon_x^M(L) &= \epsilon_{x_0}^M + \frac{d\sigma_{x_0}^{(1)M}}{bQ_{11}} f(L) \\ \epsilon_x^T(L) &= \epsilon_{x_0}^T + \frac{d\sigma_{x_0}^{(1)T}}{bQ_{11}} f(L) \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(L) &= \alpha_1 \left( \frac{\zeta_1}{3} - 1 \right) [\beta_1 (e^{\lambda_1 L} - 1) + \beta_2 (1 - e^{-\lambda_1 L})] \\ &+ \alpha_2 \left( 1 - \frac{\zeta_3}{3} \right) [\beta_3 (e^{\lambda_2 L} - 1) + \beta_4 (1 - e^{-\lambda_2 L})] \end{aligned}$$

$\bar{\epsilon}_x$ 는 복합적층구조물 제작시의 자유 응력은도 (stress free temperature)를 기준으로 이론적으로 계산된 변형률이므로, 모재균열밀도가  $1/2L_0$ 에서  $1/2L$ 로 증가하는 인장실험의 제하(unloading) 과정에서 변형률 센서(strain gauge)로부터 얻어지는 변형률은  $\epsilon_x^M(L) + \epsilon_x^T(L) - \epsilon_x^T(L_0)$ 가 된다. 그러므로 강성저하에 미치는 잔류응력(residual stress)의 영향은 미비해지므로 잔류응력을 무시하였다.

모재균열이 없는 적층구조의 응력-변형률 관계와 모재균열밀도가  $1/2L$ 인 적층구조의 응력-변형률 관계로부터 일정 응력(constant stress)이 가해지는 경우에 적층구조의 강성저하는 식(19)와 같이 표현된다.

$$\frac{E_x}{E_{x_0}} = \frac{\epsilon_{x_0}^M}{\epsilon_x^M(L)} \quad \dots\dots\dots (19)$$

여기서  $E_{x_0}$ 는 모재균열이 없는 직교적층구조의 하중방향 강성이며,  $E_x$ 는 모재균열밀도가  $1/2L$ 인 직교적층구조의 하중방향 강성이다. 식(18), (19)로부터 적층구조의 강성저하를 예측할 수 있다.

#### 3-2. 강성저하 실험

모재균열밀도 증가에 따른 직교적층판의 강성저하를 측정할 때에, 일반적인 두께(0.12~0.132 mm)의 프리프레그(prepreg)를 사용하여 제작된 시편의 모재균열에 의한 강성저하량은 적층판의 거동이 0°층에 의해서 지배되므로 매우 미소하여서 측정이 곤란하다. 강성저하량을 크게 하기 위하여 파손층을 두껍게 하면 모재균열의 형태가 응력해석에서 가정한 직선형보다는 곡선균열(curved crack), 부분경사균열(partial angled crack) 형태로 많이 발생하므로[14] 해석결과와 차이가 커지게 된다. 이런 문제점을 해결하기 위하여, 본 연구에서는 두께 0.05mm인 일본 TORAYCA사의 P3051 탄소섬유/에폭시(graphite/epoxy) 프리프레그를 사용하여 시편을 제작하였다.

적층순서가  $[0/90_5/0]_T$ ,  $[0/90_{10}/0]_T$ 인 두 종류의 시편을 제작하였으며, 제작된 시편의 폭과 길이는 각각 20mm, 180mm이며, 두께는  $[0/90_5/0]_T$ 의 경우 0.35mm이고  $[0/90_{10}/0]_T$ 의 경우 0.59mm이다. 최대 실험하중이 크지 않으므로 220번 사포(sand

paper)를 탭(tab)으로 사용하였다. 모재균열밀도 측정에는 에지 레플리카(edge replica)법을 사용하였으며, 에지 레플리카의 선명도를 증가시키기 위하여 시편의 자유단(free edge)를 1 $\mu$ m의 알루미나 분말(alumina powder)로 연마하였다.

모재균열 밀도증가에 따른 적층구조의 강성저하 실험은 INSTRON 1350 재료시험기를 사용하여 하중속도가 0.0025mm/mm $\cdot$ min인 변위제어(displacement control)하에서 수행하였다. 측정길이(gauge length)가 3cm인 일본 KYOWA사의 변형률 센서(KFG-30-120-C1-23)가 부착된 시편에 인장하중을 가하여 응력-변형률 곡선(stress-strain curve)에서 팝-인(pop-in)이 관찰될 때에 제하(unloading)하고 모재균열 밀도를 측정하기 위한 에지 레플리카를 시편에 약간의 인장하중(2000N)을 가하여 시편의 자유경계단에서 채취하였다. 채취된 에지 레플리카를 배율이 100인 광학현미경으로 관찰하여 모재균열밀도를 측정하였으며, 응력-변형률 곡선의 제하부분에서 적층구조의 강성을 측정하였다. 앞의 과정을 반복하여 모재균열밀도 증가에 따른 적층구조의 강성저하를 측정하였다.

