

## 論文

## 위성체 유연 보 구조물의 열 안정성 해석

윤일성\*, 송오섭\*\*

## Thermal Stability Analysis of a Flexible Beam Spacecraft Appendage

Il-Soung Yoon\*, Oh-Seop Song\*\*

## ABSTRACT

The bending vibration and thermal flutter instability of spacecraft booms modeled as circular thin-walled beams of closed cross-section and subjected to thermal radiation loading is investigated in this paper. The thin-walled beam model incorporates a number of nonclassical effects of transverse shear, primary and secondary warping, rotary inertia and anisotropy of constituent materials. Thermally induced vibration response characteristics of a composite thin walled beam exhibiting the circumferentially uniform system(CUS) configuration are exploited in connection with the structural flapwise bending-lagwise bending coupling resulting from directional properties of fiber reinforced composite materials and from ply stacking sequence. The numerical simulations display deflection time-history as a function of the ply-angle of fibers of the composite materials, damping factor, incident angle of solar heat flux, as well as the boundary of the thermal flutter instability domain. The adaptive control are provided by a system of piezoelectric devices whose sensing and actuating functions are combined and that are bonded or embedded into the host structure.

## 초 록

본 논문에서는 얇은 벽보로 모델링 한 위성체 구조물에 입사되는 열 하중에 의해 발생하는 굽힘 진동과 열적 플러터에 대하여 연구하였다. 복합재료 얇은 벽보는 회전관성과 1차, 2차 와핑, 전단변형의 비고전적 요소를 포함한다. CUS구조물로 모델링한 복합재료 얇은 벽보의 열 진동 특성은 적층 순서와 섬유강화복합재료의 방향특성인자로 부터 기인된 종방향 굽힘과 횡방향 굽힘의 연성과 관련하여 연구되었다. 수치 해석적인 방법으로 열적 플러터의 안정성 영역의경계값을 구하였으며, 태양 열 플럭스의 입사각, 감쇠계수, 섬유각의 변화에 의한 보의 변위를 구하였다. 주 구조물에 압전소자를 부착하여, 감지기와 작동기로 사용하여 제어해석을 수행하였다.

## 1. 서 론

구조물에 발생하는 온도 구배와 구조물의 변형이 상호연성되어 있는 경우에는 구조물이 불안정한 동적 응답을 일으킬 수 있는데 이와 같은 현상을 열적 플러터(thermal flutter)라고 하며 우주 구조물에서 열적 플러터가 발생한

대표적인 예가 Hubble Space Telescope의 태양 전지판 진동 현상이다.

1957년 10월 4일에 발사된 최초의 위성인 Sputnik 이전인 1950년 중반에 이미 열적 플러터의 기초응용연구가 시작되었으며, 1960년대에 발생된 위성의 이상거동이 발견되고 나서야 비로소 기초이론이 실용적으로 적용되었으며,

\* 충남대학교 기계공학과 대학원, 교신저자(e-mail: Sanchon1@netian.com)

\*\* 충남대학교 기계공학과

보, 판의 열적 진동에 관한 많은 연구가 발표되었다. Seibert와 Rice[1]는 Bernoulli-Euler 보와 Timoshenko 보의 진동의 열 탄성의 연성효과에 대해 연구하였으며, 긴 보와 마찬가지로 짧은 보에서도 간헐적인 열원의 입력이 진동에 중요한 영향을 미친다는 결론을 얻었다. Takeuti 와 Furukawa[2]는 관성력을 고려한 판의 열적 진동과 연성된 열 탄성 문제를 해석하였으며, 이 연구에서 판의 굽힘은 고려하지 않고 1차원 열 탄성의 문제로서 유한 두께의 평판을 해석하였다. 그러므로, 이 결과는 판 굽힘의 낮은 진동수의 진동특성에는 적용할 수가 없다. Johnston과 Thornton[3]은 Rigid hub와 끝단 질량이 있는 외팔보로 위성 구조물을 단순화시켜 해석하였다. Euler-Bernoulli 보 모델을 사용하였으며, 회전관성은 무시하였다. 또한, Thornton과 Kim[4]은 태양전지판을 등방성 유연보와 막의 복합구조물로 모델링하여 열 안정성 문제를 해석하였다.

본 연구는 인공위성의 관측성능에 중요한 영향을 미칠 수 있는 열변형에 의해 발생하는 유연 구조물의 진동현상의 규명 및 억제방법에 관련된 연구로서, 특히 위성체의 발사비용절감 및 수명연장을 위하여 비강성 및 비강도면에서 기존의 금속합금보다 우수한 가벼운 복합재료의 사용이 증가될 것으로 판단되며 따라서 열 변화에 의해 발생하는 복합재료 유연 구조물의 진동에 관련된 연구에 중점을 두고자 한다. 해석모델은 외팔 복합재료 유연보-끝단 질량 모델로 하였으며, 열적-동역학적 효과를 고려하여 운동방정식을 유도하고 이로부터 열 하중에 의한 동적 응답 해석 및 안정성(stability) 문제인 열적 플러터 해석(thermal flutter analysis)을 수행하였다. 또한, 내부에 압전재료(piezoelectric material)를 삽입한 구조물에 대하여 비례제어와 속도귀환 제어 기법을 이용하여 구조물의 고유진동수 및 동적 거동에 대하여 연구하였다.

## 2. 열해석

### 2.1 기본 가정

얇은 벽보 구조물의 에너지 보존 방정식을 유도하기 위하여 다음과 같이 가정하였다.

- 1) 지구방출 플럭스(earth infrared flux)와 반사된 복사 플럭스(albedo), 보의 지지단에서의 열에너지 손실은 무시한다.
- 2) 구조물의 두께(h)는 반경(R)에 비해서 작으므로, 구조물의 두께 방향의 온도는 일정하다고 가정한다.

- 3) 구조물의 길이방향(z)으로의 열전도는 무시한다.
- 4) 모든 열적 물성치들은 일정하다고 가정한다.

### 2.2 Coupled analysis

보의 변위와 온도 구배가 연성된 경우로, 1차원 외팔 보 모델의 구조물에 입사되는 태양열 플럭스의 직각방향 성분은 구조물의 변형을 고려할 때 다음과 같이 표현 할 수 있다[4].

$$S = S_o \cos(\beta + \theta_x) \quad (1)$$

여기에서  $S_o$ 는 보의 초기평형위치에서의 태양열 조사량( $W/m^2$ )이며,  $\beta$ 는 태양열 플럭스의 입사각이고,  $\theta_x$ 는 x축에 관한 보의 회전각이다.

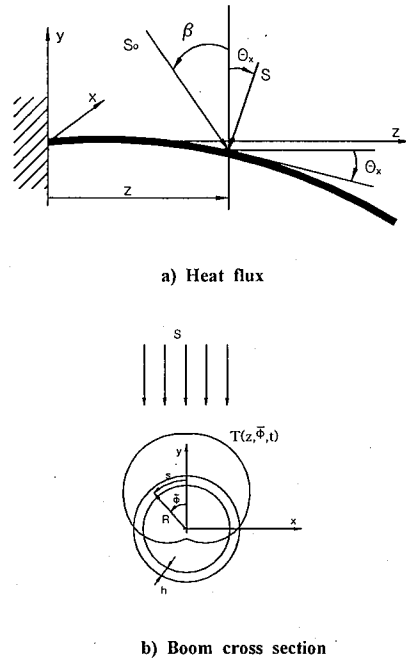


Fig. 1 Heat flux for coupled thermal-structural analysis.

