

論文

일정 횡압력과 증분 압축하중을 동시에 받는 복합재 쉘의
비선형 해석을 위한 수치기법 연구

김진호* · 권진희**

Numerical Method for Nonlinear Analysis of Composite Shells under
Constant Lateral Pressure and Incremented In-plane Compression

Kim, Jin-Ho* and Kweon, Jin-Hwe**

ABSTRACT

This paper presents a modified arc-length method for the nonlinear finite element analysis of a structure which is loaded in incremental and fixed forces, simultaneously. The main idea of the method is to separate the displacement term by the constant force from that by the incremental force. Presented method is applied to the nonlinear analysis of isotropic shell structures separately loaded by lateral pressure or compression, and shows the excellent agreement with previous results. As an illustrative example of the applicability of the present algorithm, a parametric study is performed on the nonlinear buckling analysis of composite cylindrical panels under the combined load of the incremented compression and the constant lateral pressure.

초 록

본 논문에서는 크기가 일정한 비증분 하중과 크기가 커서 증분이론을 사용해야만 하는 증분하중이 동시에 가해지는 구조물의 비선형 해석을 위한 수정 호길이법을 제시한다. 수정된 호길이법에서는 비선형 계산을 수행할 때 증분하중에 의한 변위와 비증분 하중에 의한 변위를 구분하여 처리하게 된다. 제안된 방법의 타당성은 내압, 외압 및 압축하중을 받는 쉘 구조물의 비선형 거동에 대한 기존 결과와의 비교를 통해 검토하였다. 또한 비증분 하중과 증분하중이 함께 가해지는 대표적인 경우로서, 일정 횡압력과 축방향 증분 압축하중을 동시에 받는 쉘 구조물의 비선형 좌굴거동에 대한 인자연구를 수행하였다.

1. 서 론

셸(Shell)은 항공기, 선박, 잠수함, 건축물의 돔 등에
서와 같이 가장 흔하게 접할 수 있는 구조물이다. 특히

항공기의 외피는 거의 모든 부분에서 어느 정도의 곡
률을 가진 셸로 볼 수 있다. 따라서 지금까지 이러한
셸 구조물의 해석을 위한 수많은 연구가 이루어져 왔
고, 이에 따른 다양한 쉘 이론들이 제시되어 왔다. 특히

*경상대학교 산업대학원 (현, 공군사령부)

**정회원, 경상대학교 항공기계공학부, 항공기부품기술연구센터

셀이 압축하중을 받을 경우 재료강도보다 훨씬 낮은 응력에서 좌굴이 발생하게 되어 구조적으로 큰 문제를 일으킬 수 있으므로 셀의 압축 좌굴과 관련된 연구는 최근까지도 계속되고 있다[1-9].

지금까지의 셀 좌굴에 대한 연구는 주로 횡하중이나 압축하중 중 하나만을 받는 경우에 대한 연구였다. 그러나 실제 항공기와 잠수함 등의 경우 굽힘 모멘트로 인한 압축 혹은 인장하중을 받을 뿐만 아니라 비록 그 크기는 작지만 연료나 여압 혹은 외부 공기력으로 인한 횡압력을 동시에 받게 된다. 이미 잘 알려진 바와 같이 셀에 횡하중이 작용할 경우 압축 좌굴응력은 크게 달라질 수 있으므로 정확한 좌굴하중 계산을 위해서는 횡압력을 고려한 해석이 필요하게 된다.