#### 4. 결과 및 고찰

계산과정에 필요한 복합재료의 재료상수 및 층간전단층의 재료상수들을 Table 1, 2에 보였다. Table 1에서 복합재료의 재료상수들은 참고문헌[2, 3, 13, 14]에서 인용하였으며, AS4/3502의 횡등방성 평면(transversely isotropic plane)에서의 전단강성,  $G_{23}$ 는 보고되어 있지 않으므로 횡등방성 평면에서의 포와송비(Poisson's ratio),  $\nu_{23}$ 를 0.52로 가정하고 횡등방성 가정에서 유도되는  $G_{23}$ 와  $\nu_{23}$ 의 관계식을 사용하여 구하였다. Table 2에서, 층간전단층의 재료상수들은 실험자료가 보고된 것이 없으므로 참고문헌[3, 4, 14]에서 가정한 값과 유사한 값을 사용하였다.

제안한 응력해석 방법의 타당성을 검토하기 위하여, 모재균열밀도가 1/(16d)인 T300/934 [0/90]<sub>0</sub> 적층판에 1% 변형률의 외부하중만이 가해진 경우에 대해서 파손층 하중방향 응력을 본 연구에서

제안한 방법의 결과와 기존의 전단-지연방법[3] 및 유한요소해석 결과[13]와 비교하였다. 파손층 하중방향 응력의 두께방향 분포를 Fig. 3에 보였다. 기존의 전단-지연방법은 응력의 두께방향 변화를 전혀 묘사하고 있지 못하며, 각 층의 전단변형 및 두께방향 변형을 고려하지 않으므로 본 방법과 유한요소해석 결과에 비해 응력을 크게 평가하고 있다. 이런 결과는 기존의 다른 전단-지연방법에서도 같은 양상이다. 본 방법의 결과는 파손층 하중방향 응력이 모재균열 면에 접근할수록 두께방향 변화가 커지며, 모재균열 면에서 멀어질수록 두께방향 변화가 작아지는 경향을 잘 묘사하고 있다.

Fig. 4에는 두께방향 위치를 변화시키면서 파손층 응력의 하중방향 변화를 보였다. 앞에서 언급한 바와 같이 기존의 전단-지연방법의 결과는 두께방향 위치에 관계없이 같은 분포를 보이고 있다. 기존의 전단-지연방법은  $x/d$ 가 6이상이 되어야 유한요소 해석 결과와 일치하고 있으나, 본 방법은  $x/d$ 가 4 이상이 되면 유한요소 해석결과와 일치하고 있다.

Table 1. Material properties of used composite systems

	P3501	T300/934	AS4/3502	Glass/Epoxy
$E_1$ (GPa)	127.8	137.88	144.78	41.7
$E_2$ (GPa)	9.4	11.72	9.58	13.0
$G_{12}$ (GPa)	4.2	4.55	4.79	3.4
$G_{23}$ (GPa)	3.1	4.17	3.15 *	4.58
$\nu_{12}$	0.28	0.29	0.31	0.3
$\alpha_1$ ( $\mu$ E/ $^{\circ}$ C)	0.4	0.09	-0.30	3.8
$\alpha_2$ ( $\mu$ E/ $^{\circ}$ C)	50.0	28.8	28.1	16.7
$\Delta T$ ( $^{\circ}$ C)	-110	-147	-147	-125
$h$ (mm)**	0.05	0.132	0.127	0.203

\* : calculated from assumed value of  $\nu_{23}=0.52$

\*\* : 1 ply thickness

Table 2. Interlaminar shear layer properties of used composite systems

	P3051	T300/934	AS4/3502	Glass/Epoxy
$G_0$ (GPa)	1.28	1.28	1.33	0.684
$d_0$ (mm)	0.005	0.0132	0.0127	0.0203



