

論文

복합적층판으로 구성된 토목건설용 구조물의 예비설계를 위한 간편해석법

김덕현* · 원치문**

A Simple Method of Analysis for the Preliminary Design of Structures for Civil Construction made of Particular Composite Laminated Plate

D.H.Kim* and C.M.Won**

ABSTRACT

It is difficult for civil engineer to apply composite materials of laminated type to structure for civil construction because of complicated theory although those have much merit. A simple method by which one can predict "exact" values of the natural frequency of vibration of laminated plates is presented. Many laminates with particular orientations have negligible values of B_{16} and B_{26} as the number of plies increases. Such laminates, with $D_{16} = D_{26} = 0$ can be solved by the same equation as for the special orthotropic laminates(1991,1995). If the quasi-isotropic constants are used, it is possible to simplify analysis procedure since the equations for isotropic plates can be used. Use of some coefficients can produce "exact" values for laminates with such configuration. This coefficient, in fact, represents the effect of the anisotropy of the laminate. D. H. Kim proposed to use a correction factor, he developed, to produce "exact" solution out of the approximate solution obtained by using the quasi-isotropic constants(1995). In this paper, the fiber orientation studied is $[\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta]_r$, with $\alpha = -\beta$, and $\gamma = 0^\circ$ or 90° and the above-mentioned method is used to obtain the natural frequencies of plates with such orientations, and detailed result is presented for the use of engineers.

요 지

고급복합재료(advanced composite material)는 여러 가지 훌륭한 장점에도 불구하고 건설기술자에게는 그 이론이 너무 복잡하여 건설구조에 대한 응용이 지연되고 있다. $[\alpha/\beta/\beta/\gamma/\alpha/\alpha/\beta]_r$, $\alpha = -\beta$, $\gamma = 0^\circ$ 또는 90° 와 같은 몇 가지 배향각을 갖은 적층판은, r 이 증가함에 따라, B_{ij} 강성이 0으로 접근한다(1995). 또한 건설구조물은 그 치수가 크고 r 이 증가해도 시간 대 두께비가 충분히 커서, 횡방향 변형률(ϵ_{xz} , ϵ_{yz})의 영향이 무시될 수 있다. 이 경우 판의 지배방정식은 간단한 특별직교이방성판의 지배방정식으로 변화된다. 김덕현은 토목구조물에 흔히 적용될 수 있는 이러한 배향각을 가진 적층판의 지배방정식을 취급이 간단한 특별직교 이방성 판의 경우로 변경시킨 다음 해석을 더 간단히 진행할 수 있도록 기술자들이 유사 등방성 상수(quasi-isotropic constant)를 사용하여 낮은 등방성판

* Korea Composites 대표

** 한라대학교 건축토목공학부 전임강사

의 방정식으로 답을 구하고 그가 개발한 “수정계수(correction factor)”를 사용하여 “정확한”해를 구하는 방법을 발표한 바 있다(1991). 이 논문에는 $[\alpha/\beta/\gamma/\alpha/\beta]r$ 배향각을 갖는 적층판을, 일반기술자들이 이해하기 쉬운 본 논문의 방법으로 해석하는 방법을 제시하고 기술자들의 참고자료로 사용될 수 있는 여러 가지 경우에 대한 고유진동수의 계산결과가 제공되고 있다.

1. 서 론

토목, 건축 분야의 건설에는 주로 콘크리트 및 강재 등이 구조용 재료로 사용되어져 왔다. 그러나 현대 문명이 발전함에 따라 구조물들이 거대해지고, 중량과 부식, 내구성 문제 및 경과년수의 증가로 인한 유지 보수가 중요한 문제로 대두됨에 따라 신소재인 복합재료를 건설에 응용하기 위한 노력들이 활발하게 진행되어왔다. 이미 몇몇 선진국에서는 복합재료로 제작된 교량이 등장하였고 복합재료는 새로운 1000년의 구조재료라고, 1996년 미국토목학회 총회에서 선언되었다.

복합재료가 건설 분야에서, 보다 광범위하게 이용되기 위해서는 일반기술자들에게 너무 어려운 이론을 쉽게 하기 위한 연구가 요구된다.

본 논문에서는 토목건설용 구조물에 사용되기 쉬운 복합재료적층판의 한 경우인 $[\alpha/\beta/\gamma/\alpha/\beta]r$ 의 간단한 해석을 위해 김덕현이 개발한 (Kim, 1991, 1995)방법을 소개하고 기술자들의 편의를 위해 몇 가지 경우의 고유진동수를 계산하여 제공한다.