식(1)을 이용하여 에너지 보존 방정식을 세우면 다음과 같다[4].

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\alpha \epsilon}{\rho c h} T^4 \quad (2)$$

$$= \frac{\alpha S_0}{\rho ch} \delta \cos \bar{\phi} \cos(\beta + \theta_x)$$

여기에서,  $k$ 는 열전도율이며,  $c$ 는 비열,  $\rho$ 는 밀도,  $\sigma$ 는 Stefan-Boltzmann 상수,  $\epsilon$ 은 열 방출율,  $\alpha$ 는 열 흡수율,  $R$ 은 보의 반경,  $h$ 는 보의 두께이며,  $-\frac{\pi}{2} < \bar{\phi} < \frac{\pi}{2}$ 인 경우  $\delta=1$ ,  $\frac{\pi}{2} < \bar{\phi} < \frac{3\pi}{2}$ 인 경우  $\delta=0$ 의 값을 갖는다.

식(2)에서 온도  $T$ 는 평균온도  $\bar{T}(z, t)$ 와 섭동 온도  $T_m(z, t) \cos \bar{\phi}$ 의 합으로 다음과 같이 근사화 하였다.

$$T(z, \bar{\phi}, t) = \bar{T}(z, t) + T_m(z, t) \cos \bar{\phi} \quad (3)$$

식(3)을 식(2)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 두 개의 편 미분 방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\sigma \epsilon}{\rho ch} \bar{T}^4 = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha S_0}{\rho ch} \cos(\beta + \theta_x) \quad (4-a)$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} + \frac{1}{\tau} T_m = \frac{1}{2} \frac{\alpha S_0}{\rho ch} \cos(\beta + \theta_x) \quad (4-b)$$

식(4-a)와 (4-b)에서 다음과 같은 정상상태의 평균온도  $\bar{T}_s$ 와 섭동 온도  $T_m$ 을 유도하였다[5].

$$\bar{T}_s = \left( \frac{1}{\pi} \frac{\alpha S_0 \cos \beta}{\sigma \epsilon} \right)^{1/4} \quad (5)$$

$$T_m = \frac{e^{-t/\tau} T^*}{\tau} \int_0^t e^{p/t'} \cos(\beta + \theta_x) dp \quad (6)$$

여기에서,

$$T^* = \frac{1}{2} \frac{\alpha S_0}{\rho ch} \tau$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{k}{\rho c R^2} + \frac{4\sigma \epsilon \bar{T}_s^3}{\rho ch}$$

### 3. 구조해석

#### 3.1 기본 가정

해석 모델은 다음과 같은 얇은 벽보(thin-walled beam)이다.

Fig. 2에서 얇은 벽보에 대한 전체좌표계(X,Y,Z) 및 국소

좌표계(s,n,z)를 나타내고 있으며, 보의 길이방향의 중심선(z)과 Z축은 평행하며, 윤곽선(contour line)은 보의 중립면(middle surface)과, Z축에 수직인 면과의 교선으로 정의한다. 또한, 얇은 벽보의 벽의 두께는 길이 방향의 축을 따라 일정하며, 윤곽선을 따라서 변한다고 가정한다.

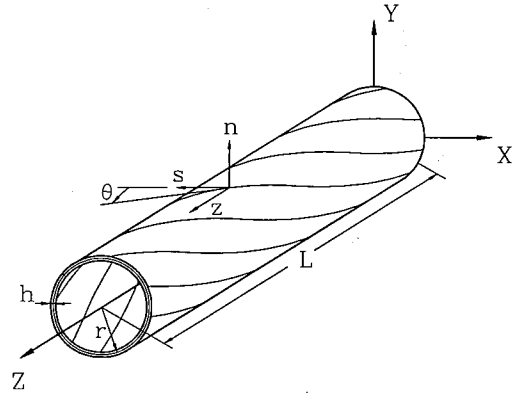


Fig. 2 Circumferentially uniform system (CUS) configuration.

복합재료 얇은 벽보의 기본 가정은 일반적인 등방성 보의 기하학적인 특성을 그대로 사용하며, 등방성 재료에 비해 복합재료 구조물에서 상대적으로 크게 나타나는 횡전단 변형과 회전관성효과, 1차 와평, 2차 와평구속효과를 고려하였으며, 해석 모델을 다음과 같이 가정하였다.

- 1) 변형하기전의 단면 형상은 보의 변형 후에도 보존된다. 이것은, 단면자체의 변형이 축방향(z)의 변위에 비해서 상대적으로 무시할 수 있기 때문이다.
- 2) 1차 와평 변위는 보의 축 방향에 대한 함수인 비틀림율( $\phi'$ )에 비례한다.
- 3) 모든 변형은 선형 미소변형을 한다고 가정한다.
- 4) 종방향-횡방향굽힘이 연성되고, 축방향-비틀림이 연성된 CUS (Circumferentially Uniform System) 구조물로 가정한다.
- 5) 압전 필름은 보의 축방향따라서 균일하게 전체적으로 삽입되어 있다. 또한, s-z 평면내에서는 등방성이고, 두께방향(n)으로는 이방성인 횡방향 등방성 물질(transversely isotropic material)이다.

#### 3.2 변위장

각 변위 변수의 함수로 표시된 변위 벡터는 다음과 같다[6].

$$\begin{aligned} u(s, z, t) &= u_0(z, t) - y(s) \phi(z, t) \\ v(s, z, t) &= v_0(z, t) + x(s) \phi(z, t) \\ w(s, z, n, t) &= w_0(z, t) \\ &\quad + \theta_x(z, t) [y(s) - n \frac{dx}{ds}] \\ &\quad + \theta_y(z, t) [x(s) + n \frac{dy}{ds}] \\ &\quad - \phi'(z, t) [F_w(s) + na(s)] \end{aligned}$$

여기에서,

$$\begin{aligned} F_w(s) &= \int_0^s \left[ r_n(s) - \frac{A_c}{\beta} s \right] ds \\ r_n(s) &= x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \\ a(s) &= -y \frac{dy}{ds} - x \frac{dx}{ds} \\ \phi'(z, t) &= \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial z} \end{aligned}$$

위 식에서  $u_0, v_0, w_0$ 는 각각  $x, y, z$ 축 방향의 병진변형(translation)을 나타내며,  $\theta_x, \theta_y, \phi$ 는  $x, y, z$ 축에 관한 회전각을 나타낸다. 또한  $F_w(s)$ 와  $na(s)$ 는 각각 1차 와평과 2차 와평을 나타낸다.

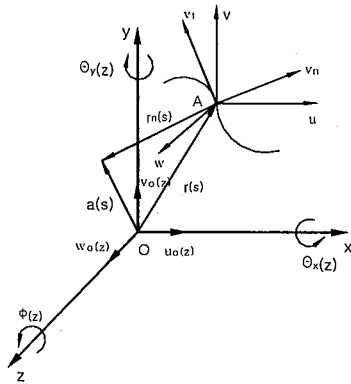


Fig. 3 Displacement field.

### 3.3 구성방정식

#### 3.3.1 복합재료의 구성 방정식

일반적인 직교 복합재료의 열 효과를 고려한 응력-변형을 관계식은 다음과 같다[6].