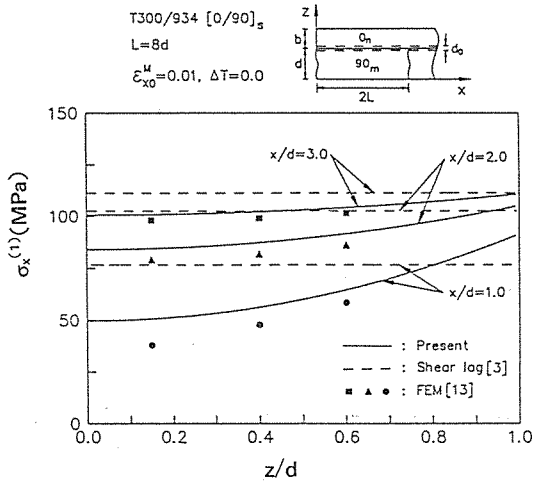
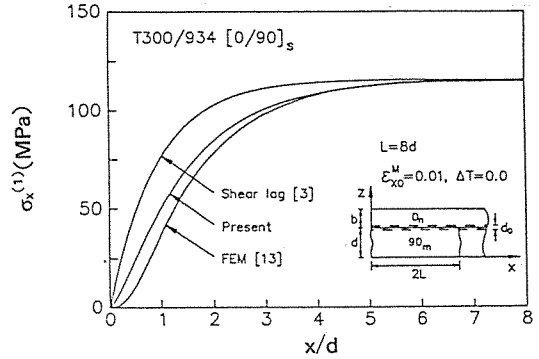


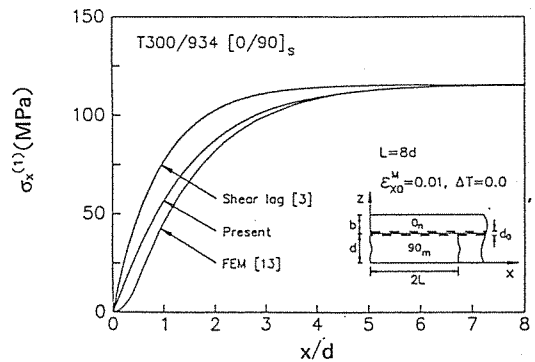
Fig. 3 Through-the-thickness distribution of axial stress in the 90° layer for T300/934 [0/90]<sub>s</sub> laminate ( $\epsilon_{x0}^M = 1\%$ ).

이상의 모재균열 주위의 응력분포 특성비교로부터, 본 방법에서도 고려하지 않은 두께방향 변형과 인접층 전단변형의 영향으로 유한요소해석 결과에 비해서 응력을 약간 크게 평가하고 있으나, 본 연구에서 제안한 방법이 모재균열 주위의 응력분포 특성을 잘 묘사하고 있음을 알 수 있다.

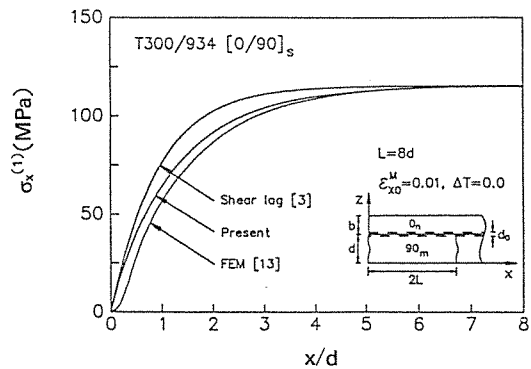
본 연구에서 제안한 방법의 결과를 이용하여 모재균열밀도 증가에 따른 직교적층판의 강성저하 예측결과를 기존의 예측결과[3, 4] 및 실험결과[2, 14]와 비교하여 Fig. 5, 6에 보였다. Fig. 5에는 AS4/3502 탄소섬유/에폭시 복합재료 직교적층판의 모재균열밀도 증가에 따른 강성저하 결과를 보였다. 같은 모재균열밀도와 인접층 두께를 가지는 적층구조에서 파손층의 두께가 두꺼워짐에 따라 적층판 강성이 급격하게 저하되는 현상을 본 방법에 의한 결과가 매우 잘 예측하고 있다. 모재균열밀도 증가에 따른 적층판 강성저하 예측은 본 방법에 의한 예측결과가 모재균열밀도가 포화된 특성 손상상태(characteristic damage state)에서의 강성저하량을 기존 방법[3]에 비해서 매우 잘 예측하고 있다. 특히 기존 방법에 의한 예측결과가 실험결과와 많은 차이를 보이는 [0<sub>2</sub>/90<sub>2</sub>]<sub>s</sub> 적층구조에 대한



(a)  $z/d=0.15$



(b)  $z/d=0.40$



(c)  $z/d=0.60$

Fig. 4 Distribution of axial stress along x-axis in the 90° layer for T300/934 [0/90]<sub>s</sub> laminate ( $\epsilon_{x0}^M = 1\%$ ).