2. 이론적 배경

2.1 복합재료적층판 이론

횡 방향 전단변형율이 무시될 수 있을 때, 적층판의 진동에 대한 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ & + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \\ & 3B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ & - B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & A_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ & + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ & - B_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ & - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \\ & - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \\ & - B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k - h_{k-1}) \quad (4)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (5)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (6)$$

이고, \bar{Q}_{ij} 는 “변환된 환원 강성 행렬(transformed reduced stiffness matrix)”로서

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\
\bar{Q}_{13} &= Q_{13}m^2 + Q_{23}n^2 \\
\bar{Q}_{16} &= -Q_{22}mn^3 + Q_{11}m^3n - (Q_{12} + 2Q_{66})mn(m^2 - n^2) \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\
\bar{Q}_{23} &= Q_{13}n^2 + Q_{23}m^2 \\
\bar{Q}_{26} &= -Q_{22}m^3n + Q_{11}mn^3 + (Q_{12} + 2Q_{66})mn(m^2 - n^2) \\
\bar{Q}_{33} &= Q_{33} \\
\bar{Q}_{36} &= (Q_{13} - Q_{23})mn \\
\bar{Q}_{44} &= Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2 \\
\bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})mn \\
\bar{Q}_{55} &= Q_{55}m^2 + Q_{44}n^2 \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 + Q_{66}(m^2 - n^2)^2
\end{aligned} \quad (7)$$

이며, Q_{ij} 는 일방향 보강된 적층의 평면응력(plane stress) 및 평면변형률(plane strain)경우의 “환원 강성(reduced stiffness)”로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}
\end{aligned} \quad (8)$$

r 의 증가에 따라 $B_{16} = B_{26} \rightarrow 0$, $D_{16} = D_{26} \rightarrow 0$ 가 되면, 식(1)(2)및(3)은 다음과 같이 간단히 변화되고, 이것은 곧 특별직교 이방성판의 방정식이 된다(Kim, 1995).

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (9)$$

여기서 $D_1 = D_{11}$, $D_2 = D_{22}$ 그리고 $D_3 = D_{12} + 2D_{66}$ 이다. 판의 경계조건이 단순지지일 경우

$x=0, a$ 에서 $w=0$;

$$M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (10)$$

$y=0, b$ 에서 $w=0$;

$$M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (11)$$

이다. 탄성체의 자유진동은 조화운동이며 변위는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x, y, t) = F(t) G(x, y) \quad (12)$$

위의 식(12)는 식(10)과 식(11)에서 주어진 경계조건을 만족하도록 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin \omega_n t \quad (13)$$

위 식(13)을 식 (9)에 대입하면 다음과 같은 고유주파수를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\omega_n^2 &= \frac{\pi^4}{\rho h} \left[D_1 \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2D_3 \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_2 \left(\frac{n}{b}\right)^4 \right] \\
&= (\omega_n^{\text{orth}})^2
\end{aligned} \quad (14)$$

역대칭 각 플라이 복합재료 적층판의 단순지지 type S3 즉 :

$x=0$ 과 $x=a$ 에서

$$w=0, M_x = B_{16} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$-D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

$$u=0, N_{xy} = A_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$-B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

$y=0$ 과 $y=b$ 에서

$$\begin{aligned} w=0, M_y &= B_{26} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &- D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \\ v=0, N_{xy} &= A_{66} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &- B_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}$$

인 경우에 대하여 Whitney가 구한 고유진동수는 다음과 같다(Kim, 1995).

$$\omega_n^2 = \frac{\pi^4}{\rho h} \left(T_{33} + \frac{2T_{12}T_{23}T_{13} - T_{22}T_{13}^2 - T_{11}T_{23}^2}{T_{11}T_{22} - T_{12}^2} \right) \quad (15)$$

여기서

$$\begin{aligned} T_{11} &= A_{11} \left(\frac{m}{a} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{n}{b} \right)^2, \\ T_{12} &= (A_{12} + A_{66}) \left(-\frac{m}{a} \right) \left(-\frac{n}{b} \right) \\ T_{13} &= -[3B_{16} \left(\frac{m}{a} \right)^2 + B_{26} \left(\frac{n}{b} \right)^2] \left(-\frac{n}{b} \right), \\ T_{22} &= A_{22} \left(-\frac{n}{b} \right)^2 + A_{66} \left(\frac{m}{a} \right)^2 \\ T_{23} &= -[B_{16} \left(\frac{m}{a} \right)^2 + 3B_{26} \left(\frac{n}{b} \right)^2] \left(\frac{m}{a} \right) \\ T_{33} &= D_{11} \left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 \\ &+ D_{22} \left(\frac{n}{b} \right)^4 \end{aligned}$$

이다.

본 논문에서 제시된 $[\alpha/\beta/\gamma/\alpha/\beta]_r$ 배향각을 가진 적층판은 r 이 증가하면 $B_{16} = B_{26} \rightarrow 0$ 가 되어, 식(15)는

$$\omega_n^2 = \frac{\pi^4}{\rho h} T_{33} \quad (16)$$

가 되며, 이것은 정확히 식(14)와 일치한다. 즉 식 (15)가 식(14)로 간편하게 변화되는 것이다.

