

論文

비대칭물성을 고려한 일축방향 섬유강화 복합재료
C링의 점탄성적 거동해석

이명규* · 이창주** · 박종현*** · 정관수* · 김준경**** · 강태진*

Viscoelastic Bending Behaviors of Unidirectional
Fiber Reinforced Composite
C-rings with Asymmetric Material Properties

M. G. Lee*, C. J. Lee**, J. H. Park***, K. Chung*, J. Kim**** and T. J. Kang*

ABSTRACT

In order to optimize the design of unidirectional fiber reinforced composite C-rings, a viscoelastic load relaxation behavior was analyzed under a point load. Initially, the deflection and bending stiffness were calculated based on the elastic beam theory and the viscoelastic relaxation and creep behaviors were derived from the elastic solution using the correspondence theorem. Besides the orthotropic mechanical properties of the composite, asymmetric mechanical property due to the different tensile and compressive properties were also considered. Except the deviation affected by the relatively large thickness of the specimen compared to the radius, the calculated relaxation showed good agreement with the experimental result.

초 록

일축방향 섬유강화 복합재료 C링의 최적설계를 위하여, 이의 점 하중 하에서의 점탄성적 하중완화거동을 해석하였다. 이를 위하여 곡선보의 굽힘이론을 이용하여 탄성학적 처짐과 굽힘강성의 해석을 수행한 후 상당원리(correspondence theorem)를 이용하여 점탄성학적 하중완화 거동을 해석하였다. 일축방향 섬유강화 복합재료의 직교이방성 뿐만 아니라 복합재료의 인장강성과 압축강성의 차이에서 기인하는 비대칭물성도 함께 고려하였다. 그 결과 C링의 단면의 두께가 반지름에 비해 충분히 작은 보라면 보이론만으로도 정확하게 곡선보를 해석할 수 있고 하중완화 이론값 또한 실험값과 잘 일치하고 있음을 알 수 있었다.

* 서울대학교 재료공학부

** SKC(株) 중앙연구소

*** 효성(株) 중앙연구소

**** 한국과학기술연구원 고분자하이브리드연구센터

서 론

섬유강화 복합재료는 우수한 내구성, 경량성, 가공성에 힘입어 최근 그 사용이 급속히 증가하고 있다. 이러한 복합재료는 항공산업 또는 자동차 산업등에서 기계 부품 등에 많이 쓰이는데 이들 부품은 주로 보, 쉘, 판의 형상을 하고 있다. 이 중 가장 많이 이용되는 것 중의 하나가 곡선보(curved beam)이다. 본 연구는 일축방향 탄소섬유강화 복합재료로 만들어진 C링 형태를 이룬 의료용 골고정용기기의 점탄성거동의 해석에 관한 것이다.

최근에는 골 고정용으로 사용되고 있는 C링형 외부 고정기기를 그 경량성과 X선 투과성능 등의 장점을 고려하여 주요부인 링을 탄소섬유강화 복합재료로 제조하여 기존의 금속제품을 대체하려는 노력이 진행 중이다. 이 고정기기는 시술시 약 1300N의 힘을 가하여 고정시키고자 하는 뼈에 부착되어 오랜 시간동안 같은 형태를 유지하게 된다(Fig.1). 이 고정기기는 일정 하중 하에서 적절한 굽힘강성을 오랫동안 유지하여야 하기 때문에 우수한 성능을 갖춘 C링을 설계하기 위하여

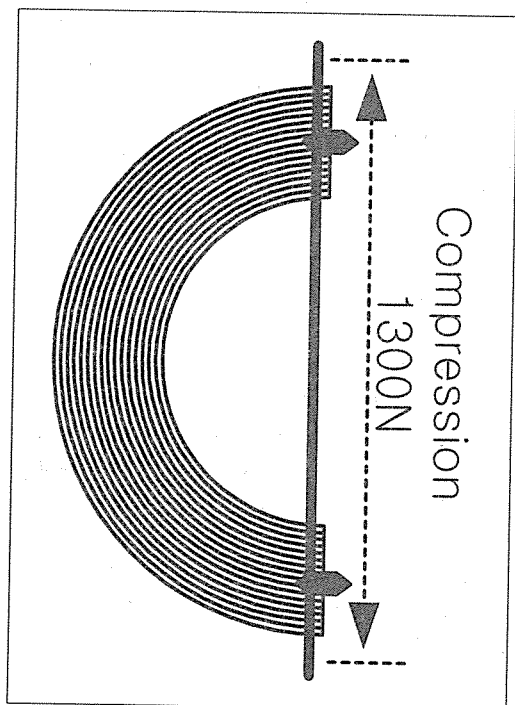


Fig.1 Fixation of the C-ring, fiber-reinforced along the radial direction

서는 복합재료 C링의 점탄성적 거동에 대한 역학적 해석이 필요하다. 그리하여 본 연구에서는 단면이 직사각형인 C링 모양의 복합재료가 일정한 형태를 유지하는 경우 시간에 따라 변하는 응력완화 현상을 점탄성적 해석을 통하여 알아보았다.

C링이 하중을 받을 때 탄성거동을 알면 그로부터 점탄성 거동을 유도할 수 있으므로(correspondence theorem[1]) 먼저 복합재료 곡선보의 탄성해를 구하였다. 섬유강화 복합재료 C링의 탄성해를 구하는 방법에는 탄성학적인 방법, 재료강도학적방법 그리고 수치해석을 이용한 방법 등이 있다. 본 연구에서는 C링의 해석을 위하여 재료강도학적인 방법인 곡선보의 굽힘이론(bending theory of curved beams)을 도입하였다. 이는 얻어진 해석적인 해가(analytic solution) 간단하면서도 C링의 굽힘강성등에 영향을 미치는 인자들을 쉽게 나타낼 수 있는 장점을 가진다.

곡선보의 굽힘은 Timoshenko에 의하여 오일러-베르누이(Euler-Bernoulli)의 이론을 이용하여 잘 정립되었으며[2], Fernandez 와 Tisinai는 응력-부식(stress-corrosion)시편에 곡선보의 굽힘이론을 응용하기도 하였다[3]. 그러나 이러한 문헌에서 일반적으로 다루는 것은 등방성(isotropic)물질에 관한 것으로 섬유강화 복합재료와 같은 비등방성을 고려하지 않았다. 여기서 다루는 일축방향 섬유강화복합재료는 직교이방성의(orthotropic)성질을 가지는데 등방성 물질과는 달리 강화섬유 방향의 물성이 섬유와 수직인 방향의 물성과 전단방향의 물성과는 차이가 크다. 그러므로 비등방성 섬유강화 복합재료로 된 곡선보의 해석을 위해서는 방향에 따른 응력차이를 고려하여야 한다.