강성저하 예측도 본 방법에 의한 결과가 실험결과에 비해서 약간 크게 예측하고 있으나 비교적 잘 일

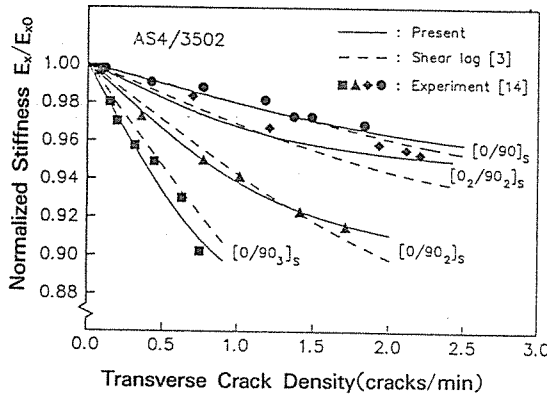


Fig. 5 Laminate stiffness reduction due to transverse cracks in AS4/3502 graphite/epoxy cross-ply laminates.

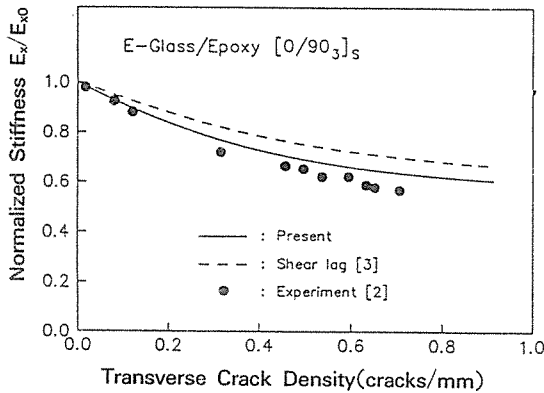


Fig. 6 Laminate stiffness reduction due to transverse cracks in  $[0/90_3]_s$  E-glass/epoxy laminate.

치하고 있다.

Fig. 6에  $[0/90_3]_s$  유리섬유/에폭시(E-glass/epoxy) 복합재료 적층판에 대한 강성저하 예측 및 실험결과[2]를 보였다. 본 방법에 의한 예측결과가 기존의 방법[3]에 비하여 실험결과에 근접하고 있으나, 실험결과에 비해서 강성저하량을 작게 평가하고 있다. 이는 Table 1에서 보듯이 유리섬유강화 복합재료가 탄소섬유강화 복합재료와는 다르게  $E_1/E_2$ 의 비가 크지 않고 인접층의 전단강성( $G_{12}$ )이 파손층의 전단강성( $G_{23}$ )보다 작으므로 본 방법에서

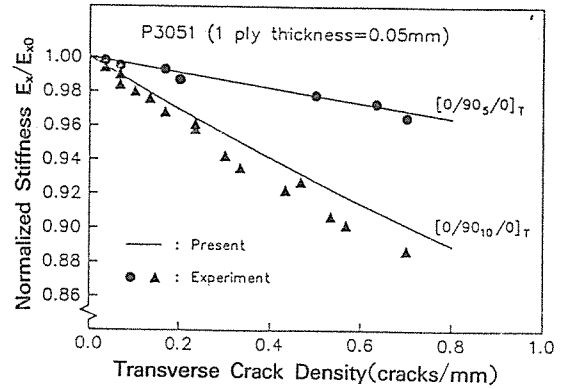


Fig. 7 Laminates stiffness reduction due to transverse cracks in  $[0/90_m/0]_T$  P3051 graphite/epoxy laminates ( $m=5, 10$ ).

가정한 변형상태가 적절하지 않기 때문이다. 즉, 본 방법에서는 무시한 두께방향 변형 및 인접층 전단변형의 영향이 나타나고 있기 때문이다.

두께가 0.05mm인 프리프레그로 제작된 P3051  $[0/90_m/0]_T$  ( $m=5, 10$ ) 탄소섬유/에폭시 복합재료 적층판의 모재균열밀도 증가에 따른 적층판 강성저하를 Fig. 7에 보였다.  $[0/90_5/0]_T$  적층판의 경우에는 예측결과와 실험결과가 잘 일치하고 있으나,  $[0/90_{10}/0]_T$  적층판의 경우에는 실험결과에 비해 강성저하도를 작게 예측하고 있다. 파손층 두께가 거의 비슷한 AS4/3502 $[0/90_2]_s$  적층판의 예측결과와 실험결과가 잘 일치하는 사실과 비교하여 볼 때, 인접층의 두께가 얇아진 경우에도 모재균열의 열림변위로 인한 인접층 전단변형의 영향이 고려되어야 함을 알 수 있다.