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ss} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{nn} \\ \sigma_{nz} \\ \sigma_{sn} \\ \sigma_{sz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{ss} - \alpha_s T \\ \epsilon_{zz} - \alpha_z T \\ \epsilon_{nn} - \alpha_n T \\ \gamma_{nz} \\ \gamma_{sn} \\ \gamma_{sz} - \alpha_{sz} T \end{bmatrix} \quad (8)$$

#### 3.3.2 압전재료의 구성 방정식

압전재료는 구조물의 길이방향에 대하여 전 영역에 분포되어 있으며  $s, n$ 방향으로 Fig. 4와 같이 분포되어 있다.

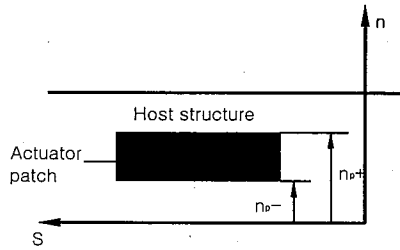


Fig. 4 Piezoactuator patch distribution.

압전재료에 전기장을 가하여 역효과 식에 의해 제어력을 발생시켜 작동기로 사용하는 경우에는 다음과 같은 역전효과(converse effect) 관계식으로부터 압전작동기의 구성 방정식을 유도할 수 있다.

$$\{\sigma_m\} = [C_{mi}] \{S_i\} - [e_{ik}]^T \{E_k\} \quad (9)$$

여기에서,  $\{\sigma_m\}$ 은 응력벡터,  $[C_{mi}]$ 는 탄성계수행렬,  $[e_{ik}]$ 는 압전상수행렬,  $\{S_i\}$ 는 변형률벡터,  $\{E_k\}$ 는 각 방향에 가해지는 전기장이다.

압전재료는 횡방향으로 등방성 재료이므로 응력-변형을 관계는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ss} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{nn} \\ \sigma_{nz} \\ \sigma_{sn} \\ \sigma_{sz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^p & C_{12}^p & C_{13}^p & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^p & C_{22}^p & C_{23}^p & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^p & C_{23}^p & C_{33}^p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{ss} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{nn} \\ \gamma_{nz} \\ \gamma_{sn} \\ \gamma_{sz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{31}^{(p)} \epsilon_3^{(p)} R_{(p)}(s, z, n) \\ e_{31}^{(p)} \epsilon_3^{(p)} R_{(p)}(s, z, n) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

위 식에서  $p$ 는  $p$ 번째 적층판을 의미하며,  $e_{31}$ 은 압전상수(piezoelectric constants),  $\epsilon_3$ 는 유전율(dielectric constants),  $R(s, z, n)$ 은  $s, z, n$  방향의 공간 함수이다. 오른쪽 첫 번째 항은 일반적인 횡 방향 등방성 재료의 응력-변형을 관계를 나타내며, 두 번째 항은 압전 작동기에 가해지는 전기장에 비례하는 발생 응력을 나타낸다.

### 3.3.3 합응력과 합 모멘트

합 응력과 합 모멘트(stress resultants and couples)는, 3차원 구성방정식을 두께방향( $n$ 방향)으로 적분하여 구할 수 있다. 따라서 이러한 합, 응력과 모멘트는 각각  $s$ 와  $z$ 의 함수가 되며 다음과 같다[6].

$$\begin{bmatrix} N_{zz} \\ N_{sz} \\ L_{zz} \\ L_{sz} \\ N_{nz} \\ N_{sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & 0 \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{zz}^0 \\ \gamma_{sz}^0 \\ W_M \\ \epsilon_{zz}^n \\ \gamma_{nz}^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_1^T \\ N_2^T \\ N_4^T \\ N_5^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_1^a \\ 0 \\ N_4^a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

여기에서,  $N_1^T, N_2^T, N_4^T, N_5^T$ 는 입사되는 태양열 플럭스에 의해 발생하는 합 응력과 합 모멘트를 나타내며,  $N_1^a, N_4^a$ 는 압전 작동기에 의해 발생하는 제어합 응력과 제어합 모멘트를 나타내며 다음과 같다.

$$N_1^a = (1 - \frac{A_{12}}{A_{11}}) \sum_{p=1}^4 e_{31}^p \epsilon_3^p (n_{p+} - n_{p-}) \quad (12)$$

$$N_4^a = \sum_{p=1}^4 e_{31}^p \epsilon_3^p [\frac{1}{2}(n_{p+}^2 - n_{p-}^2) - \frac{B_{12}}{A_{11}}(n_{p+} - n_{p-})] \quad (13)$$

### 3.4 운동방정식과 경계조건식 유도

복합재료 보의 지배방정식과 경계조건을 유도하기 위해서 다음과 같은 Hamilton의 변분 원리를 이용하였다.

$$\int_{t_1}^{t_2} [-\delta U + \delta K] dt = 0 \quad (14)$$

$\delta U$ 와  $\delta K$ 는 각각 탄성에너지와 운동에너지의 변분이다. 여기에서, 탄성에너지 ( $U$ )와 운동에너지 ( $K$ )는 다음과 같다.

$$U = \int_0^L \oint_C [N_{zz} \epsilon_{zz}^0 + L_{zz} \epsilon_{zz}^n + N_{sz} \gamma_{sz}^0 + N_{sz} 2 \frac{A_c}{\beta} \phi' + N_{nz} \gamma_{nz}] ds dz \quad (15)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \oint_C [(\frac{\partial u}{\partial t})^2 + (\frac{\partial v}{\partial t})^2 + (\frac{\partial w}{\partial t})^2] \rho h ds dz \quad (16)$$

여기에서,  $\oint_C$ 는 윤곽선(contour line)에 관한 적분으로 적분구간은  $[0, 2\pi R]$ 이다.

외팔 복합재료 유연보-끝단 질량 모델(Fig. 4)의 운동방정식과 경계 조건식은 다음과 같다.

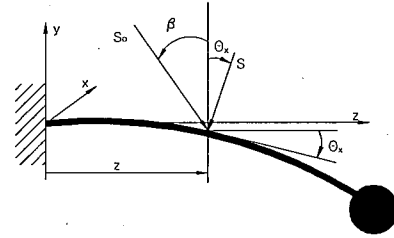


Fig. 5 Cantilevered composite beam with a tip mass.

### 운동방정식

$$\begin{aligned} a_{43} \theta_x'' + a_{44}(u_0'' + \theta_y') - h_4^T &= b_1 \ddot{u}_0 \\ a_{52} \theta_y'' + a_{55}(v_0'' + \theta_x') - h_5^T &= b_1 \ddot{v}_0 \\ a_{22} \theta_y'' + a_{25}(v_0'' + \theta_x') - a_{44}(u_0' + \theta_y) \\ &\quad - a_{43} \theta_x' - h_2^T + h_4^T = (b_5 + b_{15}) \ddot{\theta}_y \\ a_{33} \theta_x'' + a_{34}(u_0'' + \theta_y') - a_{55}(v_0' + \theta_x) \\ &\quad - a_{52} \theta_y' - h_3^T + h_5^T = (b_4 + b_{14}) \ddot{\theta}_x \end{aligned} \quad (17)$$

### 경계조건

$$\begin{aligned} \text{at } z=0; & u_0=v_0=\theta_y=\theta_x=0 \\ \text{at } z=L; & \\ & a_{43} \theta_x' + a_{44}(u_0' + \theta_y) + m_{tip} \ddot{u}_0 - h_4^T = 0 \\ & a_{52} \theta_y' + a_{55}(v_0' + \theta_x) + m_{tip} \ddot{v}_0 - h_5^T = 0 \\ & a_{22} \theta_y' + a_{25}(v_0' + \theta_x) - h_2^T - h_2^a = 0 \\ & a_{33} \theta_x' + a_{34}(u_0' + \theta_y) - h_3^T - h_3^a = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