또한 섬유강화 복합재료는 흔히 인장강성과 압축강성이 서로 다른 값을 가진다(bimodular property). 일반적으로 압축강성이 인장강성보다 작은 값을 나타내는데 Hancox, 그리고 Piggott 와 Harris의 연구에 따르면 일방향 탄소/에폭시 복합재료의 경우 압축강성이 인장강성의 80~85% 정도라고 알려져 있다[4,5]. 이러한 비대칭물성을 보이는 섬유강화복합재료 곡선보의 굽힘을 해석할 때는 기존의 곡선보의 굽힘이론에서와 같이 응력성분의 중첩에 의한 탄성이론을 전개할 수 없다. 본 연구에서는 복합재료의 비대칭물성을 고려하여 탄성해를 구했으며 유한요소법 및 실험에 의한 결과와 비교하였다. 또한 섬유강화복합재료 C링의 탄성해를 이용하여 시간에 따른 C링의 응력완화를 해석하기 위하여 점탄성이론을 이용하였으며 해석결과를 실

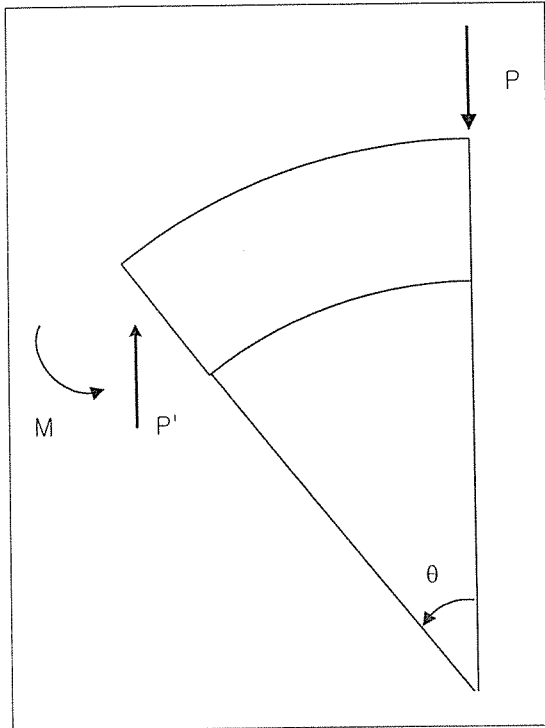


Fig.2 A free-body diagram of a curved beam

힘치와 비교하였다.

본 론

1. 탄성해

Fig.2 에서는 반원 모양의 곡선보의 정상에 일정한 하중 P 를 가할 때 힘을 작용하는 점에서 θ 만큼 떨어진 단면에서 발생하는 모멘트 M 과 작용력 P' 를 보여주고 있다. 그러므로 단면에 작용하는 원주방향 힘과 모멘트는 다음과 같다.

$$F = -P \sin \theta, M = PR \sin \theta$$

오일러-베르누이 이론에 의한 곡선보 이론을 적용하여, 곡선보의 단면에 작용하는 원주방향 힘(F)과 모멘트(M)에 의한 변형만을 고려할 때 단면의 평평함이 유지된다고 가정하면, 단면에서의 원주방향의 변형률

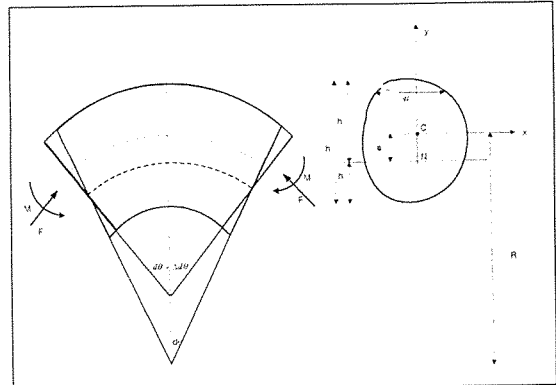


Fig.3 The curvature change of a curved beam when the cross-sectional plane remains plane

(circumferential strain)은 다음과 같이 된다(Fig.3).

$$\epsilon_c = \frac{e+y}{R+y} \frac{\Delta d\theta}{d\theta} \quad (1)$$

이 식에서 e 는 중심선(단면의 기하학적 중심점을 통과하는 선으로 여기서는 좌표축의 원점에 위치한다)에서 중립면(ϵ_c 와 원주방향 응력 σ_c 가 없어지는 면)까지의 거리이고, R 은 C링의 중심선의 원래 곡률반경으로서 여기서는 상수이며 $\Delta d\theta/d\theta$ 는 각 단면에서의 곡선보의 곡률의 변화율을 나타낸다.

단면에 작용하는 F 와 M 에 의하여 원주방향의 응력(σ_c)이 발생하게 되어 다음의 관계식이 얻어진다.

$$\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c}$$

이 식에서 E_c 는 원주방향의 탄성계수를 나타내며 여기서 ϵ_c 는 F 와 M 에 의하여 발생된 σ_c 에 의한 원주방향의 변형률만을 나타내며 실제 원주방향의 변형률은 이외에 반지름 방향의 응력 σ_r 에 의하여 추가 변형률이 생기게 된다. 한편, 원주방향의 인장과 압축강성이 원주방향의 응력에 의하여 결정되는 경우 중립면을 기준으로 인장부분의 강성(tensile modulus)을 E_c^t , 압축부분의 강성(compressive modulus)을 E_c^c 라 하면 다음과 같은 식이 성립한다.

¹대칭물성을 가지는 C링의 e , $\Delta d\theta/d\theta$ 및 식 12)~14)에서의 상수 u_c , u_r , u_t 의 값도 Appendix에 나타내었다.

$$\begin{aligned}\alpha_c &= E_c^t \epsilon_c \quad (-e \leq y \leq h/2) \\ &= E_c^c \epsilon_c \quad (-h/2 \leq y \leq -e)\end{aligned}\quad (2)$$

C링의 단면에서의 힘(F)과 모멘트(M)의 평형식을 고려한 다음의 두 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}M &= \int y \sigma_c(y) dA = E_c^c \frac{\Delta \theta}{d\theta} \int_{-h/2}^e \frac{y(e+y)}{R+y} dA \\ &+ E_c^t \frac{\Delta \theta}{d\theta} \int_{-e}^{h/2} \frac{y(e+y)}{R+y} dA\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}F &= \int \sigma_c(y) dA = E_c^c \frac{\Delta \theta}{d\theta} \int_{-h/2}^e \frac{e+y}{R+y} dA \\ &+ E_c^t \frac{\Delta \theta}{d\theta} \int_{-e}^{h/2} \frac{e+y}{R+y} dA\end{aligned}\quad (4)$$

식 (3)과 (4)는 e 와 $\Delta \theta/d\theta$ 에 대한 연립관계식이 된다.¹ 원주방향의 인장, 압축강성이 동일한 경우 이들 식의 해는 모멘트와 작용력에 의한 원주방향의 변형률을 따로 고려한 중첩하여 해를 쉽게 구할 수 있으나 여기서는 중첩이론을 쓸 수 없다. 결국, 단면의 폭이 상수인 경우(직사각형 단면)를 고려하여 식 (3)과 (4)에서 얻어진 해와 식(1)과 (2)를 이용하면 원주방향의 응력성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\alpha_c &= C_t \cdot \text{Psin}\theta \frac{e+y}{R+y} \quad (-e \leq y \leq h/2) \\ &= C_c \cdot \text{Psin}\theta \frac{e+y}{R+y} \quad (-h/2 \leq y \leq -e)\end{aligned}\quad (5)$$

이식에서 C_t, C_c 는 인장 및 압축강성 그리고 C링의 기하학적 매개변수에 의해 결정되는 상수이며 이를 Appendix에 나타내었다. 일반적으로 등방성 곡선보의 경우와 달리, 섬유강화복합재료의 경우 반지름 방향의 강성이 원주방향의 강성에 비해 작은 값을 나타내어 굽힘강성을 구할 때 무시할 수 없는 성분이 된다.

곡선보의 단면에 작용하는 원주방향의 응력성분 외에 반지름방향과 전단방향의 응력성분(α_s)을 구하기 위하여 원주방향과 반지름 방향의 힘의 평형을 이용하면 아래의 두 평형방정식을 쉽게 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial y} + \frac{1}{R+y} \frac{\partial \sigma_s}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \alpha_c}{R+y} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{1}{R+y} \frac{\partial \alpha_c}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_s}{\partial y} + \frac{2\sigma_s}{R+y} = 0 \quad (7)$$

여기서 얻어진 α_s 는 다음의 조건을 만족하게 된다.

$$\int \sigma_s ds = P \cos \theta$$

식 (6)과 (7)을 연립하여 반지름 방향과 전단방향의 응력성분(α_s)을 구하면 다음과 같다.

$$\sigma_r = C_t \cdot \text{Psin}\theta \frac{y^2 + 2ey + S_t}{2(R+y)^2} \quad (-e \leq y \leq h/2) \quad (8)$$

$$= C_c \cdot \text{Psin}\theta \frac{y^2 + 2ey + S_c}{2(R+y)^2} \quad (-h/2 \leq y \leq -e)$$

$$\alpha_s = -C_t \cdot P \cos \theta \frac{y^2 + 2ey + S_t}{2(R+y)^2} \quad (-e \leq y \leq h/2) \quad (9)$$

$$= -C_c \cdot P \cos \theta \frac{y^2 + 2ey + S_c}{2(R+y)^2} \quad (-h/2 \leq y \leq -e)$$

상수 S_t, S_c 도 C_t, C_c 와 마찬가지로 인장 및 압축강성, C링의 기하학적 매개변수에 의해 결정되는 값이며 Appendix에 나타내었다.