셀의 경우 횡하중과 압축하중 어떤 경우이든, 일반적으로는 좌굴 전에 무시할 수 없을 정도의 대변형이 발생하게 되어 비선형 해석을 수행해야 한다. 또한 좌굴 직후 지지하중이 급격히 감소하는 불안정 좌굴을 보이게 되고 이에 따라 하중경로 상에 극점(Limit Point)이 존재하게 된다. 이를 해결하기 위해 제안된 방법이 호길이법(Arc-Length Method)이다[10-12]. 전통적인 호길이법의 특징은 외부에서 가해지는 하중을 하중 인자(Load-Parameter)를 사용하여 일정비율로 증가 혹은 감소시켜 나가는 것에 있다. 그러나 항공기 등의 실제 구조물에서는 횡하중은 매우 작고 압축하중은 큰 경우가 많으므로, 횡하중과 압축하중을 동일한 비율로 제어할 수 없게 된다. 이러한 경우에는 횡하중은 일정한 값으로 그대로 두고 압축하중만을 증가시키면서 증분이론을 사용하여 좌굴해석을 수행해야 한다. 따라서 일정한 횡하중과 크기가 변하는 압축하중이 동시에 존재하는 셀의 비선형 해석을 위해서는 기존의 호길이법을 적절히 수정한 새로운 수치적 기법이 사용되어야 한다.

본 연구에서는 Riks[10]와 Crisfield[11] 등이 제안한 기존의 호길이법을 수정하여 크기가 변하는 하중 성분과, 증분되지 않고 고정된 하중성분이 동시에 존재하는 구조물의 비선형 해석을 위한 수정 호길이법을 제안한다. 제안된 방법은 수정된 Newton-Raphson 방법과 함께 사용된다. 사용한 유한요소는 8절점 셀요소이고 Updated Lagrangian 증분이론을 사용하여 유한요소 지배방정식을 유도하였다. 수치예제로 일정한 횡압력과 증분되는 압축하중을 동시에 받는 $[\pm\theta/0/90]_s$ 적층을 가진 복합재 원통판넬의 좌굴거동을 해석하였다. 제시된 수치예제는 복합재 셀의 좌굴해석만을 포함

하고 있지만, 제안된 방법은 증분하중과 비증분 하중이 동시에 가해지는 구조물의 해석에 일반적으로 적용될 수 있는 방법이다.

2. 정식화

2.1. 유한요소 방정식

본 연구에서 유한요소 이상화를 위해 사용한 요소는 Fig. 1에 보인 8절점 적층 셀요소이다. 요소의 형상함수는 국부좌표계의 2차함수로 구성하였다. 비선형 정식화 기법으로는 부분좌굴 후의 대변형을 묘사하기 위해 2nd Piola-Kirchhoff 응력과 Green의 변형률을 기본으로 한 Updated Lagrangian 증분이론을 사용하였다. 직교이방성 복합재 단층(Laminae)을 적층한 셀요소에 대한 비선형 유한요소방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다[8].

$$([K_L] + [K_{NL}])\{\Delta U\} = -\{\Delta P\} \quad (1)$$

여기서

$$[K_L] = \iiint_{V_n} [B''_L]^T [D''] [B_L''] dV \quad (2)$$

$$[K_{NL}] = \iiint_{V_n} [B''_{NL}]^T [\bar{\sigma}'] [B''_{NL}] dV \quad (3)$$

$$\{\Delta P\} = \iiint_{V_n} [B''_L]^T \{\sigma^p\} dV - \{F_{n+1}\} \quad (4)$$

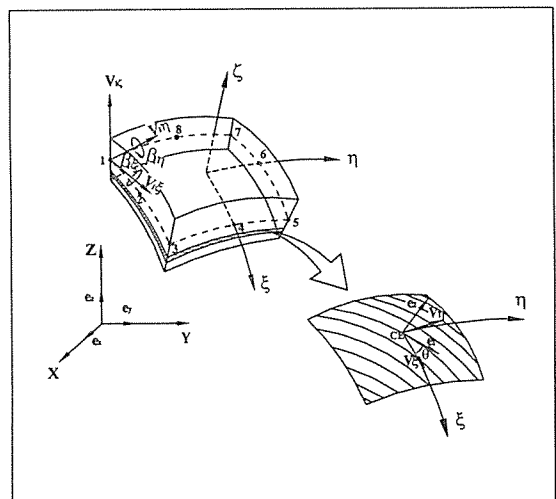


Fig. 1. Eight-node laminated shell element.