여기에서,  $a_{ij}$ 는 구조물의 강성계수,  $b_i$ 는 질량계수,  $' \equiv \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $'' \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 이며, 열 하중식 ( $h^T$ )과 제어모멘트 식( $h^a$ )은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h_2^T &= \oint_C (x N_1^T + \frac{dy}{ds} N_4^T) ds \\ h_3^T &= \oint_C (y N_1^T - \frac{dx}{ds} N_4^T) ds \\ h_4^T &= \oint_C (N_2^T \frac{dx}{ds}) ds \\ h_5^T &= \oint_C (N_2^T \frac{dy}{ds}) ds \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} h_2^a &= \oint_C [x N_1^a + \frac{dy}{ds} N_4^a] ds \\ h_3^a &= \oint_C [y N_1^a - \frac{dx}{ds} N_4^a] ds \end{aligned} \quad (20)$$

## 4. 제어기 설계

#### 4.1 비례제어

압전감지기로부터 측정된 전압식에 이득값 ( $K_p$ )을 곱하여 이를 작동기에 전기장으로 가하는 방법으로 제어전압은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_y^p(t) &= -C_{v_y} \theta_y(t) \\ V_x^p(t) &= -C_{v_x} \theta_x(t) \end{aligned} \quad (21)$$

여기에서,  $C_{v_y}, C_{v_x}$ 는 압전감지기의 형상과 부착위치에 따른 영향을 나타내는 상수이다.

제어전압에 의해 발생되는 제어전기장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_y^p(t) &= K_p \frac{V_y^p(t)}{h_p} = -K_p \frac{C_{v_y}}{h_p} \theta_y(t) \\ \varepsilon_x^p(t) &= K_p \frac{V_x^p(t)}{h_p} = -K_p \frac{C_{v_x}}{h_p} \theta_x(t) \end{aligned} \quad (22)$$

여기에서,  $h_p$ 는 압전필름의 두께이다.

식(22)을 식(20)에 대입하면 다음 값을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} h_2^a &= -K_p \frac{C_{M_y} C_{v_y}}{h_p} \theta_y(t) \\ h_3^a &= -K_p \frac{C_{M_x} C_{v_x}}{h_p} \theta_x(t) \end{aligned} \quad (23)$$

여기에서,  $C_{M_y}, C_{M_x}$ 는 Appendix A에 수록하였다.

식(23)로부터 제어모멘트 벡터를 다음과 같이 유도할 수 있다[7].

$$\begin{aligned} \{F(t)\}^a &= -\frac{K_p}{h_p} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{M_y} C_{v_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{M_x} C_{v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \\ \dot{q}_4(t) \end{bmatrix} \\ &= -K_p [F_p] \dot{q}(t) \end{aligned} \quad (24)$$

비례제어모멘트를 확장된 갤러킨 방법(extended Galerkin's Method)[6]으로 이산화하고, 이를 운동방정식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$[M] \ddot{q}(t) + [K] q(t) = \{F(t)\} + \{F(t)\}^a \quad (25)$$

식(25)를 정리하면 다음과 같다.

$$[M] \ddot{q}(t) + [K^*] q(t) = \{F(t)\} \quad (26)$$

여기에서,  $[K^*] = [K] + \overline{K_p} [F_p]$ 이며,  $K_p$ 는 다음의 무차원 값으로 정의되며,  $a_{33}$ 은 보의 굽힘 강성 계수이다.

$$\overline{K_p} = K_p \frac{L^2}{a_{33}} \quad (27)$$

#### 4.2 속도귀환제어

압전 감지기로부터 측정된 전류식에 이득값 ( $K_v$ )을 곱하여 이를 간단한 전기회로를 이용하여 이에 비례하는 전기장을 작동기로 가하는 방법으로 제어전압에 의해 발생되는 제어전기장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_y^v(t) &= K_v \frac{d}{dt} \left( \frac{V_y^p(t)}{h_p} \right) = -K_v \frac{C_{v_y}}{h_p} \dot{\theta}_y(t) \\ \varepsilon_x^v(t) &= K_v \frac{d}{dt} \left( \frac{V_x^p(t)}{h_p} \right) = -K_v \frac{C_{v_x}}{h_p} \dot{\theta}_x(t) \end{aligned} \quad (28)$$

식(28)를 식(20)에 대입하면 다음 값을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} h_2^a &= -K_v \frac{C_{M_y} C_{v_y}}{h_p} \dot{\theta}_y(t) \\ h_3^a &= -K_v \frac{C_{M_x} C_{v_x}}{h_p} \dot{\theta}_x(t) \end{aligned} \quad (29)$$

식(29)로부터 제어모멘트 벡터를 다음과 같이 유도할 수 있다[7].

$$\begin{aligned} \{F(t)\}^a &= -\frac{K_v}{h_p} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{M_y} C_{v_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{M_x} C_{v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \\ \dot{q}_4(t) \end{bmatrix} \\ &= -K_v [F_v] \dot{q}(t) \end{aligned} \quad (30)$$

속도제어모멘트를 확장된 갤러킨방법으로 이산화하고, 이를 운동방정식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$[M] \ddot{q}(t) + [C^*] \dot{q}(t) + [K] q(t) = \{F(t)\} \quad (31)$$

여기에서,  $[C^*] = K_v [F_v]$ 이며,  $K_v$ 는 다음의 무차원 값으로 정의된다.

$$\overline{K_v} = K_v \frac{L^2}{a_{33}} \quad (32)$$

## 5. 수치 해석

### 5.1 자유진동해석

Hamilton의 변분 원리에 의해 유도된 복합재료 보의 운동방정식과 경계 조건식에 다음과 같은 해를 가정한다.

$$\{u_0(z, t), v_0(z, t), \theta_y(z, t), \theta_x(z, t)\} = \{u_{0r}(z), v_{0r}(z), \theta_{yr}(z), \theta_{xr}(z)\} e^{it} \quad (33)$$

위의 식(33)을 외력이 작용하지 않는 자유진동의 운동방정식과 경계 조건식에 대입한 후 비례제어와 속도귀환제어 방법에 의한 제어모멘트식인 식(26), 식(31)을 고려하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\{[M]\lambda^2 + [C^*]\lambda + [K^*]\}\{x\} = \{0\} \quad (34)$$

여기에서,

$$\begin{aligned} \{x\} &= \{a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N, c_1, \dots, c_N, d_1, \dots, d_N\}^T \\ [K^*] &= [K] + \overline{K_v}[F_v] \\ [C^*] &= \overline{K_v}[F_v] \end{aligned}$$

Trivial solution을 갖지 않을 조건은 다음과 같다.

$$\text{Det}\{[M]\lambda^2 + [C^*]\lambda + [K^*]\} = \{0\} \quad (35)$$

식(35)의 고유치 문제는 다음과 같은 식으로 다시 표현할 수 있다.

$$[Z] - \lambda[I] = 0 \quad (36)$$

여기에서,

$$[Z] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K^*] & -[M]^{-1}[C^*] \end{bmatrix}$$

식(36)을 만족하는  $\lambda$ 의 값들이 고유진동수가 된다.