곡선보의 처짐은 Castigliano의 이론으로 구할 수 있다. 이는 탄성체가 독립적인 외력들을 받을 때 외력이 작용하는 점에서 그 외력이 작용하는 방향으로의 변형(δ)은 전체 탄성변형에너지(U_{tot})를 외력으로 편미분함으로서 구할 수 있다는 이론이다[6,7].

$$\delta = \frac{\partial U_{tot}}{\partial P} \quad (10)$$

이 때 전체 탄성변형에너지는 응력성분에 의한 변형에너지의 합으로 나타낼 수 있다.

$$U_{tot} = U_c + U_r + U_s + U_{c,r} + U_{r,c}$$

위 식의 오른쪽 항은 차례로 원주방향의 응력, 반지름 방향의 응력, 전단방향의 응력에 의해 생기는 변형에너지와 반지름방향의 응력 때문에 발생하는 원주방

항의 부가적인 변형에너지와 원주방향의 응력 때문에 생기는 반지름방향의 추가변형율(ϵ_{rc})에 의한 부가적인 변형에너지를 나타낸다.

각각의 응력성분은 중립선($y=e$)을 중심으로 위, 아래에서 응력분포가 다르므로, σ_c 에 의한 인장부분과 압축부분으로 나누어서 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} U_c &= \int_V \frac{\sigma_c^2}{2E_c} dV = \int_V \frac{(\sigma_c^t)^2}{2E_c} dV + \int_V \frac{(\sigma_c^c)^2}{2E_c} dV \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_{-c}^{h/2} \frac{(\sigma_c^t)^2}{2E_c} w(R+y) dy d\theta \\ &\quad + \int_0^{\pi} \int_{h/2}^c \frac{(\sigma_c^c)^2}{2E_c} w(R+y) dy d\theta \end{aligned} \quad (11)$$

위식에서 σ_c^t , σ_c^c 는 각각 인장과 압축이 작용하는 원주방향의 응력을 나타낸다. 수치해석용 소프트웨어인 Matlab[8]을 이용하여 적분을 수행하면 다음과 같은 해를 구할 수 있다.

$$U_c = u_c \frac{P^2}{E_c} \quad (12)$$

이 식에서 U_c 는 C링의 기하적 매개변수와 인장탄성계수와 압축탄성계수의 비 ($r \equiv \frac{E_c}{E_r}$)에 의해 결정되는 상수값이다. 반지름방향과 전단방향의 변형에너지 또한 위와 같은 방법으로 구하면 아래와 같이 얻어지며 u_r , u_s 은 C링의 기하적 매개변수에 의해서 결정되는 상수값이다(Appendix).

$$U_r = \int_V \frac{(\sigma_r^t)^2}{2E_r} dV + \int_V \frac{(\sigma_r^c)^2}{2E_r} dV = u_r \frac{P^2}{E_r} \quad (13)$$

$$U_s = \int_V \frac{(\sigma_s^t)^2}{2G} dV + \int_V \frac{(\sigma_s^c)^2}{2G} dV = u_s \frac{P^2}{G} \quad (14)$$

위식에서 σ_r^t , σ_r^c , σ_s^t , σ_s^c 는 차례대로 중립선 위, 아래에서의 반지름 방향의 응력, 전단력을 나타내고 E_r 은 반지름 방향의 탄성계수, G 는 전단탄성계수를 나타낸다.

식 (12), (13)과 (14)에서 얻은 u_c , u_r , u_s 는 $\frac{E_c}{E_r}$ 의 함수로서, 이 비율(r)이 같으면 같은 u_c , u_r , u_s 의 값을 갖게

됨을 알 수 있다.

등방성 곡선보의 경우 원주방향의 응력에 의한 변형에너지가 다른 것에 비해 매우 크지만 이방성물질인 복합재료의 경우에는 반지름방향의 응력과 전단방향의 응력에 의한 변형에너지도 무시할 수 없는 값이므로 함께 고려해 주어야 한다. 따라서 전체 변형에너지는 원주방향, 반지름 방향, 전단방향의 응력에 의한 변형에너지의 합으로 가정할 수 있다.

$$U_{tot} \approx U_c + U_r + U_s = \left(\frac{u_c}{E_c} + \frac{u_r}{E_r} + \frac{u_s}{G} \right) P^2 \quad (15)$$

결국, 곡선보의 외력이 작용되는 점에서의 처짐은 다음과 같으며,

$$\delta \approx \frac{\partial U_{tot}}{\partial P} = 2 \left(\frac{u_c}{E_c} + \frac{u_r}{E_r} + \frac{u_s}{G} \right) P \quad (16)$$

곡선보의 강성(bending stiffness)은 다음과 같은 정의에 의하여 구할 수 있다.

$$B \equiv \frac{\partial P}{\partial \delta} = \frac{1}{2 \left(\frac{u_c}{E_c} + \frac{u_r}{E_r} + \frac{u_s}{G} \right)} \quad (17)$$

2. 점탄성해

C링에 변형이 일정하게 가해질 때 시간이 지남에 따라 강성의 변화에 의한 응력완화가 생기므로 원주방향(점유가 배열된 방향)의 강성인 $E_c(t)$ 는 인장부분에서는 $E_c^t(t)$ 압축부분에서는 $E_c^c(t)$ 로 나뉘어 나타낼 수

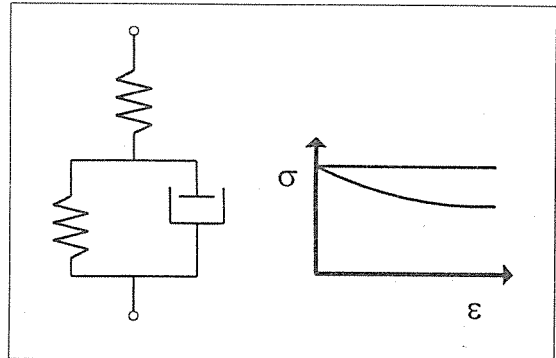


Fig.4 (a) 3-parameter Kelvin solid model and (b) a schematic stress relaxation behavior

있다. C링의 점탄성해를 구하기 위하여는 원주방향의 물성외에 반지름방향 및 전단방향의 물성을 구해야 하지만 원주방향의 물성에 비해 이들 물성을 실험으로 구하기란 그리 쉬운 일이 아니다. 그러므로 원주방향의 물성을 이용하여 반지름 방향 및 전단방향의 물성인 $E_r(t)$, $G(t)$ 를 구하기 위해 다음과 같은 가정을 이용하여 간단히 하였다. 즉, 각 응력성분의 완화현상을 개략적으로 Fig.4에서 보여지는 3상 Kelvin 고체모델의 응력완화현상에서와 같이 초기의 탄성응력이 시간에 따라 완화한다고 보았다. 아울러, 모든 응력성분의 시간에 따른 완화현상은 서로 비례한다고 보았다. 그러므로 $E'_c(t) = \kappa(t)E'_c(t=0)$ 를 이용하면 원주방향의 물성을 알 때 반지름 방향과 전단방향의 물성은 다음과 같다.

$$E'_c(t) = \kappa(t)E'_c(t=0) = \frac{E'_c(t=0)}{E'_c(t=0)} E'_c(t) \quad (18)$$

$$E_r(t) = \kappa(t)E_r(t=0) = \frac{E_r(t=0)}{E'_c(t=0)} E'_c(t) \quad (19)$$

$$G(t) = \kappa(t)G(t=0) = \frac{G(t=0)}{E'_c(t=0)} E'_c(t) \quad (20)$$

이러한 조건에 의하여 u_c , u_r , u_s 는 시간에 의하여 변하지 않는 양이 된다.