2.2 Quasi-isotropic 상수의 개념

복합재료 구조물의 예비 설계시, 비록 단면이나 배향 각이 결정되지 않은 상태에서 Tsai가 제안한 유사등방성 상수를 사용하면 문제해결이 더 간단해진다(Kim, 1991, 1995). 역대칭 형태의 적층판을 포함한 $B_{16} = B_{26} \rightarrow 0$, $D_{16} = D_{26} \rightarrow 0$ 로 되는 적층판들은 특별직교 이방성 적층판과 같은 방정식으로 취급 될 수 있다(Kim, 1995). 모든 비등방성 재료는 변환된 좌표축에 대하여 불변량인 이러한 상수들을 갖고있는데 이것은 각각의 복합재료가 갖고 있는 최소한의 강도를 나타낸다. 적층 판에 작용된 하중에 대하여, 선택된 층의 각도 배향에 관계없는 최소값은 어떠한 강성요소보다 더 좋은 설계 요소가 된다. 유사 등방성 상수는 다음과 같다.

$$[Q]^{iso} = \begin{bmatrix} U_1 & U_4 & 0 \\ U_4 & U_1 & 0 \\ 0 & 0 & U_5 \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기서

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{8} (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}), \\ U_2 &= (Q_{11} - Q_{22})/2 \\ U_3 &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66})/8 \\ U_4 &= \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}) = U_1 - 2U_5, \\ U_5 &= \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) \end{aligned}$$

이다.

유사등방성 상수를 사용할 경우

$$D_{11} = D_{22} = D_3 = \left(\frac{h^3}{12} \right) Q_{11}^{iso} = \frac{h^3}{12} U_1 \quad (18)$$

이며, 식(14)는 다음과 같이된다.

$$\omega_n^2 = \frac{\pi^4}{\rho h} \left(\frac{h^3}{12} \right) Q_{11}^{iso} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right]$$

$$= \frac{\pi^4}{\rho h} \left(\frac{h^3}{12} \right) U_1 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right] \quad (19)$$

DEN^{iso}를 다음과 같이 정의하면

$$DEN^{iso} = \left(\frac{h^3}{12} \right) U_1 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m}{a} \right)^2 \left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^4 \right] \quad (20)$$

식 (19)는 다음 식으로 표현된다(Kim, 1995).

$$(\omega_n^{iso})^2 = \frac{\pi^4}{\rho h} (DEN^{iso}) \quad (21)$$

2.3 정확해를 얻기위한 수정계수의 사용

진동에 관한 정확한 값을 쉽게 얻기 위하여 김덕현 (1991, 1995)은 다음과 같은 공식을 제안하여 예비 설계시 수정계수를 사용하여 “정확한 해”를 구할 수 있는 방법을 마련하였다.

유사등방성 상수가 사용될 때 진동에 관한 공식은 식(21)과 같다. 여기에 수정계수를 적용시키면 “정확한” 해는 다음과 같이 표시 될 수 있다.

$$(\omega_n)^2 = (\omega_n^{iso})^2 \cdot (FRC^2) \quad (22)$$

여기서

$$FRC^2(1) = \frac{[4(U_1 - U_3) + 2(U_1 - 3U_3)(e^2 - 1) + (U_1 - U_3 + U_3)(e^4 - 1)]}{U_1[4 + 2(e^2 - 1) + (e^4 - 1)]} \quad (23)$$

$$FRC^2(2) = \frac{[D_1 + 2D_3 + D_2 + 2D_3(e^2 - 1) + D_2(e^4 - 1)]}{\left(\frac{h^3}{12} \right) U_1[4 + 2(e^2 - 1) + (e^4 - 1)]} \quad (24)$$

이고 $e = \frac{na}{mb}$ 이다.

만일 $e = 1$ 이면

$$FRC^2(1) = \frac{U_1 - U_3}{U_1} \quad (25)$$

$$FRC^2(2) = \frac{D_1 + 2D_3 + D_2}{\left(\frac{h^3}{3} \right) U_1} \quad (26)$$

이다.

어떤 배향각을 갖는 복합재료적층판은 층수가 증가함에 따라, $B_{16} = B_{26} \rightarrow 0$, $D_{16} = D_{26} \rightarrow 0$ 이 되고, 이때 판은 특별직교 이방성 적층판의 공식으로 정확한 해가 구해질 수 있다.

예비 설계시에는 재료의 종류, 층수, 배향각 등이 결정되지 않았으므로 기술자들은 처음부터 난관에 봉착하게 된다. 이때 재료(보강재와 모재)만 결정하면 사용될 재료의 최소한의 강도를 나타내는(Kim, 1995, p.326) 유사등방성 상수, U_1 , U_4 및 U_5 가 식(8) 및 (17)로부터 구해질 수 있다. 이 값으로 구조물 전체를 해석하면 각 단면에서의 부재 두께와 힘의 흐름을 얻을 수 있으므로, 라미나(lamina) 수와 섬유 배향각을 설계할 수 있게된다. 이때 새로운 A_{ij} , B_{ij} 및 D_{ij} 강성 등으로 전체 구조물 해석을 다시할 필요없이, Q_i^{iso} 로 구한 값에 FRC를 곱하면 “정확한” 값을 얻을 수 있게 된다. 최초의 예비설계에서는 보강재의 배향각을 결정하지 않았으므로 FRC(1)을 사용하는 것이 편하고, 구조물의 일차 “정확한” 해석이 끝난 다음 각 단면의 “최종” 배향각을 설계하고 FRC(2)를 사용하여 설계의 정확성을 증가시킬 수 있다.