### 5.2 동적응답

식(17)에서 구한 CUS구조물에서의 횡방향 및 종방향 연

성 운동방정식을 확장된 갤러킨 방법(extended Galerkin's Method)을 이용하여 운동 방정식의 수치적 해를 구하기 위하여, 변위변수  $u_0(z), v_0(z), \theta_y(z), \theta_x(z)$ 를 다음과 같이 각각 공간과 시간 함수의 급수형태로 가정하였다.

$$\begin{aligned} &[u_0(z, t), v_0(z, t), \theta_y(z, t), \theta_x(z, t)] \\ &= \sum_{r=1}^N [u_{0r}(z), v_{0r}(z), \theta_{yr}(z), \theta_{xr}(z)] q_r(t) \end{aligned} \quad (37)$$

식(37)에서  $u_{0r}(z), v_{0r}(z), \theta_{yr}(z), \theta_{xr}(z)$ 은 자유진동해석을 통하여 얻어진  $r$ 번째 모우드 형상이며,  $q_r(t)$ 는 비조화 하중의 시간에 대한 함수이다. 이들의 직교 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_0^L [b_1 u_{0r} u_{0s} + b_1 v_{0r} v_{0s} + (b_4 + b_{14}) \theta_{xr} \theta_{xs} \\ + (b_5 + b_{15}) \theta_{yr} \theta_{ys}] dz = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

식(37)에서 가정된 해를 운동방정식에 대입하고, 식(38)에서 주어진 직교성(orthogonality)을 이용하여 정리한 후 감쇠를 고려하여 운동방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$\ddot{q}_r(t) + 2\zeta\omega_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = \frac{H_{2r}}{H_{1r}} \quad (39)$$

( $r = 1, \dots, N$ )

여기에서,

$$\begin{aligned} H_{1r} &= \int_0^L [b_1 u_{0r}^2 + b_1 v_{0r}^2 + (b_4 + b_{14}) \theta_{xr}^2 \\ &\quad + (b_5 + b_{15}) \theta_{yr}^2] dz \\ H_{2r} &= - \int_0^L [h_4' u_{0r} + h_3' \theta_{xr} - h_4 \theta_{yr}] dz \end{aligned} \quad (40 \text{ a,b})$$

## 6. Thermal Flutter 해석

동적 응답의 안정도 판별은 운동방정식을 Laplace transform을 한 후 Routh-Hurwitz의 안정도 판별법을 이용하여 구할 수 있다[4].

식(39)를 Laplace transform한 후 정리하면 다음과 같은 안정성을 결정하는 특성방정식을 얻을 수 있다.

$$G(s) = As^3 + Bs^2 + Cs + D \quad (41)$$

위 식에서 A, B, C, D는 Appendix B에 수록하였다.

특성방정식을 Routh-Hurwitz criterion[7]에 적용하면 다음과 같은 안정성 판별 조건을 얻을 수 있다. 식(42), 식(43)

에서 감쇠비( $\xi$ )가 일정할 때,  $\eta$ 와  $x$ 의 관계식을 만족시키는 영역이 구조물의 안정도 판별 영역이 된다. 즉, 식(42), 식(43)의 해를 만족시키는 영역에 포함되면, 구조물은 안정하며, 해를 만족시키는 영역을 벗어나면 불안정성을 나타낸다. 감쇠비( $\xi$ )는 실험을 통하여 얻을 수 있으나, 본 논문에서는 Thornton[4]의 결과와 비교하기 위하여 Thornton이 적용한 감쇠비( $\xi$ )를 이용하였다.

$$\eta < \frac{2\xi x^2 + 4\xi^2 x + 2\xi}{x} \quad (42)$$

$$x + x\eta > 0 \quad (43)$$

여기에서,

$$x = \frac{1}{\omega_1 \tau} \quad (44)$$

$$\eta = \frac{1}{\omega_1^2} \sum_{j=1}^N \left( \frac{O_1}{H_1} \int_0^L \theta_{xj}' u_{0j} dz - \frac{O_2}{H_1} \int_0^L \theta_{xj}' \theta_{xj} dz - \frac{O_1}{H_1} \int_0^L \theta_{xj} \theta_{y1} dz \right) \quad (45)$$

여기에서,  $\omega_1$ 은 첫 번째 고유진동수이고, 무차원 상수  $x$ 는 진동계의 구조응답시간( $\omega$ )과 열응답시간( $\tau$ )의 비이며,  $\eta$ 는 열팽창계수( $\alpha_T$ )와 정상상태 섭동온도 식(6)의  $T^*$ 에 비례하는 값으로 온도 변화에 의해 발생하는 응답의 측정기준이 된다.

## 7. 수치해석 결과 및 고찰

본 예제에서 해석한 복합재료(graphite-epoxy) 보와 PZT-4 압전 세라믹의 치수와 물성치는 다음과 같다.

### 복합재료 보

$$\begin{aligned} E_1 &= 2.068 \times 10^{11} \text{ N/m}^2 \\ E_2 &= E_3 = 5.171 \times 10^9 \text{ N/m}^2 \\ G_{12} &= G_{31} = 3.103 \times 10^9 \text{ N/m}^2 \\ G_{23} &= 2.551 \times 10^9 \text{ N/m}^2 \\ \nu_{21} &= \nu_{31} = 0.00625 \\ \nu_{32} &= 0.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho &= 1576 \text{ kg/m}^3 \\ R &= 1.092 \times 10^{-2} \text{ m} \\ h &= 2.35 \times 10^{-4} \text{ m} \\ L &= 5.91 \text{ m} \\ \alpha &= 0.92 \\ \varepsilon &= 0.84 \\ k &= 1.731 \text{ W/mK} \end{aligned}$$

### PZT-4 압전 세라믹

$$\begin{aligned} C_{11}^p &= 138.97 \text{ GPa} \\ C_{12}^p &= 77.757 \text{ GPa} \\ C_{13}^p &= 74.24 \text{ GPa} \\ C_{33}^p &= 114.98 \text{ GPa} \\ C_{44}^p &= 25.59 \text{ GPa} \\ \rho_p &= 7496 \text{ kg/m}^3 \\ e_{31} &= -5.201 \text{ N/mV} \end{aligned}$$

Fig. 6은 Thornton의 연구 결과와 비교한 HST의 안정성 판별 그래프이다[4]. Thornton이 첫 번째 모우드만 고려한 것에 비하여, 본 논문에서는 여섯 번째 모우드까지 고려하여 안정도 조건을 구하였다. Thornton의 연구 결과에 비하여 불안정한 영역에 있음을 알 수 있다. 따라서, 열적 플러터가 발생할 수 있는 구조물의 설계에 있어서 안전을 위하여 본 연구의 결과치를 이용하는 것이 더 유용할 것이다.

Fig. 7은 보에 입사되는 태양열 플럭스가 증가함에 따른 안정성의 변화를 나타내는 그래프로, 태양열 플럭스의 크기가 증가함에 따라 불안정성이 증가하였다. 또한, 태양열 플럭스의 입사각( $\beta$ )에 따라 불안정성이 변함을 알 수 있다. 이것은 보의 변위와 태양열 플럭스의 입사각이 연성된 경우(coupled case)에 발생하며, 보에 입사되는 태양열 플럭스의 수직성분이 시간에 따라 변하기 때문이다.