C링에 일정한 처짐이 가해질 때 하중의 시간에 따른 완화(relaxation)는 상당원리(correspondence theorem)에 의하여 탄성해인 식(16)으로부터 얻어진다.

$$P(t) = \frac{\delta_0}{2 \left(\frac{u_c}{E'_c(t)} + \frac{u_r}{E_r(t)} + \frac{u_s}{G(t)} \right)} \quad (21)$$

한편, 일정한 하중이 가해지는 경우 처짐의 시간에 따른 늘어남(creep)은 역시 탄성해인 식 (16)으로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$\delta(t) = 2(u_c J'_c(t) + u_r J_r(t) + u_s J_s(t)) P_0 \quad (22)$$

여기서 $J'_c(t)$, $J_r(t)$, $J_s(t)$ 는 크리프 콤프라이언스들로서 선형점탄성의 성질에 의하여 라플라스변환 후 $J'_c \cdot \bar{E}'_c = \frac{1}{s^2}$, $J_r \cdot \bar{E}_r = \frac{1}{s^2}$, $J_s \cdot \bar{G} = \frac{1}{s^2}$ 가 된다.

Table 1 Prepreg Properties

Properties	Value
Fiber	Mitsubishi HS40
Fiber density(g/cm ³)	1.85
Fiber modulus(Gpa)	450
Epoxy density(g/cm ³)	1.26
Epoxy modulus(Gpa)	4.0

실험

1. 시편의 제작

실험에 사용된 복합재료 C링은 Table 1의 성분을 갖는 프리프레그이다. 복합재료의 물성은 섬유의 파괴분율에 따라 달라지므로 파괴분율에 따른 복합재료의 물성을 얻고 그 데이터를 회귀분석하여 원하는 물성을 계산할 수 있다. 복합재료의 파괴분율은 경화과정에서 가해주는 압력과 온도를 조절하여 조절할 수 있었으며 측정은 ASTM D3171-76에 의하였다[9].

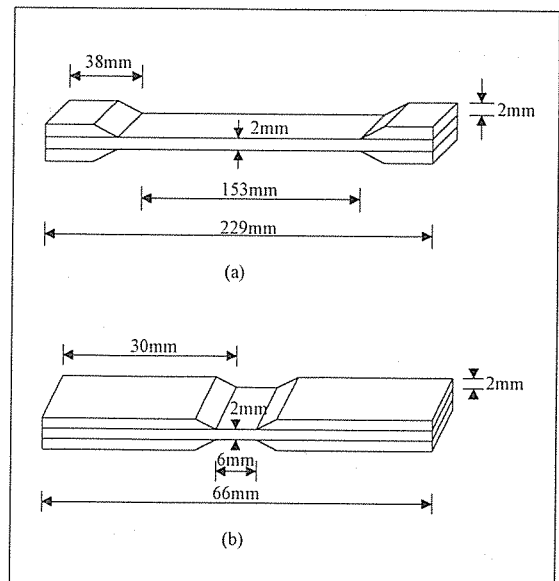


Fig.5 Specimens for (a) tensile and shear and (b) compressive tests

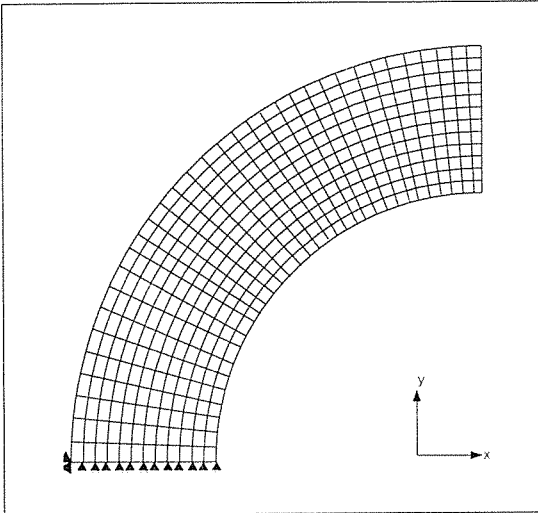


Fig.6 The schematic view of finite element meshes with the kinematic boundary conditions

2. 복합재료 C링의 기본물성과 굽힘강성 측정

C링의 처짐과 강성 그리고 점탄성 거동을 예측하기 위해서는 일축방향 복합재료의 인장강성, 압축강성, 전단강성의 정확한 측정이 필요하다. 섬유강화 복합재료의 기본적인 물성은 인장실험인 ASTM D3039-76 과 압축실험인 ASTM D3410-75[9,10]을 따라 수행하였다. 일축방향 복합재료의 전단강성은 고전 적층이론(classical lamination theory)을 응용하여 $[\pm 45]_{2s}$ 적층 인장시편을 제작하여 측정하였다[10]. Fig.5에 복합재료 기본물성을 측정하기 위하여 본 연구에서 사용한 시편을 나타내었다. C링의 초기 굽힘강성을 측정하기 위하여는 압축실험기를 사용하였으며 얻어진 하중과 변위의 초기 기울기를 굽힘강성으로 정의하였다.

C링의 완화거동은 그림에 C링을 고정시킨 후 하중이 1300N 에 도달할 때까지 크로스헤드(crosshead)를 올린 후 변형율을 유지하면서 시간에 따른 하중의 변화를 측정하였다.

유한요소 해석

곡선보이론을 이용하여 얻은 탄성 해석식과 비교하기 위하여 탄성 유한요소 해석을 수행하였다. 유한요소 해석은 상업용 프로그램 ABAQUS/STANDARD[11]를 이용하였으며 4node 평면응력요소(plane stress

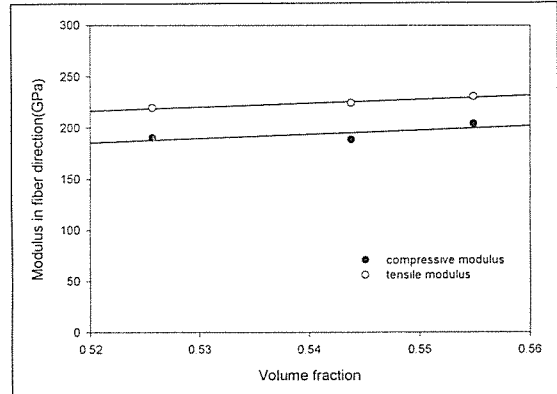


Fig.7 Compressive and tensile moduli with respect to the fiber volume fraction

element)를 사용하였다. Fig.6에 유한요소해석에 사용된 격자(mesh)와 기하학적 경계조건을 개략적으로 나타내었는데 하중과 C링 형태의 대칭성 때문에 링의 절반만을 고려하였다. 실제 해석에 사용된 격자의 개수는 원주방향으로 80개 반지름방향으로 60개의 요소를 사용하였다. 원주방향의 비대칭물성을 구현하기 위하여 요소를 원주방향에 따라 정렬을 이루게 한 후 인장과 압축을 이루는 부분에 각기 다른 물성을 주어서 계산하였다. 원주방향 응력이 인장과 압축을 이루는 경계는 시행착오적으로 찾아내었는데 먼저 대칭물성을 이용하여 경계를 구한 후 이 경계를 이용하여 비대칭물성을 가하여 새로운 경계를 반복적으로 얻어내었다. 7번 반복 후 수렴된 값을 얻을 수 있었다.