식 (1)에서 $[K_L]$ 과 $[K_{NL}]$ 은 식 (2)와 (3)에 제시된 바와 같이 접선강성행렬 $[K_T]$ 의 선형 성분과 비선형 성분이다. 식 (2)~(4)에서 $[B_L^T]$, $[B_{NL}^T]$, $[D^T]$ 은 각각 임의의 n 번째 평형단계 기준을 한 변형률-변위 관계 행렬과 변위-미분변위 관계행렬 및 응력-변형률 관계 행렬이다^[8]. 또한 $\{F_{n+1}\}$ 은 $n+1$ 번째 평형상태에서의 외부하중 벡터이고 증분하중과 비증분 하중이 모두 포함되어 있다. σ 와 $[\sigma]$ 는 각각 식 (5)~(7)에 보인 바와 같다. 상첨자 n 은 n 번째 평형상태에서의 값을 의미한다.

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz}]^T \quad (5)$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} [\sigma] & 0 & 0 \\ 0 & [\sigma] & 0 \\ 0 & 0 & [\sigma] \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

2.2. 수정 호길이법

앞에서도 밝힌 바와 같이 평형경로 상에 극점이 존재하는 구조물의 해석을 위해서 가장 많이 사용되는 방법이 호길이법이다. 호길이법의 기본개념은 Fig. 2에 보인 바와 같이 기존의 반복계산에서와 달리, 반복계산을 수행할 때 하중과 변위에 대한 특별한 구속조건을 추가하는 것이다. 다만 본 문제에서와 같이 외부하중이 두 가

지 형태 즉, 고정된 비증분 하중인 압력과 증분하중인 압축하중의 조합하중으로 구성되는 경우는 기존의 수치 해석 기법에 대한 수정이 필요하게 된다. 또한 호길이법은 Newton-Raphson 방법이나 수정 Newton-Raphson 방법 어느 것파도 같이 사용될 수 있다. 본 연구에서는 그림에 보인 바와 같이 접선강성행렬의 계산 횟수를 사용자가 적절히 정의할 수 있도록 하여 계산의 효율성을 향상시켰다.

수정 호길이법의 개념을 설명하기 위해 먼저 임의의 $n+1$ 번째 반복계산에서의 증분변위 및 하중인자간의 관계를 다음과 같이 정의한다.

$$\{\Delta u^{n+1}\} = \{\Delta u^n\} + \{\Delta u^{n+1}\} \quad (8)$$

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \Delta \lambda^{n+1} \quad (9)$$

여기서 $\{\Delta u^{n+1}\}$ 은 주어진 하중단계에서 $n+1$ 번째 반복계산까지 발생한 증분변위들의 합이고 $\{\Delta u^{n+1}\}$ 은 n 번째 반복계산에서 발생한 증분변위이다.

식 (1), (8), (9)로부터 $n+1$ 번째 반복계산에서의 유한요소방정식은 하중인자의 증분, $\Delta \lambda^{n+1}$ 을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[K_T] \{\Delta u^{n+1}\} = -\{\Delta P(\lambda^n)\} + \Delta \lambda^{n+1} \{F_0\} + \{F_p\} \quad (10)$$

여기서

$$\{\Delta P(\lambda^n)\} = \iiint_{V_x} [B_L^T]^T \{\sigma^n\} dV - \lambda^n \{F_0\} \quad (11)$$

식 (10)에서 $\{F_0\}$ 는 증분하중의 분포를 나타내는 단위벡터이고, $\{F_p\}$ 는 일정한 크기의 비증분하중 벡터로서 비증분하중이 존재하는 조합하중 문제에서만 나타나는 항이다. 또한 외부하중벡터 $\{F_{n+1}\}$ 은 하중인자의 크기에 따라 크기가 변하는 증분하중 항 $\Delta \lambda^{n+1} \{F_0\}$ 와 하중인자와 무관하게 크기가 고정된 비증분 하중 항 $\{F_p\}$ 로 분리되어 있다. 기존의 호길이법과 본 연구에서 제안한 호길이법의 차이는 여기에서 시작된다.