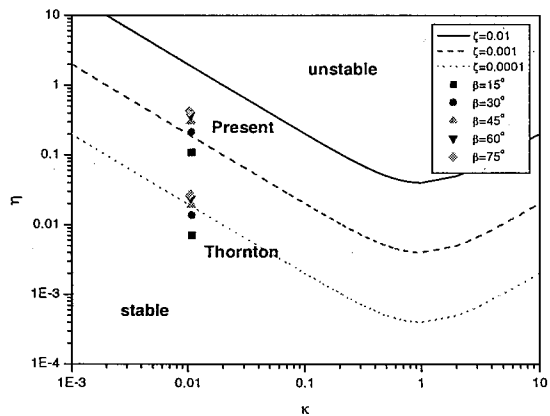


Fig. 6 Stability boundaries for an isotropic material boom(HST: Stainless steel).

즉, 보에 입사되는 태양열 플럭스의 크기가 시간에 따라 변하므로, 이것이 하중함수로 작용하여 불안정성을 발생시키는 원인이 된다. 따라서, 입사각이 커지면 시간에 따라 변하는 열 하중의 차이도 커지므로 불안정성은 증가하게 되며, 보의 변위와 입사각이 연성되어 있지 않은 경우(uncoupled case)에는 플러터가 발생하지 않는다. Fig. 8은



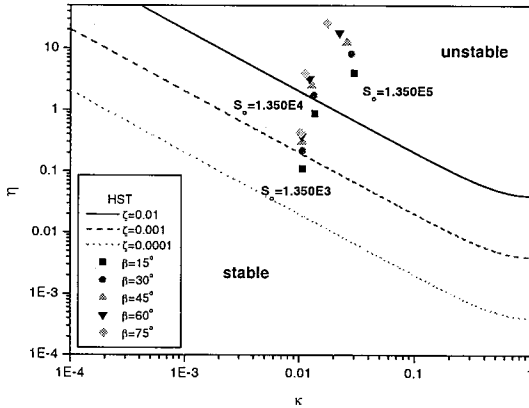


Fig. 7 Stability boundaries for a isotropic material boom with different heat flux levels(HST: Stainless steel).

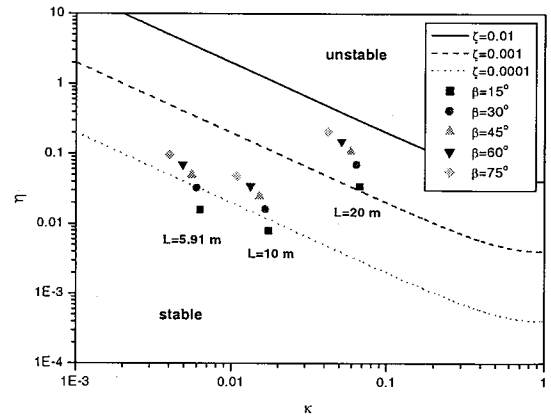


Fig. 9 Stability boundaries for a composite boom with a tip mass ([60/-60],  $m_{tip}=0.01\text{kg}$ )

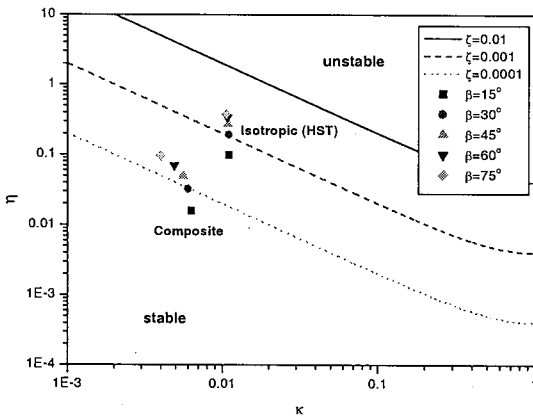


Fig. 8 Stability boundaries for a composite boom with a tip mass ([60/-60],  $m_{tip}=0.01\text{kg}$ ).

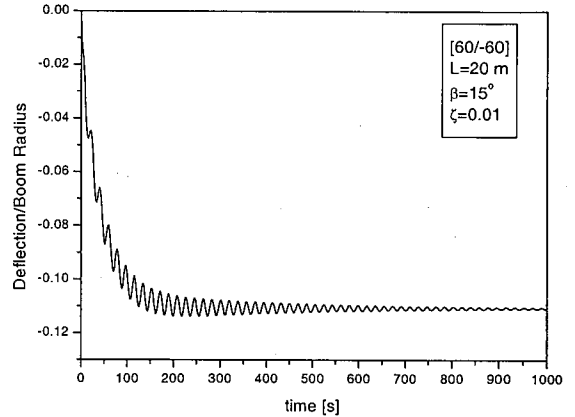


Fig. 10 Stable boom deflection(y-direction), coupled thermo-structural analysis( $m_{tip}=0.01\text{kg}$ ).

HST의 경우와 비교하기 위하여 HST와 동일한 길이(L), 두께(h), 반경(R)을 가진 복합재료 보에 대하여 안정성 조건을 구하였다. Fig. 8에서 보면 복합재료(graphite/epoxy)보의 경우가 등방성 재료(stainless steel)인 HST에 비하여 안정함을 알 수 있다. 이것은 복합재료 보의 섬유각의 변화와 적층을 통하여 플러터의 발생을 조절할 수 있음을 의미한다. 따라서, 동일한 크기와 형상에서 경량이며, 필요한 안정성을 얻을 수 있는 복합재료가 등방성 재료에 비하여 우수함을 알 수 있다.

Fig. 9는 복합재료 보의 길이 변화에 따른 안정도 판별 그래프이다. 보의 길이가 증가함에 따라 불안정성이 증가함을 알 수 있다. 이것을 검증하기 위하여, Fig. 10과 Fig. 11에서 각각의 조건에 따른 응답을 구하였다. Fig. 10은 보

의 길이(L)가 20m, 적층각( $\theta$ )이 [60/-60], 감쇠계수( $\zeta$ )가  $10^{-2}$ 인 경우로, 안정도 판별 그래프(Fig. 9)에서 안정성조건을 만족하므로 플러터가 발생하지 않았다. Fig. 11은 보의 길이(L)가 20m, 적층각( $\theta$ )이 [60/-60], 감쇠계수( $\zeta$ )가  $10^{-4}$ 인 경우로, 안정도 판별 그래프(Fig. 9)에서 불안정영역에 있으므로 플러터가 발생함을 알 수 있다. 또한, Fig. 10과 Fig. 11에서 보에 입사되는 태양열 플럭스의 입사각( $\beta$ )이 커지면 불안정성은 커지지만, 보의 변위의 크기는 감소함을 알 수 있다. 이것은 입사각이 커지면 보에 입사되는 태양열 플럭스의 수직성분의 크기가 작아지기 때문이다.

Fig. 12는 비례제어이득( $\bar{K}_p$ )이 증가함에 따라 첫 번째 고유 진동수( $\omega_1$ )가 증가함을 알 수 있다. 또한, 섬유각

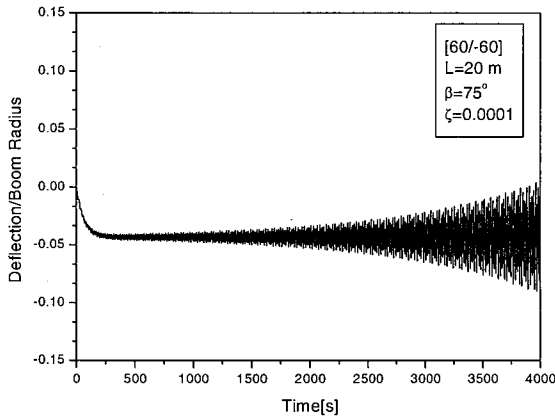


Fig. 11 Unstable boom deflection(y-direction), coupled thermal structural analysis( $m_{tip}=0.01\text{kg}$ ).