결 과

1. 탄소/에폭시 복합재료의 물성

섬유강화 복합재료는 인장강성과 압축강성이 서로 다른 비대칭성물성(bimodular property)을 나타낸다. 보이론에 의한 응력분포를 고려할 때 C링의 원주방향으로의 응력은 중립면을 기준으로 인장 및 압축 방향으로 작용되며 또한 반지름 방향의 응력 또한 압축응력으로 작용한다. 하지만 굽힘강성에 큰 영향을 미치는 응력성분은 원주방향의 성분이고 또 반지름 방향은 지지재인 에폭시의 물성이 지배적이므로 반지름 방향의 물성은 인장과 압축이 같다고 가정하였다.

일축방향 탄소/에폭시 복합재료의 섬유방향의 인장과 압축강성을 실험에 의하여 구한 결과 Fig.7 에서

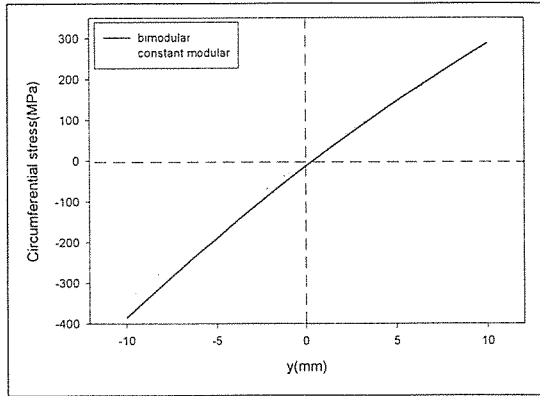


Fig.8 Circumferential stress distribution

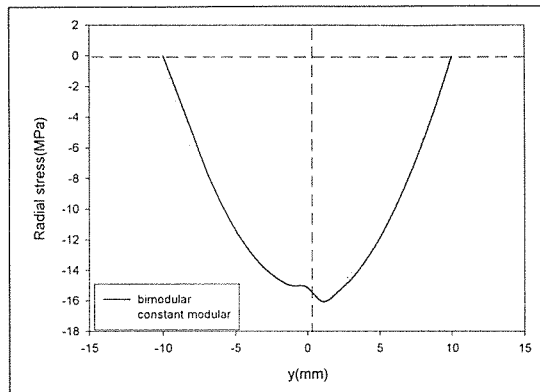


Fig.9 Radial stress distribution

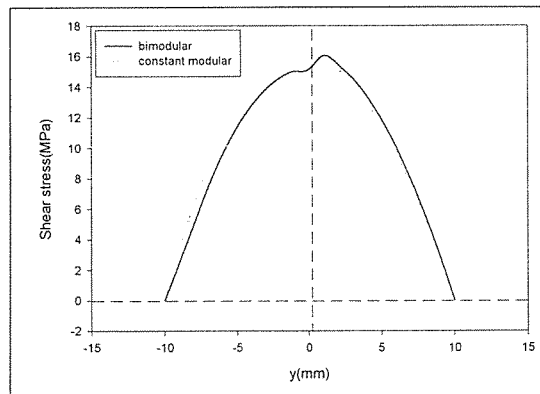


Fig.10 Shear stress distribution

알 수 있듯이 압축 물성이 인장물성보다 약 14%작게 나타났다. 섬유강화 복합재료의 기본적인 물성인 원주방향(섬유방향)의 물성과 반지름방향(섬유에 수직인방

Table 2 Mechanical properties of the fiber-reinforced composite specimen

$$E_t = -42.8 + 497.8V_f(\text{Gpa})$$

$$E_c = -32.9 + 419.9V_f(\text{Gpa})$$

$$E_r = 0.36 + 11.90V_f(\text{Gpa})$$

$$G = -1.9 + 11.80V_f(\text{Gpa})$$

$$\nu_{12} = 0.36 - 0.19V_f(\text{Gpa})$$

향) 및 전단방향의 물성을 부피분율을 달리하여 인장실험과 압축실험을 하여 구하였으며 선형회귀(linear regression)한 결과는 Table 2에 보인 바와 같다.

2. 섬유강화 복합재료 C링의 탄성해

(1) C링 단면에서의 응력분포

C링에 하중이 작용할 때 생기는 응력은 원주방향의 응력, 반지름 방향의 응력, 전단방향의 응력이 존재한다. 이 응력들을 비대칭물성을 고려한 보이론을 이용하여 계산하였다. 계산에 사용된 수치들은 반지름 95mm, 높이20mm, 폭6mm이고 C링의 물성은 부피분율 60%일 때의 Table 2에 의해 구하였으며 압축강성은 인장강성의 86%였다. Fig.8~10에 비대칭물성을 고려한 해와 압축강성이 인장강성과 같은 경우와의 해를 비교하였다.

그림에서 원주방향의 응력의 분포는 비대칭성의 경우 e값이 대칭성의 경우보다 중립면이 C링의 양의 축 방향으로 이동하여 압축응력을 보이는 단면의 면적이 커졌음을 알 수 있다. 반지름 방향의 응력성분은 곡선보의 안쪽에서는 더 작은 응력이 발생하고 바깥쪽에서는 더 큰 응력이 생기며 응력이 모두 음의 값으로서 전 단면에 걸쳐 압축력을 받고 있음을 알 수 있다. 전단응력도 반지름 방향의 응력과 비슷한 형태의 곡선을 나타내고 있다. 세 방향의 응력을 비교해 볼 때 원주방향의 응력이 나머지 다른 방향의 응력에 비해 상당히 큰 값을 가짐을 알 수 있으며 최대값에서 반지름 방향 응력과 전단응력은 원주방향의 응력의 약4.1%이다.

(2) C링의 굽힘 강성

비대칭물성을 고려한 보이론에 의해 얻어진 식을 이용하여 C링의 굽힘강성을 계산하였다. 또한 비대칭물성을 고려하지 않은 보이론과 유한요소해석의 결과와 비교하였다. Fig.11은 섬유의 부피분율의 변화 즉 복

합재료 물성의 변화에 따른 강성을 나타내었다. 그림에서 부피분율이 증가함에 따라 강성이 직선적으로 증가하고 있으며, 비대칭물성을 고려할 때 굽힘강성이 압축강성이 인장강성과 같은 대칭물성의 굽힘강성보다 더 작게 나타남을 알 수 있다. 또한 보이론의 해와 유한요소의 해가 일정한 값의 오차(약 12%)가 있음을 보이고 있다. Fig.12~13은 C링의 반지름과 높이의 변화에 따른 굽힘강성의 변화를 나타낸 것이다. 그림에서 반지름에 대한 높이의 비가 작아질수록 보이론과 유한요소결과와 일치해짐을 보여준다. 이러한 유한요소 해와 보이론에 의한 해의 비교는 그 값의 차이가 여기서 해석하고자 하는 시편의 반지름과 높이의 비에 기인함을 보여주고 있다. 즉 시편의 높이가 반지름에 비하여 보이론을 써서 정확한 해를 얻기에 너무 크음을 보여준다.