3. 수치해석

3.1 복합재료적층판의 물성 및 형상

수치해석을 위한 복합재료 적층판의 소재로는 다음과 같은 유리섬유와 에폭시가 사용되었으며, “적층판

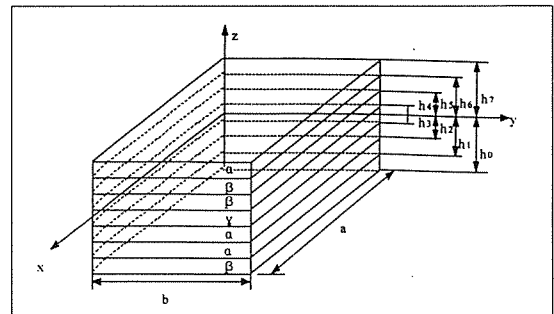


Fig. 1. Geometry of $[α/β/β/γ/α/α/β]_r$ Type Laminate($r = 1$)

(laminate)"의 형태는 $r = 1$ 일 때 그림 (1)과 같다. 이 때 사용된 진동해석방법은 김덕현(1974, 1989)의 방법이 사용되었는데 이 방법은 여러 발표 논문에서 소개 되었으므로 이 논문에서는 설명하지 않는다. 혼합법칙에 의한 "적층판"의 물성은 다음과 같다.

$$E_1 = 38.6 \text{ GPa}, E_2 = 8.27 \text{ GPa}, \nu_{12} = 0.26, \\ \nu_{21} = 0.0557, G_{12} = 4.14 \text{ GPa}, t_0 = 0.000125 \text{ m}$$

식(8)에 의한 "환원 강성(reduced stiffness)"은 다음과 같다.

$$Q_{11} = 39.167218 \text{ GPa}, Q_{12} = 2.181797 \text{ GPa}, \\ Q_{22} = 8.391527 \text{ GPa}, Q_{66} = 4.14 \text{ GPa}$$

식(17)로 구한 U_i 와 Q^{iso} 행렬(matrix)의 값은 다음과 같다.

$$U(1) = 20.44998 \text{ GPa} \\ U(2) = 15.38785 \text{ GPa}, \\ U(3) = 3.329394 \text{ GPa} \\ U(4) = 5.511191 \text{ GPa}, \\ U(5) = 7.469394 \text{ GPa}$$

$$Q^{iso} = \begin{bmatrix} 20.44998 & 5.511191 & 0 \\ 5.511191 & 20.44998 & 0 \\ 0 & 0 & 7.469394 \end{bmatrix} \text{ GPa}$$

$\theta = 30^\circ, \theta = -30^\circ, \theta = 0^\circ$ 일 때의 "변환된 환원 강성"은 각각 다음과 같다.

$$[\bar{\theta}]_{30} = \begin{bmatrix} 26.479 & 7.176 & 9.546 \\ 7.176 & 11.091 & 3.780 \\ 9.546 & 3.780 & 9.134 \end{bmatrix},$$

$$[\bar{\theta}]_{-30} = \begin{bmatrix} 26.479 & 7.176 & -9.546 \\ 7.176 & 11.091 & -3.780 \\ -9.546 & -3.780 & 9.134 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{\theta}]_0 = \begin{bmatrix} 39.17 & 2.18 & 0 \\ 2.17 & 8.39 & 0 \\ 0 & 0 & 4.14 \end{bmatrix}$$

$\alpha = 30^\circ, \beta = -30^\circ, \gamma = 0^\circ$ 일 때 $[\alpha/\beta/\gamma/\alpha/\beta]_1$ 형태의 적층의 강성은 식 (4) (5) 및 (6)에 의하여 다음과 같이 구해진다.

$$A_{11} = 24755306.77 \text{ N/m}$$

$$A_{11}^* = \frac{A_{11}}{h} = 28.3 \text{ GPa}$$

$$B_{16} = 0.0000$$

$$B_{16}^* = \frac{2B_{16}}{h^2} = 0.0000$$

$$B_{26} = 0.0000$$

$$B_{26}^* = \frac{2B_{26}}{h^2} = 0.0000$$

$$D_{11} = 1.480315 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$D_{11}^* = \frac{12D_{11}}{h^3} = 26.5 \text{ GPa}$$

$$D_{12} = 0.399794 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$D_{12}^* = \frac{12D_{12}}{h^3} = 7.16 \text{ GPa}$$

$$D_{16} = 0.0000$$

$$D_{16}^* = 0.0000$$

$$D_{26} = 0.0000$$

$$D_{26}^* = 0.0000$$

$$D_{22} = 0.618756 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$D_{22}^* = \frac{12D_{22}}{h^3} = 11.08 \text{ GPa}$$

$$D_{66} = 0.509115 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$D_{66}^* = \frac{12D_{66}}{h^3} = 9.12 \text{ GPa}$$