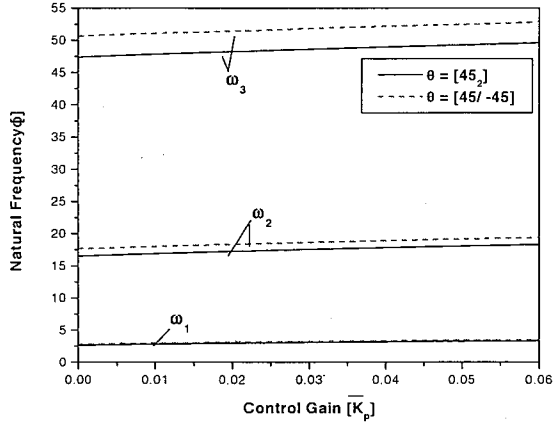


Fig. 13 Variation of the natural frequency with proportional control gain.

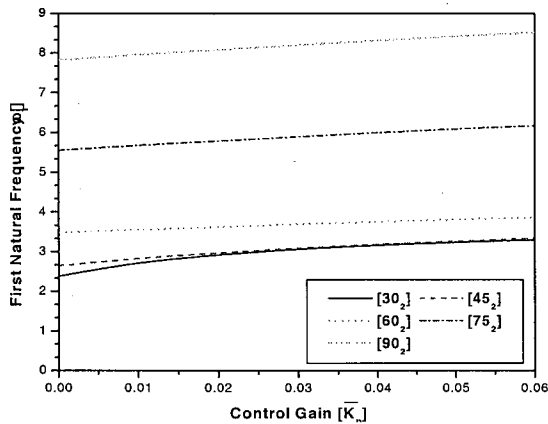


Fig. 12 The first natural frequency vs. proportional control gain for different ply angles.

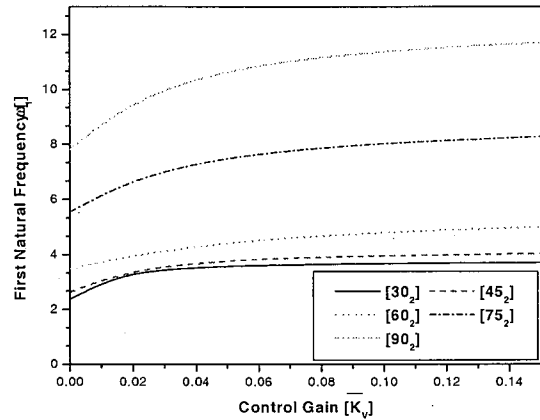


Fig. 14 Variation of the first natural frequency with velocity feedback control gain for different ply angles.

( $\theta$ )의 증가에 따라 고유 진동수가 커짐을 알 수 있으며, 섬유각이 증가함에 따라 고유진동수의 증가율은 감소하였다. 이는 섬유각의 증가에 따라서 구조물의 굽힘 강성( $a_{33}$ )이 크게 증가하기 때문이며, 섬유각의 효과에 비해서 압전의 활성화에 대한 영향은 비교적 작음을 알 수 있다.

Fig. 13은 복합재료 보를 적층한 경우와 적층하지 않은 경우의 비례제어이득의 증가에 따른 고유 진동수의 차이를 나타내는 그래프로 적층한 경우의 고유진동수가 더 큰 값을 가짐을 알 수 있으며, 비례제어이득의 증가에 따른 영향은 두 경우가 유사함을 알 수 있다.

Fig. 14는 속도제어이득 ( $K_v$ )이 증가함에 따라 첫 번째 고유 진동수 ( $\omega_1$ )가 모두 증가함을 알 수 있으며, 섬유각

( $\theta$ )의 증가에 따라 고유 진동수가 큰 값을 갖는다. 또한, 고유 진동수가 변하는 이득의 범위도 증가하였다.

Fig. 15는 복합재료 보를 적층한 경우와 적층하지 않은 경우의 속도제어이득의 변화에 따른 고유 진동수의 차이를 나타내는 그래프로 적층한 경우의 고유진동수가 더 큰 값을 가짐을 알 수 있다.

Fig. 16, Fig. 17은 비례제어이득과 속도제어이득의 변화에 따른 열적 필터의 경계를 나타내는 그래프이다. Fig. 16은 비례제어이득이 커짐에 따라서 안정성이 증가됨을 알 수 있다. Fig. 17은 속도제어이득이 커짐에 따라서 안정성이 증가됨을 알 수 있으며, 비례제어이득의 변화가 속도제어이득의 변화에 비해서 안정성에 더 큰 영향을 주는 것을 알 수 있다.

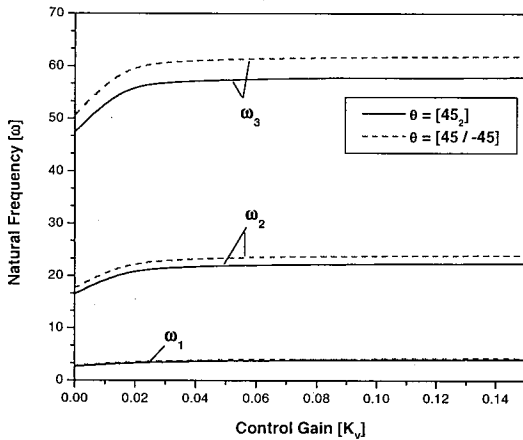


Fig. 15 Variation of natural frequency with velocity feedback control gain.

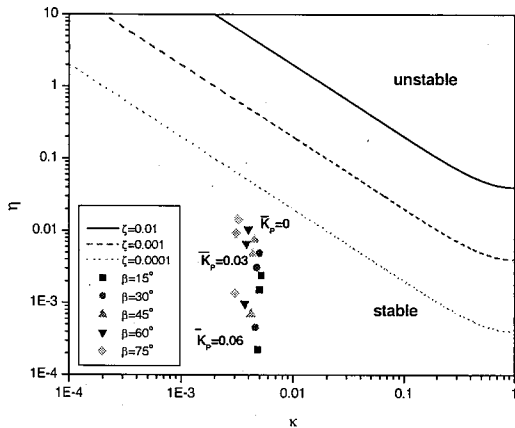


Fig. 16 Stability boundaries for a composite material boom ([60/-60]).

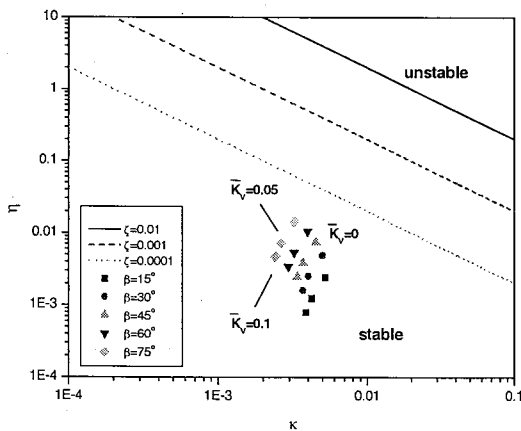


Fig. 17 Stability boundaries for a composite material boom ([60/-60]).