식 (10)으로부터 증분변위, $\{\Delta u^{n+1}\}$ 은 하중인자의 증분에 따른 변위와 비증분 하중 $\{F_p\}$ 에 의한 변위 $\{u_p\}$ 로 구분하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{\Delta u^{n+1}\} = \{\Delta u^{n+1}(\lambda^n)\} + \Delta \lambda^{n+1} \{u_T\} + \{u_p\} \quad (12)$$

여기서

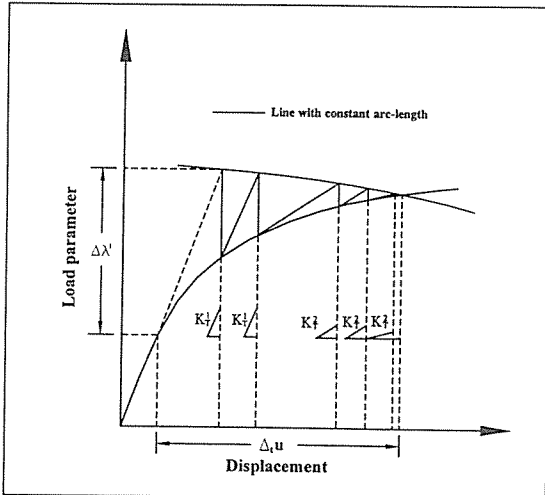


Fig. 2. Arc-length method combined with an improved Newton-Raphson method.

$$\{\Delta u^{n+1}(\lambda^n)\} = -[K_T]^{-1} \{\Delta P(\lambda^n)\} \quad (13)$$

$$\{u_T\} = [K_T]^{-1} \{F_0\} \quad (14)$$

$$\{u_p\} = [K_T]^{-1} \{F_p\} \quad (15)$$

한 하중단계에서 발생할 수 있는 전체 변위에 대한 구속조건은 보통의 호길이법에서와 마찬가지로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{\Delta_i u\}^T \{\Delta_i u\} = (\Delta l)^2 \quad (16)$$

식 (10), (12), (16)으로부터 $\Delta \lambda^{n+1}$ 은 다음과 같이 구하여 진다.

$$\Delta \lambda^{n+1} = [-B \pm (B^2 - 4AC)^{1/2}] / (2A) \quad (17)$$

여기서

$$A = \{u_i\}^T \{u_T\} \quad (18)$$

$$B = 2[\{\Delta_i u^n\} + \{\Delta u^{n+1}(\lambda^n)\} + \{u_p\}]^T \{u_T\} \quad (19)$$

$$C = [\{\Delta_i u^n\} + \{\Delta u^{n+1}(\lambda^n)\} + \{u_p\}]^T [\{\Delta_i u^n\} + \{\Delta u^{n+1}(\lambda^n)\} + \{u_p\}] - (\Delta l)^2 \quad (20)$$

식 (17)에서 최초의 반복계산을 제외한 모든 경우에는 역행(Backtrack) 현상을 방지하기 위해 $\{\Delta_i u^{n+1}\}^T \{\Delta_i u^n\}$ 에 양의 값을 주는 것을 해로 취한다. 최초의 반복계산에서의 하중 증분량과 방향을 결정하기 위해서는, 최초 계산에서의 증분변위 $\{\Delta u'_{N+1}\}$ 이 직전 하중 단계에서의 증분 변위의 합 $\{\Delta_i u_N\}$ 과 예각을 이루어야 한다는 조건을 사용하였다.

$$\{\Delta_i u_N\}^T \{\Delta u'_{N+1}\} > 0 \quad (21)$$

식 (21)은 물리적으로 현 하중단계에서의 변형의 진전방향이 직전 하중단계에서의 진전방향과 연속선상에 있어야 한다는 것을 의미한다. 식 (20)에서, 최초의 하중증분에서의 호길이는 해석자에 의해 임의로 결정된다. 최초의 하중증분을 제외한 나머지의 경우는 식 (22)에서와 같이 직전 하중단계에서의 반복계산 횟수, I_N 을 기준으로 하여 결정하는 것이 일반적이다.

$$\Delta l_{N+1} = \Delta l_N (I_D / I_N)^{1/2} \quad (22)$$

여기서 I_D 는 해석자가 설정한 반복계산 횟수이다. 만약 식 (17)의 두 값 모두가 의미 없는 값이거나 근호

속의 값이 음이 될 경우, 통상적으로는 호길이를 일정 비율로 줄여서 다시 계산을 수행하게 된다.