여기서 r 은 1에 불과한데도 $B_{16} = 0, B_{26} = 0, D_{16} = 0, D_{26} = 0$ 이어서 식(1),(2) 및 (3)은 간단하게 특별직교 이방성판의 지배방정식인 식(9)로 변환된다. 또 A_{11}^*

Table 1. Flexural stiffness and angle orientation of $[a/\beta/\beta/\gamma/a/\beta]$ Type Laminate($r=1$)

Angle Case	α	β	γ	D_{11}	D_{22}	D_{12}	D_{66}
I	0°	0°	90°	2.181573	0.473481	0.121803	0.231123
II	$+15^\circ$	-15°	90°	1.974153	0.495574	0.214467	0.323787
III	$+30^\circ$	-30°	90°	1.475306	0.623765	0.399794	0.509115
IV	$+45^\circ$	-45°	90°	0.954367	0.959376	0.492458	0.601778
V	$+60^\circ$	-60°	90°	0.618756	1.480315	0.399794	0.509114
VI	$+75^\circ$	-75°	90°	0.490564	1.979162	0.214467	0.323787
VII	$+90^\circ$	-90°	90°	0.468472	2.186582	0.121803	0.231123

Table 2. $(A_{11}^*, B_{16}^*, B_{26}^*, D_{16}^*, D_{26}^*)/D_{11}^*$ for $[a/\beta/\beta/\gamma/a/\beta]$ Type Laminate, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = -30^\circ$, $\gamma = 0^\circ$, $t_0 = 0.000125$ m

Layer No.	1(7)	3(21)	7(49)	11(77)	15(105)	19(133)	23(161)
A_{11}^*/D_{11}^*	1.06696	1.00702	1.00128	1.00052	1.00028	1.00018	1.00012
B_{16}^*/D_{11}^*	0	0	0	0	0	0	0
B_{26}^*/D_{11}^*	0	0	0	0	0	0	0
D_{16}^*/D_{11}^*	0	0	0	0	0	0	0
D_{26}^*/D_{11}^*	0	0	0	0	0	0	0

Table 3. $(A_{11}^*, B_{16}^*, B_{26}^*, D_{16}^*, D_{26}^*)/D_{11}^*$ for $[a/\beta/\beta/\gamma/a/\beta]$ Type Laminate, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = -30^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $t_0 = 0.000125$ m

Layer No.	1(7)	3(21)	7(49)	11(77)	15(105)	19(133)	23(161)
A_{11}^*/D_{11}^*	0.90422	0.98686	0.99784	0.99913	0.99953	0.99971	0.99980
B_{16}^*/D_{11}^*	0	0	0	0	0	0	0
B_{26}^*/D_{11}^*	0	0	0	0	0	0	0
D_{16}^*/D_{11}^*	0	0	0	0	0	0	0
D_{26}^*/D_{11}^*	0	0	0	0	0	0	0

$/D_{11}^* = 28.3/26.5 = 1.06696 \approx 1$ 이어서 이미 "정규화된(normalized)" A 및 D 강성, $A^* \approx D^*$ 이므로 이 적층은 "유사 균질성 적층판(quasi-homogeneous laminate)"이 되어, 고전적 이론과 공식들이 사용될 수 있고(Kim, 1995, p.324) 이를 위해 "유사 등방성" 상수를 쓸 수 있다.

$[a/\beta/\beta/90^\circ/a/\beta]$ 적층판의 배향각 변화에 따른 D_{ij} 값이 표(1)에 주어져 있다. 적층수 r 의 증가에 따른 $(A_{11}^*, B_{16}^*, B_{26}^*, D_{16}^*, D_{26}^*)/D_{11}^*$ 의 값들이 $\gamma = 0^\circ$ 일때는 표(2)에, $\gamma = 90^\circ$ 일때는 표(3)에, 주어져 있다.

고유진동수는, ω^{iso} 를 w^{iso} 를 사용한 김덕현의 방법으로

나, 식(21)로 구한 다음, FRC를 계산하여 식(22)를 쓰면 정확한 값을 구할 수 있다. 김덕현의 방법을 쓸 경우, w^{iso} 에 FRC를 곱해서 w 를 구한 다음 김덕현의 방법으로 정확한 고유진동수를 구할 수도 있다.

3.2 각도변화와 두께 및 형상비 증가에 따른 고유진동수

표 (1)에 제시된 보강재 배향각을 갖고 형상비(a/b)가 1인 적층판의 두께를 증가시켜 계산한 고유진동수가 표 (4)~표 (7)에 주어져 있다.