(3) 보이론에 의한 탄성해와 실험값과의 비교

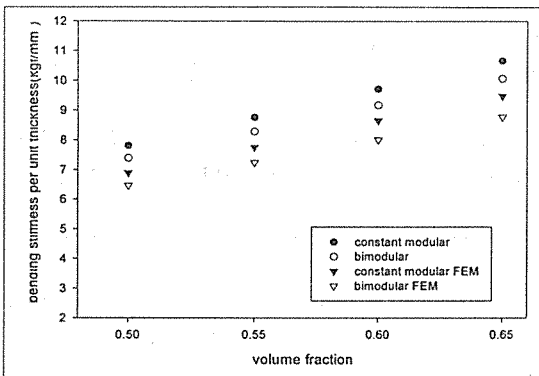


Fig.11 Bending stiffness with respect to the fiber volume fraction (height=20mm, radius=95mm)

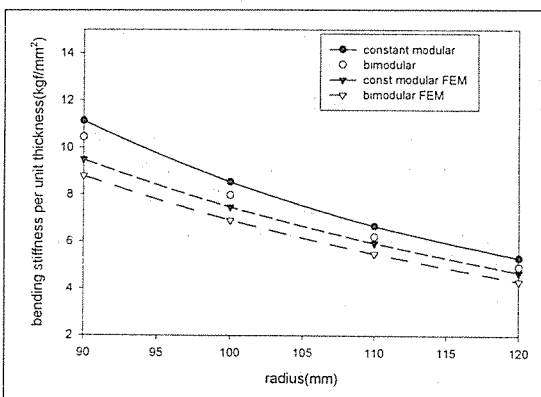


Fig.12 Bending stiffness with respect to the radius (height=20mm)

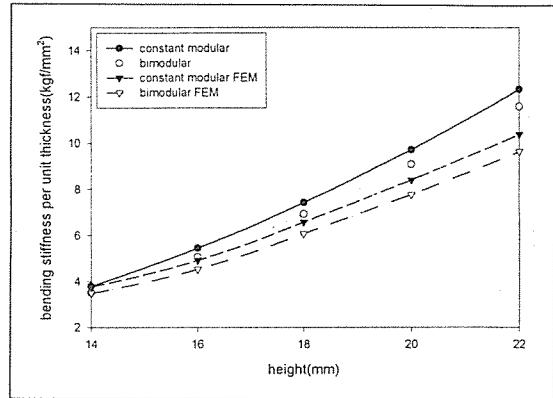


Fig.13 Bending stiffness with respect to the height (radius=95mm)

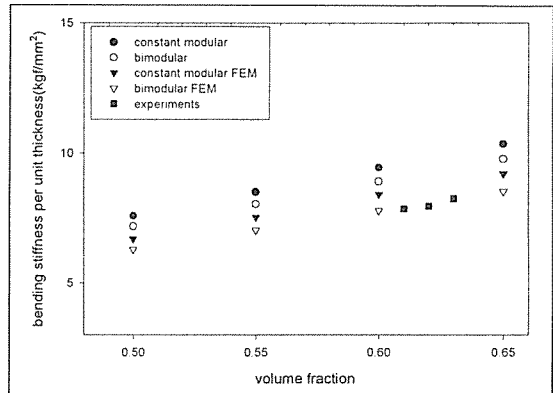


Fig.14 Comparison of bending stiffness with experimental results

Fig.14에서 굽힘강성의 모든 결과가 섬유의 부피분율에 따라 직선적으로 증가하고 있으며 실험치와 비교해볼 때 유한요소해석이 보이론보다 더 실험치에 근접함을 보여준다. 이는 보이론의 경우 실험에 사용된 보(실제 의료용 기구에 사용되는 치수)의 경우 반지름에 대한 높이의 비가 큰값을 나타내기 때문이며, 이러한 시편의 기하학적 이유에 근거한 오차를 감안하면 보이론을 이용한 비대칭성 해가 정확한 편임을 보이고 있다. 특히 비대칭성과 대칭성의 해석해의 차이가 유한요소에서의 대칭성과 비대칭성의 해의 차이와 거의 일치함을 볼 때, 여기서 마련된 해석식에서 비대칭성의 영향이 제대로 고려되었음을 보이고 있다.

3. C링의 점탄성적 거동

C링의 완화 거동을 예측하기 위해서 시간에 따른

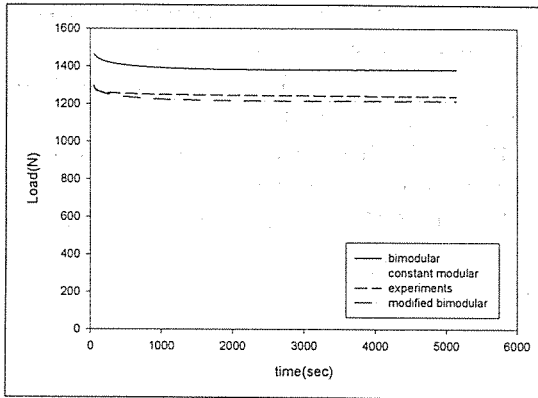


Fig.15 Comparison of the calculated load relaxation with the experimental result

섬유방향의 인장완화강성 $E'_c(t)$ 를 측정하여 다음과 같이 회귀분석(regression)하였다.

$$E'_c(t) = 198 + 10.85e^{0.0022t} \quad (\text{GPa}) \quad (23)$$

또한 섬유방향의 압축완화강성, 섬유와 수직방향 즉 반지름 방향의 완화강성, 전단완화강성은 식(18), (19), (20)에서 구하였다. 압축완화강성이 인장완화강성과 같은 경우의 보이론을 적용한 이론치를 구하였으며 위의 두 경우를 실험치와 비교하여 Fig.15에 나타내었다. 보의 크기는 실험에서와 같은 크기로 하여 반지름이 95mm, 높이가 20mm, 폭이 6mm, 섬유의 부피분율이 60%, 보의 처짐은 실험적으로 1300N의 초기 점하중에서 얻어진 3.49mm로 유지되었다. 그림을 보면 복합재료의 비대칭물성을 고려하지 않은 보이론치가 가장 큰 오차를 보이고 있다. 이는 탄성해와 마찬가지로 보의 반지름에 대한 높이의 비가 충분히 작지 않으므로 보이론이 실제와 차이를 나타내고, 압축강성을 인장강성과 같게 생각하였기 때문에 오차가 생긴 것이다. 비대칭물성을 고려한 경우는 그렇지 않은 경우보다 오차가 줄어들었다. 물론 이 때 발생하는 오차의 원인 또한 곡선보의 반지름과 높이와의 비가 크기 때문일 것이다. 탄성해에서 얻은 기하학적 오차를 고려하여 비대칭 해의 88%만을 고려한 수정된 비대칭성의 해와 비교하면 실험치와 매우 일치함을 보여주고 있다. 이는 보이론에 근거한 탄성해를 이용하여 점탄성해를 얻은 결과가 대체로 간단하면서도 정확하여 곡선보의 설계에 쓰일 수 있음을 보여주고 있다.

결론

본 논문에서는 일축 섬유강화복합재료로 된 C링의 점하중의 완화(relaxation)거동을 해석하였다. 이를 위하여 우선 C링의 점하중 하에서의 처짐과 굽힘강성의 탄성해를 구한 후 상당원리를 이용하여 점탄성해를 구하였다. 특히 섬유강화 복합재료가 섬유방향의 압축강성이 인장강성과 다른 비대칭물성을 직교이방성 물성과 함께 고려하였다. 탄성해의 경우 비대칭물성을 고려한 결과 대칭성의 경우보다 실험치와의 오차를 줄일 수 있었으며 실험치와는 약 12%정도의 오차를 나타내었다. 유한요소의 해와 비교한 결과 이러한 오차는 보의 반지름에 대한 높이의 비가 큰것에 기인함을 알 수 있었다. 하중완화의 이론치 또한 실험치와 약 12%의 오차를 보였지만 보의 형태에 의한 오차요인을 감안한다면 실험치와 잘 일치하고 있음을 알 수 있었다. 그러므로 이 연구에서 마련된 섬유강화 복합재료 곡선보의 굽힘이론을 이용한 점탄성 해석식은 C링의 최적설계에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 사료된다.

감사의 글

본 연구는 보건복지부 보건의료기술사업, 일주학술문화재단과 수당장학회의 지원으로 이루어졌으며 이에 깊이 감사드립니다.