3. 수치예제 해석

3.1. 기존 결과와의 비교

제안된 수정 호길이법 알고리즘의 타당성 검토를 위해 기 수행된 연구결과와 개발된 유한요소 프로그램을

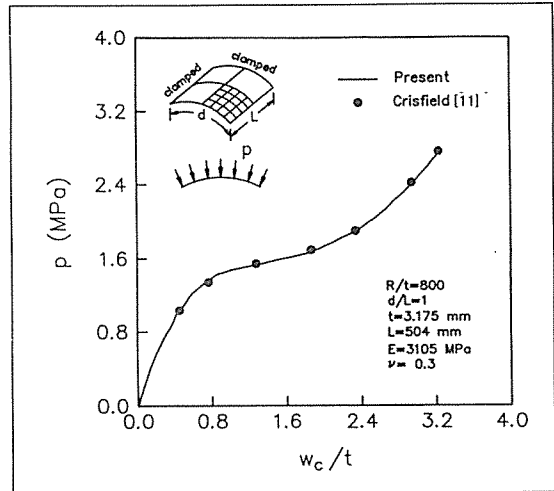


Fig. 3. Load-deflection curve of an isotropic cylindrical panel under external pressure.

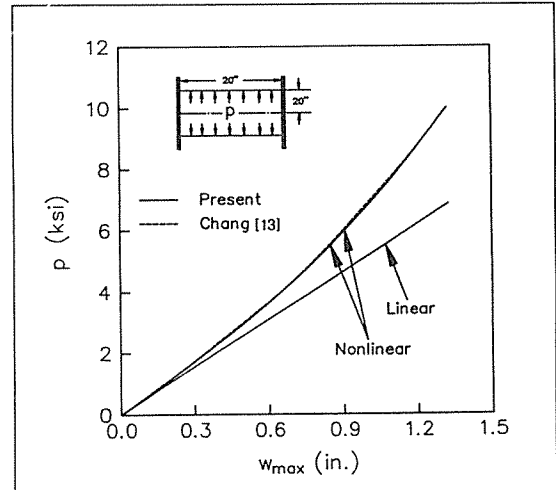


Fig. 4. Load-deflection curve of an isotropic shell under internal pressure.

사용한 결과를 비교하였다. 여기에서 인용한 예제들은 기존의 호길이법을 사용하여서도 해석 가능하지만 일정한 횡하중과 증분되는 축하중을 동시에 받는 경우에 대한 해석결과가 제시되어 있지 않으므로 횡하중과 축하중이 각각 따로 가해지는 경우에 대한 결과들과 비교한 것이다. Fig. 3과 Fig. 4는 각각 원통판넬이 외압을 받는 경우와 원통셸이 내압을 받는 경우에 대한 하중-처짐 곡선이다. 두 경우 모두 기존의 비선형 해석결과와 매우 잘 일치하고 있고 특히 외압을 받는 원통판넬의 경우에는 좌굴 후의 평형경로까지 정확히 일치

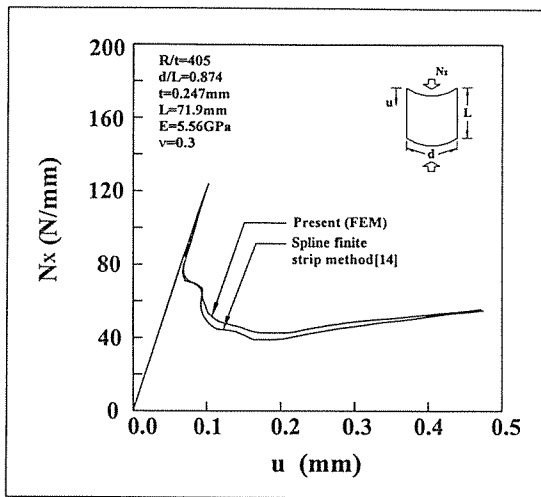


Fig. 5. Load-shortening curve of an isotropic cylindrical panel under axial compression.