## 5. 결 론

모재균열 열림변위의 영향을 고려하여, 모재균열이 있는 직교적층판의 강성저하를 해석하기 위한 간단한 전단-지연방법을 제안하였다. 제안된 방법의 응력분포 결과를 기존의 유한요소 해석결과와 비교하고, 적층판의 강성저하 예측결과를 실험결과와 비교하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 모재균열 열림변위를 두께방향에 대해서 포

물선 형상으로 가정한 간단한 전단-지연방법이 모재균열 주위의 응력분포 특성을 잘 묘사하고 있다.

2. 적층판의 모재균열에 의한 강성저하 예측은 일반적인 탄소섬유/에폭시 복합재료 직교적층판의 경우에는 실험결과와 잘 일치하고 있으며, 특히 모재균열밀도가 포화된 상태에서의 강성저하를 잘 예측하고 있다.

3. 본 연구의 해석방법에서는 고려하지 않은 두께방향 변형 및 인접층 전단변형의 영향이 나타나는 유리섬유/에폭시 직교적층판과 인접층 두께가 얇은 탄소섬유/에폭시 직교적층판에 대한 강성저하 예측결과는 실험결과에 비해서 강성저하가 작게 평가되고 있으므로, 이를 해결하기 위해서는 두께방향 변형 및 인접층 전단변형을 고려한 해석방법이 제안되어야 한다.

## 후 기

본 연구는 1990년도 국방과학연구소의 장기기초연구비의 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다 (과제번호 ADD-90-5-2).

## 참고문헌

1. Talreja, R., *Fatigue of Composite Materials*, Technomic Publishing Co., Inc., 1987.
2. Highsmith, A.L. and Reifsnider, K.L., "Stiffness-Reduction Mechanisms in Composite Laminates," *Damage in Composite Materials*, ASTM STP 775, K.L. Reifsnider, Ed., American Society of Testing and Materials, 1982, pp.103-117.
3. Lim, S.G. and Hong, C.S., "Prediction of Transverse Cracking and Stiffness Reduction in Cross-Ply Laminated Composites," *Journal of Composite Materials*, Vol. 23, 1989, pp.695-713.
4. Lim, S.G. and Hong, C.S., "Effect of Transverse Cracks on the Thermomechanical Properties of Cross-Ply Laminated Composites," *Composites Science and Technology*, Vol. 34, 1989, pp.145-162.
5. Laws, N. and Dvorak, G.J., "Progressive Transverse Cracking in Composite Laminates," *Journal of Composite Materials*, Vol. 22, 1988, pp.900-916.
6. Han, Y.M., Hahn, H.T. and Croman, R.B., "A Simplified Analysis of Transverse Ply Cracking in Cross-Ply Laminates," *Composites Science and Technology*, Vol. 31, 1988, pp.165-177.
7. Han, Y.M. and Hahn, H.T., "Ply Cracking and Property Degradations of Symmetric Balanced Laminates Under General In-Plane Loading," *Composites Science and Technology*, Vol. 35, 1989, pp.377-397.
8. Hashin, Z., "Analysis of Stiffness Reduction of Cracked Cross-Ply Laminates," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 25, 1986, pp.771-778.
9. Nuismer, R.J. and Tan, S.C., "Constitutive Relations of a Cracked Composite Lamina," *Journal of Composite Materials*, Vol. 22, 1988, pp.306-321.
10. Talreja, R., "Transverse Cracking and Stiffness Reduction in Composite Laminates," *Journal of Composite Materials*, Vol. 19, 1985, pp.355-375.
11. Allen, D.H., Harris, C.E. and Groves, S.E., "A Thermomechanical Constitutive Theory for Elastic Composites with Distributed Damage-I. Theoretical Development," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 23, 1987, pp.1301-1318.
12. Allen, D.H., Harris, C.E. and Groves, S.E., "A Thermomechanical Constitutive Theory for Elastic Composites with Distributed Damage-II. Application to Matrix Cracking in Laminated Composites," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 23, 1987, pp.1319-1338.
13. 홍창선, 이재화 외, "두꺼운 고등 복합재료 적층판 제작 및 설계기법 개발(II)," 과학기술처 연구보고서, 1990.
14. Groves, S.E., Harris, C.E., Highsmith, A.L., Allen, D.H. and Norvell, R.G., "An Experimental and Analytical Treatment of Matrix Cracking in Cross-Ply Laminates," *Experimental Mechanics*, Vol. 27, 1987, pp.73-79.