참고문헌

1. Wilhelm, Viscoelasticity, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York, 1975
2. S. Timoshenko, Strength of materials, Part 1, 3rd Ed., D. Van Nostrand Co., New York, 1963
3. S.O.Fernandez and G.F.Tisinai, "Stress Analysis of Unnotched C-rings Used for Stress Cracking Studies", Trans. ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 90, 1968, pp.147-152
4. N.L.Hancox, "The Compression Strength of Unidirectional Carbon Fiber Reinforced Plastic", Journal of Material Science, Vol.10, 1975,

pp.234-242

5. M.R.Piggot and B.Harris, "Compression Strength of Carbon, Glass and Kevlar-49 Fiber Reinforced Polyester Resins", Journal of Materials Science, 1980, pp.2523-2538

6. F. B. Seely, J. O. Smith, Advanced Mechanics of Materials, 2nd Ed., John Wiley & Sons, New York, 1957, chapter 6

7. S. Timoshenko and J.N. Goodier, Theory of elasticity, 3rd Ed., McGraw-Hill, Singapore, 1970

8. MATLAB, The MathWorks Inc., 24 Prime Park Way Natick, MA 01760-1500

9. R. M. Jones, Mechanics of Composite Materials, Scripta Book, USA, 1975

10. P.K.Mallick, Fiber-Reinforced Composites, New York and Basel, 1988

11. ABAQUS, Hibbit, Karlsson & Sorenson Inc. 1080 Main street, Providence, Rhode Island, USA

Appendix

섬유강화복합재료 C-ring에서 발생하는 응력 및 변형에너지 식에서 나타나는 상수들은 다음과 같다.

A. 비대칭물성을 고려한 C-ring

$$e = e(E_c^c, E_c^t, a, R) = -\frac{8R(E_c^c - E_c^t) + a}{8(E_c^c + E_c^t)} \quad A-1$$

$$\Delta d\theta/d\theta = \Delta d\theta/d\theta(P, \theta, b, w) = -\frac{2P\sin\theta}{bw} \quad A-2$$

$$C_i = E_c^t \frac{\beta}{\alpha}, \quad C_e = E_c^c \frac{\beta}{\alpha} \quad A-3$$

$$S_i = -\gamma h - \frac{h^2}{4}, \quad S_e = \gamma h - \frac{h^2}{4} \quad A-4$$

$$a = -8\{R(E_c^c - E_c^t) + h\sqrt{E_c^c E_c^t}\} - 4h(E_c^c + E_c^t)$$

$$b = h(E_c^c + E_c^t) - 2R(E_c^c - E_c^t) + \frac{a}{4} + a\{E_c^c \log(4(2R - h)(E_c^c - E_c^t)/a) - E_c^t \log(4(2R + h)(E_c^c - E_c^t)/a)\}/4(E_c^c - E_c^t)$$

$$r = \frac{E_c^c}{E_c^t}$$

$$\alpha = w[-8R^2\{r\log(2R - h) - \log(2R + h)\}(1 + r) + 2Rh(r^2 - 6r + 1) - h^2(1 - r^2) + 8R^2\log(\frac{(4R - h)r + 4R + h}{2(1 + r)})(1 - r^2)]E_c^t$$

$$\beta = 8R(1 + r)E_c^t$$

$$\gamma = \frac{h}{4} \frac{r - 1}{r + 1}$$

$$u_c = u_c(R, h, w, C_c, C_t, \gamma, r) =$$

$$\frac{1}{32r} w \pi \{[(8\gamma^2 + 8R^2 - 16R\gamma)\log(R - \gamma) + 8\gamma h + (-8\gamma^2 - 8R^2 + 16R\gamma)$$

$$\log(2R - h) - 4hR + 8R\gamma + 8\gamma^2 \log 2 + 8R^2 \log 2 - 12\gamma^2 - 16R\gamma \log 2 - h^2\} C_c^2 + \{(-8\gamma^2 - 8R^2 + 16R\gamma)r \log(R - \gamma) + 12\gamma^2 r + 8\gamma h r - 4hRr - 8R^2 r \log 2 + (8R^2 - 16R\gamma + 8\gamma^2)r \log(2R + h) + h^2 r + 16R\gamma r \log 2 - 8\gamma^2 r \log 2 - 8R\gamma r\} C_t$$