김덕현 방법에 사용된 변위의 영향계수는 "특별직교 이방성판(special orthotropic plate)"의 지배방정식, 식(9)에 등방성판에 대한 Navier해법(1820)을 사용해서 구했는데, 표(4)~표(7)의 모든 r 의 경우에 $\omega_h^{kim} =$

Table 4. Natural Frequencies of Composite Laminated Plate and Correction Factor for Case I and VII ($c = a/b = 1$)

method	Case I, Case VII			
	1(7)	7(49)	15(105)	22(154)
ω_h^{kim}	19.29792	357.4023	1121.106	1991.332
ω_h^{onh}	19.29791	357.4021	1121.106	1991.331
ω_h^{iso}	21.09101	390.6111	1225.277	2176.364
FRC(1)	0.91498	0.91498	0.91498	0.91498
FRC(2)	0.91498	0.91498	0.91498	0.91498
ω_h^{iso} FRC(1)	19.29787	357.4016	1121.105	1991.331
ω_h^{iso} FRC(2)	19.29787	357.4016	1121.105	1991.331
$\omega_h^{kim} / \omega_h^{onh}$	1.000	1.0000	1.000	1.000
$\omega_h^{kim} / \omega_h^{iso}$	0.91498	0.91498	0.91498	0.91498

Table 5. Natural Frequencies of Composite Laminated Plate and Correction Factor for Case II and VI ($c = a/b = 1$)

method	Case II, Case VI			
	1(7)	7(49)	15(105)	22(154)
ω_h^{kim}	20.21175	372.0454	1166.922	2072.680
ω_h^{onh}	20.21174	372.0452	1166.922	2072.679
ω_h^{iso}	21.09101	390.6111	1225.277	2176.364
FRC(1)	0.83719	0.83719	0.83719	0.83719
FRC(2)	0.95831	0.95247	0.95237	0.95236
ω_h^{iso} FRC(1)	19.29787	357.4016	1121.105	1991.331
ω_h^{iso} FRC(2)	20.21164	372.0435	1166.918	2072.671
$\omega_h^{kim} / \omega_h^{onh}$	1.000	1.000	1.000	1.000
$\omega_h^{kim} / \omega_h^{iso}$	0.95831	0.95247	0.95237	0.95236

Table 6. Natural Frequencies of Composite Laminated Plate and Correction Factor for Case III and V ($c = a/b = 1$)

$$\omega_n = \omega_{real} \cdot \sqrt{\rho h}$$

method \ r(N)	Case III, Case V			
	1(7)	7(49)	15(105)	22(154)
ω_n^{kim}	21.92545	399.7257	1253.541	2226.479
ω_n^{orth}	21.92544	399.7255	1253.540	2226.478
ω_n^{iso}	21.09101	390.6111	1225.277	2176.364
FRC(1)	0.83719	0.83719	0.83719	0.83719
FRC(2)	1.03956	1.02333	1.02307	1.02303
ω_n^{iso} FRC(1)	19.29787	357.4016	1121.105	1991.335
ω_n^{iso} FRC(2)	21.92542	399.7251	1253.537	2226.478
$\omega_n^{kim} / \omega_n^{orth}$	1.000	1.000	1.000	1.000
$\omega_n^{kim} / \omega_n^{iso}$	1.03956	1.02333	1.02307	1.02303

Table 8. Ratios of $\omega_n^{kim} / \omega_n^{iso}$ with increasing number of laminate ($a/b = 1$)

Angle (α, β, γ)	r(N)			
	1(7)	7(49)	15(105)	22(154)
0, 0, 90	0.91498	0.91498	0.91498	0.91498
5, -5, 90	0.92032	0.91959	0.91957	0.91957
10, -10, 90	0.93551	0.93271	0.93266	0.93266
15, -15, 90	0.95831	0.95247	0.95237	0.95236
20, -20, 90	0.98556	0.97616	0.97601	0.97598
25, -25, 90	1.01376	1.00076	1.00055	1.00051
30, -30, 90	1.03956	1.02333	1.02307	1.02303
35, -35, 90	1.06013	1.04138	1.04107	1.04102
40, -40, 90	1.07334	1.05298	1.05265	1.05260
45, -45, 90	1.07790	1.05699	1.05664	1.05659
50, -50, 90	1.07334	1.05298	1.05265	1.05260
55, -55, 90	1.06013	1.04138	1.04107	1.04102
60, -60, 90	1.03956	1.02333	1.02307	1.02303
65, -65, 90	1.01376	1.00076	1.00055	1.00051
70, -70, 90	0.98556	0.97616	0.97601	0.97598
75, -75, 90	0.95831	0.95247	0.95237	0.95236
80, -80, 90	0.93551	0.93271	0.93266	0.93266
85, -85, 90	0.92032	0.91959	0.91957	0.91957
90, -90, 90	0.91498	0.91498	0.91498	0.91498

ω_n^{orth} 가 된다.