## 7. 결 론

본 연구에서는 외팔 복합재료 유연보-끝단 질량 모델의 운동방정식을 유도하고, 수치해석 기법을 통하여 각 설계 요소의 변화에 따른 열진동 특성을 연구하였으며, 내부에 압전재료를 삽입한 구조물에 대하여 비례제어와 속도귀환 제어 기법을 이용하여 구조물의 고유진동수 및 안정성 조건을 구하였다. 구조물의 변형에 의해 온도분포가 변화한다는 가정(coupled case)에서 동적 응답 해석 및 열 필터 해석을 통하여, 안정성 조건을 구하였다. 구조물의 길이의 변화에 의한 안정성 조건을 도출하였으며, 태양열 플릭스의 크기 및 입사각에 따른 구조물의 안정도 판별과 응답해석을 수행하였다.

앞의 결과에서 알 수 있듯이 복합재료는 경량이며 섬유각 ( $\theta$ )의 변화 및 적층을 통하여 필터 발생의 억제가 가능하므로 등방성 재료에 비하여 우주 구조물의 재료로 사용할 경우 임무 수행의 정밀도 향상이 예측된다. 또한, 감지기와 작동기의 역할을 할 수 있는 압전재료를 구조물에 삽입/부착하여 열 하중에 의한 동적 불안정성(instability)을 방지할 수 있었다.

## 후 기

본 연구는 2000년도 한국항공우주연구원의 다목적 실용 위성2호 개발사업 과제의 위탁연구 과제로 수행되었으며 이에 연구를 지원하여주신 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참고문헌

- 1) Seibert, A. G., and Rice, J. S., "Coupled Thermally Induced Vibrations and Beams," *AIAA Journal*, Vol. 7, No. 7, 1973, pp. 1033-1035.
- 2) Takeuti, Y., and Furukawa, T., "Considerations on Thermal Shock Problems in A Plate," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, 1981, pp. 113-118.
- 3) Johnston, J. D., Thornton, E. A., "Thermally Induced Attitude Dynamics of a Spacecraft with Flexible Appendage," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 21, No. 4, 1998, pp. 581-587.
- 4) Thornton, E. A., and Kim, Y. A., "Thermally Induced Bending Vibration of a Flexible Rolled-Up Solar Array," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 30, No. 4, 1993,

pp. 438-448.

- 5) Thornton, E. A., Thermal Structures for Aerospace Applications, *AIAA, Education series*. 1996, pp. 343-396.
- 6) Song, O., "Modeling and Response Analysis of Thin-Walled Beam Structures Constructed of Advanced Composite Materials," *Ph.D Thesis*, VPI & SU, USA, 1990.
- 7) Song, O., Kim, J., Librescu, L., "Synergistic implications of tailoring and adaptive materials technology on vibration control of anisotropic thin-walled beams," *International Journal of Engineering Science*, Vol. 39, 2001, pp. 71-94.
- 8) 김종식, 선형 제어시스템 공학, 청문각, 1998, pp. 123-127.

### Appendix A

$$C_{M_s}^s = \oint_C [x \left\{ \left(1 - \frac{A_{12}}{A_{11}}\right) \sum_{p=1}^1 e_{31}^p (n_{p+} - n_{p-}) \right\} + \frac{dv}{ds} \left\{ \sum_{p=1}^1 e_{31}^p \left[ \frac{1}{2} (n_{p+}^2 - n_{p-}^2) - \frac{B_{12}}{A_{11}} (n_{p+} - n_{p-}) \right] \right\}] ds$$

$$C_{M_x}^s = \int_C [y \left\{ \left(1 - \frac{A_{12}}{A_{11}}\right) \sum_{p=1}^1 e_{31}^p (n_{p+} - n_{p-}) \right\} - \frac{dx}{ds} \left\{ \sum_{p=1}^1 e_{31}^p \left[ \frac{1}{2} (n_{p+}^2 - n_{p-}^2) - \frac{B_{12}}{A_{11}} (n_{p+} - n_{p-}) \right] \right\}] ds$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^m \int_{h(k)} \overline{Q_{ij}}^{(k)} dn + \sum_{p=1}^1 \int_{h(p)} C_{ij}^{(p)} dn \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$A_{ij} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^N \overline{Q_{ij}} [h_k - h_{k-1} - \frac{4}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \frac{1}{h^2}] + \frac{5}{4} \sum_{p=1}^1 C_{ij} [h_p - h_{p-1} - \frac{4}{3} (h_p^3 - h_{p-1}^3) \frac{1}{h^2}] \quad (i, j = 4, 5)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{h(k)} \overline{Q_{ij}}^{(k)} n dn + \sum_{p=1}^1 \int_{h(p)} C_{ij}^{(p)} n dn$$

### Appendix B

A = I : Identity matrix

$$B = (2\xi\omega_r + \frac{1}{\tau})I$$

$$C = (\omega_r^2 + \frac{2\xi\omega_r}{\tau})I$$

$$D_{ij} = \frac{\omega_r^2}{\tau} \delta_{ij} + \frac{O_1}{H_1 \tau} \int_0^L \theta_{sj}' u_{0r} dz - \frac{O_2}{H_1 \tau} \int_0^L \theta_{sj}' \theta_{sr} dz - \frac{O_1}{H_1 \tau} \int_0^L \theta_{sj} \theta_{sr} dz$$

여기에서,

$$O_1 = T^* \underline{Q_3} \pi R \sin \beta$$

$$O_2 = T^* (\pi R^2 \underline{Q_1} + \pi R \underline{Q_2}) \sin \beta$$

$$\underline{Q_1} = \sum_{k=1}^N \int_{h(k)} (Q_1^{(k)} - \frac{A_{12}}{A_{11}} Q_5^{(k)}) dn$$

$$\underline{Q_2} = \sum_{k=1}^N \int_{h(k)} (Q_3^{(k)} n - \frac{B_{12}}{A_{11}} Q_5^{(k)}) dn$$

$$\underline{Q_3} = \sum_{k=1}^N \int_{h(k)} (Q_2^{(k)} - \frac{A_{16}}{A_{11}} Q_5^{(k)}) dn$$

$$Q_1^{(k)} = \overline{Q_{12}} \overline{\alpha_s} + \overline{Q_{22}} \overline{\alpha_z} + \overline{Q_{26}} \overline{\alpha_{sz}}$$

$$Q_2^{(k)} = \overline{Q_{16}} \overline{\alpha_s} + \overline{Q_{26}} \overline{\alpha_z} + \overline{Q_{66}} \overline{\alpha_{sz}}$$

$$Q_3^{(k)} = \overline{Q_{12}} \overline{\alpha_s} + \overline{Q_{22}} \overline{\alpha_z} + \overline{Q_{26}} \overline{\alpha_{sz}} = Q_1^{(k)}$$

$$Q_5^{(k)} = \overline{Q_{11}} \overline{\alpha_s} + \overline{Q_{12}} \overline{\alpha_z} + \overline{Q_{16}} \overline{\alpha_{sz}}$$

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_s} &= \alpha_s m^2 + \alpha_z n^2 \\ \overline{\alpha_z} &= \alpha_z m^2 + \alpha_s n^2 \\ \overline{\alpha_{sz}} &= 2(\alpha_s - \alpha_z) mn \end{aligned}$$

여기에서,

$$m \equiv \cos \theta, \quad n \equiv \sin \theta$$

$\alpha_s, \alpha_z$  : Thermal expansion coefficient