A-5

A-6

$$\begin{aligned}
 u_s = u_r = u_s(R, h, w, C_c, C_t, S_c, S_t, \gamma) = u_r(R, h, w, C_c, C_t, S_c, S_t, \gamma) = \\
 \frac{w\pi}{(2R + h)^2(2R - h)^2(-R + \gamma)^2} \{ \\
 ((256R^3\gamma S_c h^2 - 2176R^4\gamma^2 h^2 - 512R^5\gamma S_c - 2560\gamma^3 R^5 + 1536R^5 h^2\gamma - 32R\gamma^2 c h^4 - 128\gamma^2 S_c h^2 R^2 \\
 - 160\gamma^3 R h^4 + 48h^4 R^4 + 768R^8 + 32\gamma^4 h^4 + 256\gamma^2 S_c R^4 - 384R^6 h^2 - 192h^4 R^3\gamma - 3072R^7\gamma + 4352R^6\gamma^2 + 16\gamma^2 S_c h^4 + 1280\gamma^3 R^3 h^2 \\
 + 16R^2 S_c h^4 - 256\gamma^4 h^2 R^2 - 128R^4 S_c h^2 + 256S_c R^6 + 512\gamma^4 R^4 + 272R^2\gamma^2 h^4)\log(2R - h) + 4S_c^2 h^4 - 160h^3 R^5 + 384R^7 h - 768R^8 \log 2 \\
 + 28\gamma^4 h^4 + 96R^6 h^2 - 3072\gamma^3 R^5 - 16\gamma^3 h^5 + 12h^5 S_c^3 - 32\gamma^4 h^4 \log 2 - 48R^4 h^4 \log 2 - 4352R^6\gamma^2 \log 2 + 2560R^5\gamma^3 \log 2 - 512\gamma^4 R^4 \log 2 \\
 + 3072R^7\gamma \log 2 + 384R^6 h^2 \log 2 + 256\gamma^4 h^2 R^2 \log 2 + 44h^5\gamma^2 R - 1536R^6\gamma h - 40h^5 S_c^2\gamma - 2h^6 R\gamma - 1280\gamma^3 R^4 h + 576\gamma^3 R^2 h^3 - 928R^3\gamma^2 h^3 \\
 + h^6\gamma^2 + h^6 R^2 - 800R^4\gamma^2 h^2 - 16\gamma^3 R h^4 + 1216\gamma^3 R^3 h^2 + 1216\gamma^4 R^4 - 768R^7\gamma - 544\gamma^4 h^2 R^2 + 2176R^4\gamma^2 h^2 \log 2 + 192R^3\gamma h^4 \log 2 \\
 + 160R^3\gamma^3 h^4 \log 2 - 272R^2\gamma^2 h^4 \log 2 + 2688R^6\gamma^2 - 36h^4 R^4 + 104h^4 R^3\gamma - 76R^2\gamma^2 h^4 - 1536R^5\gamma h^2 \log 2 - 1280R^3\gamma^3 h^2 \log 2 + 640R^4\gamma h^3 \\
 - 128\gamma^4 h^3 R + 256\gamma^4 R^3 h + 2176R^5\gamma^2 h + 128S_c^2 R^2\gamma^2 h^2 \log 2 - 256S_c h^2 R^3\gamma \log 2 + 32S_c h^4 R\gamma \log 2 + 512S_c R^5\gamma \log 2 - 256S_c R^4\gamma^2 \log 2 \\
 - 16S_c h^4\gamma^2 \log 2 + 128S_c h^2 R^4 \log 2 - 16S_c h^4 R^2 \log 2 - 64S_c^2 h R^3 - 48S_c^2 h^2 R^2 + 128S_c^2 R^3\gamma - 256S_c^2 R^6 \log 2 + (-16\gamma^2 S_c h^4 + 128R^4 S_c h^2 \\
 + 256\gamma^4 h^2 R^2 - 6R^2 S_c h^4 - 256S_c R^6 - 512\gamma^4 R^4 + 2560\gamma^3 R^5 - 1536R^5 h^2\gamma + 192h^4 R^3\gamma + 2176R^4\gamma^2 h^2 - 1280\gamma^3 R^3 h^2 - 4352R^6\gamma^2 \\
 - 256\gamma^2 S_c R^4 + 3072R^7\gamma - 272R^2\gamma^2 h^4 - 32\gamma^4 h^4 + 512R^5\gamma S_c - 256R^3\gamma S_c h^2 + 128\gamma^2 S_c h^2 R^2 + 32R\gamma^2 c h^4 + 128R^3\gamma S_c h^2 \\
 + 48R\gamma S_c h^4)C_c^2 + ((768R^8 + 32\gamma^4 h^4 + 1536R^5 h^2\gamma - 2176R^4\gamma^2 h^2 - 128R^4 S_c^2 h^2 + 4352R^6\gamma^2 + 1280\gamma^3 R^3 h^2 + 272R^2\gamma^2 h^4 \\
 + 512\gamma^4 R^4 - 160\gamma^3 R h^4 - 256\gamma^4 h^2 R^2 - 2560\gamma^3 R^5 + 48h^4 R^4 + 256R^3\gamma S_c h^2 - 512R^2\gamma S_c h^2 - 128R^2\gamma^2 S_c h^2 + 256S_c R^6 - 32R\gamma S_c h^4 \\
 - 384R^6 h^2 - 192h^4 R^3\gamma + 16R^2 S_c h^4 + 256R^4\gamma^2 S_c + 16\gamma^2 S_c h^4 - 3072R^7\gamma)\log(R - \gamma) - 160h^3 R^5 + 384R^7 h + 768R^8 \log 2 + (-768R^8 \\
 - 4352R^6\gamma^2 - 48h^4 R^4 + 192h^4 R^3\gamma - 256S_c R^6 - 272R^2\gamma^2 h^4 + 128R^4 S_c h^2 - 32\gamma^4 h^4 + 384R^6 h^2 + 2560\gamma^3 R^5 - 256R^4\gamma^2 S_c + 512R^5\gamma S_c \\
 + 2176R^4\gamma^2 h^2 - 256R^3\gamma S_c h^2 + 256\gamma^4 h^2 R^2 + 160\gamma^3 R h^4 + 32R\gamma^2 c h^4 - 512\gamma^4 R^4 - 1280\gamma^3 R^3 h^2 - 16\gamma^2 S_c h^4 - 1536R^5 h^2\gamma \\
 + 128R^2\gamma^2 S_c h^2 + 3072R^7\gamma - 16R^2 S_c h^4)\log(2R + h) - 28\gamma^4 h^4 - 96R^6 h^2 + 3072\gamma^3 R^5 - 16\gamma^3 h^5 - 4S_c^2 h^4 + 12h^5 R^3 - 128S_c h^2 R^2\gamma^2 \log 2 \\
 + 256S_c \log 2 R^3\gamma h^2 + 256S_c \log 2 R^6 - 32S_c \log 2 h^4 R\gamma + 32\gamma^4 \log 2 h^4 + 48R^4 \log 2 h^4 + 4352R^6\gamma^2 \log 2 - 2560R^5\gamma^3 \log 2 + 512\gamma^4 \log 2 R^4 \\
 - 3072R^7\gamma \log 2 - 384R^6 \log 2 h^2 + 128S_c^2 R^2\gamma h - 32S_c^2 R\gamma^2 + 128R^3\gamma^2 S_c h - 256\gamma^4 \log 2 h^2 R^2 - 128S_c \log 2 h^2 R^4 - 128S_c^2 R^3\gamma - 64S_c^2 h R^3 \\
 + 48S_c^2 h^2 R^2 + 44h^5\gamma^2 R - 1536R^6\gamma h - 40h^5 S_c^2\gamma - 2h^6 R\gamma + 16S_c^2\gamma^2 h^2 - 1280\gamma^3 R^4 h + 576\gamma^3 R^2 h^3 - 928R^3\gamma^2 h^3 + 128R^5 S_c h \\
 + 64\gamma^3 S_c h^3 - 64S_c^2\gamma^2 h R - 192R^3 h^3\gamma^2 - 256R^4\gamma S_c h - 192\gamma^3 S_c h^2 R + 192R^2\gamma S_c h^3 - h^6\gamma^2 - h^6 R^2 + 256R^5\gamma S_c + 800R^4\gamma^2 h^2 \\
 + 16\gamma^3 R h^4 - 1216\gamma^3 R^3 h^2 + 32\gamma^2 S_c h^4 384R^4\gamma^2 S_c - 1216\gamma^4 R^4 + 24R^2 S_c h^4 + 768R^7\gamma + 288R^2\gamma^2 S_c h^2 + 544\gamma^4 h^2 R^2 + 16S_c \log 2 h^4 R^2 \\
 - 2176R^4\gamma^2 \log 2 h^2 - 192R^3\gamma \log 2 h^4 - 160R^3\gamma^3 \log 2 h^4 + 272R^2\gamma^2 \log 2 h^4 - 2688R^6\gamma^2 - 128R^3\gamma S_c h^2 - 48R\gamma^8 h^4 + 36h^4 R^4 - 104h^4 R^3\gamma \\
 + 76R^2\gamma^2 h^4 - 32R^4 S_c h^2 - 512S_c \log 2 R^5\gamma + 256S_c \log 2 R^4\gamma^2 + 1536R^5 \log 2 \gamma^2 + 16S_c \log 2 h^4\gamma^2 + 1280R^3\gamma^3 \log 2 h^2 + 76R^2\gamma^2 h^4 - 32R^4 S_c h^2 \\
 - 512S_c \log 2 R^5\gamma + 256S_c \log 2 R^4\gamma^2 + 1536R^5 \log 2 \gamma^2 + 16S_c \log 2 h^4\gamma^2 + 1280R^3\gamma^3 \log 2 h^2 \\
 - 64R^3 S_c h^3 + 64S_c^2\gamma^2 R^2 - 128\gamma^4 h^3 R + 256\gamma^4 R^3 h + 256R^3\gamma^3 S_c + 2176R^5\gamma^2 h)C_t^2 \}
 \end{aligned}$$

B. 대칭물성을 가정한 C-ring

대칭물성의 경우는 힘(F)과 모멘트(M)의 영향을 본문의 식 (3)과 (4)에서 각각 따로 고려하여 중첩이론을 써서 원주방향의 응력 σ_c 를 구할 수 있다. 이 경우 $F=0$ 이고 M의 영향만 고려한 순수굽힘이론의 해와(순수굽힘시 중립면까지의 거리를 \hat{e} 라 함) $M=0$ 이고 F의 영향만을 고려한(균일응력을 가정)해를 중첩하면 중립면까지의 거리 \hat{e} 의 값이 0이 된다. 이는 Appendix의 식 A-1에서 $E_c^l = E_c^e$ 일 때의 값과 일치함을 알 수 있다.

$$\hat{e} = \frac{K \cdot R}{1 + K}, \quad e = 0 \quad \text{B-1}$$

$$\Delta d\theta/d\theta = \frac{M}{E \cdot A \cdot R} \left(1 + \frac{1}{K}\right) \quad \text{B-2}$$

$$C_t = C_c = \frac{1}{whK} \quad \text{B-3}$$

$$S_t = S_c = -\frac{h^2}{4} \quad \text{B-4}$$

$$K = -\frac{1}{wh} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{y \cdot w dy}{R + y} = -1 + \frac{R}{h} \ln\left(\frac{2R + h}{2R - h}\right) \cong -\frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R}\right)^4 + K$$

$$u_c = \frac{\pi R(R + \hat{e})}{4w\hat{e}h} \quad \text{B-5}$$

$$u_r = u_s = \frac{-3\pi}{32w} \left(\frac{16}{5} \frac{R}{h} + \frac{4}{35} \frac{h}{R} \right) \quad \text{B-6}$$