형상비가 1일 때 보강재 보강각도별로 적층수를 증가했을 때의 ω_n^{kim} 값과 ω_n^{iso} 값의 비율은 표(8)에, $r = 22$ 일 때 보강재 보강각도별로 형상비를 증가했을 때의

Table 7. Natural Frequencies of Composite Laminated Plate and Correction Factor for Case IV ($c = a/b = 1$)

$$\omega_n = \omega_{real} \cdot \sqrt{\rho h}$$

method \ r(N)	Case IV, Case IV			
	1(7)	7(49)	15(105)	22(154)
ω_n^{kim}	22.73391	412.8705	1294.678	2299.523
ω_n^{orth}	22.73389	412.8703	1294.678	2299.522
ω_n^{iso}	21.09101	390.6111	1225.277	2176.364
FRC(1)	0.83719	0.83719	0.83719	0.83719
FRC(2)	1.0779	1.05699	1.05664	1.05659
ω_n^{iso} FRC(1)	19.29787	357.4016	1121.105	1991.331
ω_n^{iso} FRC(2)	22.73382	412.8687	1294.672	2299.522
$\omega_n^{kim} / \omega_n^{orth}$	1.0000	1.000	1.000	1.000
$\omega_n^{kim} / \omega_n^{iso}$	1.0779	1.05699	1.05664	1.05659

Table 9. Ratios of $\omega_n^{kim} / \omega_n^{iso}$ with increasing number of laminate ($r = 22$)

Angle (α, β, γ)	Aspect ratio ($c=a/b$)					
	1	2	3	4	5	6
0, 0, 90	0.91498	0.79478	0.78438	0.78490	0.78620	0.78723
5, -5, 90	0.91957	0.79994	0.78787	0.78742	0.78818	0.78889
10, -10, 90	0.93266	0.81496	0.79827	0.79512	0.79437	0.79419
15, -15, 90	0.95236	0.83850	0.81539	0.80837	0.80545	0.80398
20, -20, 90	0.97599	0.86864	0.83888	0.82765	0.82232	0.81940
25, -25, 90	1.00051	0.90323	0.86819	0.85332	0.84586	0.84164
30, -30, 90	1.02303	0.94014	0.90261	0.88547	0.87661	0.87151
35, -35, 90	1.04102	0.97745	0.94119	0.92375	0.91454	0.90919
40, -40, 90	1.05260	1.01360	0.98283	0.96729	0.95895	0.95407
45, -45, 90	1.05659	1.04736	1.02627	1.01480	1.00850	1.00478
50, -50, 90	1.05260	1.07788	1.07015	1.06460	1.06133	1.05934
55, -55, 90	1.04102	1.10463	1.11306	1.11477	1.11524	1.11539
60, -60, 90	1.02303	1.12737	1.15363	1.16333	1.16790	1.17040
65, -65, 90	1.00051	1.14607	1.19051	1.20831	1.21701	1.22187
70, -70, 90	0.97599	1.16087	1.22250	1.24787	1.26042	1.26747
75, -75, 90	0.95236	1.17199	1.24854	1.28042	1.29626	1.30517
80, -80, 90	0.93266	1.17970	1.26779	1.30465	1.32299	1.33332
85, -85, 90	0.91957	1.18422	1.27959	1.31958	1.33949	1.35071
90, -90, 90	0.91498	1.18570	1.28357	1.32463	1.34507	1.35659

ω_n^{kim} 값과 ω_n^{iso} 값의 비율은 표(9)에 주어져있다. 그림 (2)와 (3)은 표(8)과 (9)의 내용을 그림으로 표시한 것이다.

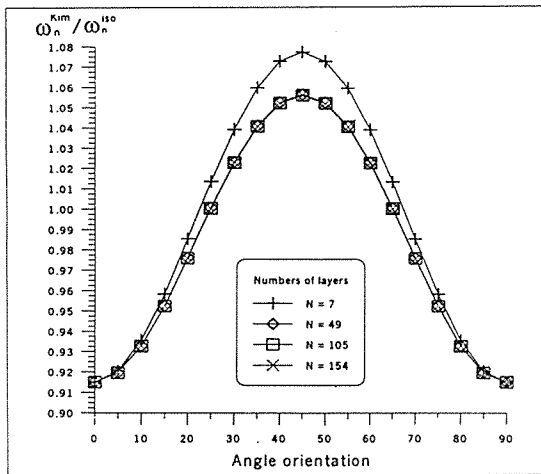


Fig. 2. Ratios of $\omega_n^{\text{kim}} / \omega_n^{\text{iso}}$ with increasing number of layers ($a/b = 1, \gamma = 90^\circ$)

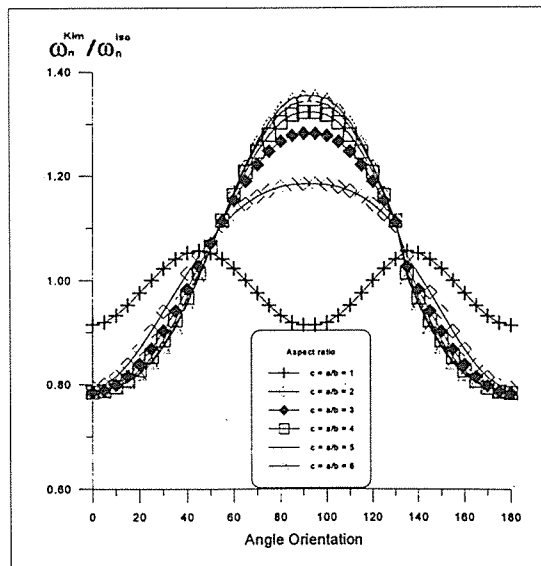


Fig. 3. Ratios of $\omega_n^{\text{kim}} / \omega_n^{\text{iso}}$ with increasing of aspect ratios ($r = 22, \gamma = 90^\circ$)

4. 결 론

복합재료 적층판의 지배방정식은, 횡방향 전단변형률 ($\epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$)이 무시될 수 있을 때도, 복잡한 세 개의 연립 편미분 방정식을 필요로 하기 때문에 일반 건설기술자들에게는 너무 복잡하다. 그러나 B_{16}, B_{26}, D_{16} , 및 D_{26}

강성이 작아지면 이들 복잡한 식은, 비교적 간단한 특별직교 이방성판의 지배 방정식으로 변환다. 여기에 유사등방성상수를 사용하면 이 방정식은 기술자들에게 낮은 등방성판의 4차 미분방정식으로 변환다. 구조물의 예비설계 시 응력상태가 미지수이어서 섬유 배향각을 결정할 수 없을 때, 섬유와 모재 등을 결정한 후 각각의 복합재료가 갖고 있는 최소한의 강도를 나타내는 유사등방성 상수를 사용하여 여러 가지 응력 및 변형을 구한 다음, 본 논문에서 제시된 “수정계수”를 사용하여 “정확한” 값을 구하고 정확한 섬유 배향각을 설계하고 위의 “간단한” 과정을 다시 거치면 정확한 결과가 손쉽게 얻어지게 된다.

본 논문에서 제시된 $[\alpha/\beta/\gamma/\alpha/\beta]$, 배향각을 갖는 적층판은, 건설 구조물에 많이 사용될 수 있는 특성을 갖고 있으면서 $\alpha = -\beta, \gamma = 0^\circ$ 또는 90° 일 때 r 이 증가하면 $B_{16} = B_{26} \rightarrow 0, D_{16} = D_{26} \rightarrow 0$ 이 되어 위에 설명한 간단한 방법으로 해석이 가능하다.

본 논문에서 계산한 고유진동수는 김덕현의 방법으로 구해졌는데, 이 방법에 필요한 변위는 단순지지된 등방성판에 대한 “정확한” 해로 알려진 Navier 해법을 특별직교이방성판의 지배방정식에 적용하여 구했으므로 특별직교 이방성판의 해와 일치한다. 복합재료적층판의 진동에 대한 “정확한” 해석적 방법은 단순지지되고 단면이나 하중조건 등이 이상적인 경우에만 가능하나, 김덕현 방법은 변위의 영향계수만 구하면 이 계수의 정확도 범위에서 언제나 정확한 답을 구할 수 있다.

기술자들의 참고를 위해서 섬유배향각의 변화와 판 두께 및 형상비 증가에 따른 여러 가지 데이터를 제공했는데, 본 논문에서 다룬 배향각을 가진 적층판은 $r = 1$ 일 때, 이미 $B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} \rightarrow 0$ 으로 됨을 알 수 있다.

판의 형상비, $c = a/b = 1$ 일 때는 $\alpha = \theta^\circ$ 인 경우와 $\alpha = 90^\circ - \theta^\circ$ 인 경우, 같은 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

참고문헌

1. Kim, D. H., Composite Structures for Civil and Architectural Engineering, E & FN SPON, London, 1995.
2. Kim, D. H., “A Simple Method of Analysis for the Preliminary Design of Particular Compos-

ite Laminated Primary Structures for Civil Construction", Journal of Material Processing Technology 55, London, 1995, pp 242-248.

3. Kim, D. H., "A Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Structural Members", Proceedings, International Symposium on Engineering Problems in Creating Coastal Industrial Sites, October, Seoul, 1974, pp1-2-1 ~ 1-2-38.

4. Kim, D. H., et all, "A Simple Method of Vibration Analysis of Irregularly Shaped Com-

posite Structural Elements", 1st Japan Int'l SAMPE Symposium, Nov. 28~Dec. 1, 1989, pp 863~868.

5. Kim, D. H., "Design of Composite Material Structures", Proc. of China-Japan-USA Trilateral Symposium/Workshop on Earthquake Engineering, Nov.5~9, Harbin, 1991, pp 1-5-1~1-5-10.

6. Tsai, S. W., Composite Design, 4th Ed., Think Composite, Dayton, Ohio, 1998.