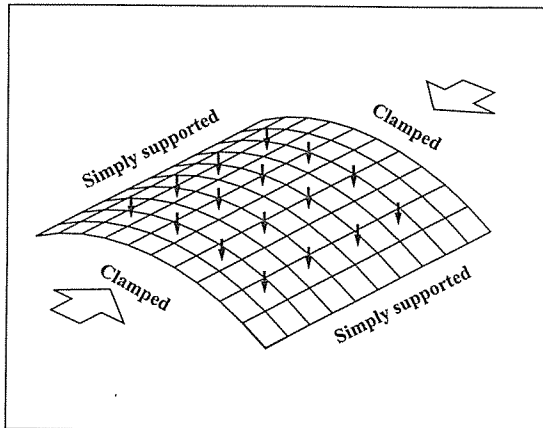


Fig. 6. Finite element model and boundary conditions.

하고 있다. Fig. 5는 원통 판넬이 압축하중을 받는 경우에 대한 하중-변위 곡선이다. 이 경우에도 해석과 실험의 결과가 매우 잘 일치하고 있다. 예제에 대한 해석결과에서도 볼 수 있듯이, 본 논문에서 제안된 방법은 쉘 구조물의 단순 좌굴해석 뿐만 아니라 좌굴 후 해석에도 적용될 수 있다.

3.2. 수치예제

3.2.1. 문제설정

개발된 알고리즘의 효율성과 다양한 적용성을 확인하기 위해 복합재 원통 판넬의 비선형 좌굴해석을 수행하였다. 원통판넬의 곡률반경 및 길이는 각각 150 mm, 폭과 길이의 비는 1.414, 두께는 1.0mm이다. 경계조건은 하중을 받는 곡선 경계에서는 고정지지 (Clamped)이고 직선 경계에서는 원주방향 변위를 구속하는 단순지지 (Simply Supported)이다. 적층순서는 $[\pm\theta/0/90]_s$ 이고 적층각 θ 를 15° 간격으로 변화시키면서 횡방향 압력이 판넬의 좌굴거동에 미치는 영향을 살펴보았다. 재료상수는 다음과 같이 T300/S208의 자료를 사용하였다.

$$E_1=181.0 \text{ GPa}, E_2=10.3 \text{ GPa}, G_{12}=7.17 \text{ GPa}, \nu_{12}=0.28$$

각 단층별 섬유각도는 판넬의 종축에 대해 반시계 방향으로 정의되지만, 유한요소해석을 위한 자료입력에서는 Fig. 1에서 보인 바와 같이 요소 국부좌표계의 종축에 대한 값으로 환산하여 입력한다. 만약 섬유의 방향을 고정된 전체 좌표계에 대해 정의하게 될 경우, 판넬이 대회전을 할 때 전체좌표계와 섬유와의 상대적인 위치가 함께 변하게 되어, 매 계산단계마다 섬유의 방향을 새롭게 계산해야 한다. 그러나 유한요소에 부착되어 구조물과 함께 움직이는 국부좌표계에 대해 정의할 경우, 좌굴 후 아무리 큰 변형을 겪더라도 섬유의 방향이 항상 일정하게 정의된다. 유한요소모델은 Fig. 6에 보인 바와 같이 8절점 쉘요소 144개(12×12)를 사용하였다.

3.2.2. 인자연구

원통판넬의 압축 좌굴응력에 대한 적층순서 및 횡압력의 영향을 좌굴거동을 살펴보기 위하여 $[\pm\theta/0/90]_s$ 의 적층순서를 가진 원통판넬 대하여 횡압력의 크기를 -0.1MPa(외압)에서 +0.1MPa(내압)까지 변화시키면서 비선형 좌굴해석을 수행하였다. Fig. 7에 횡방향

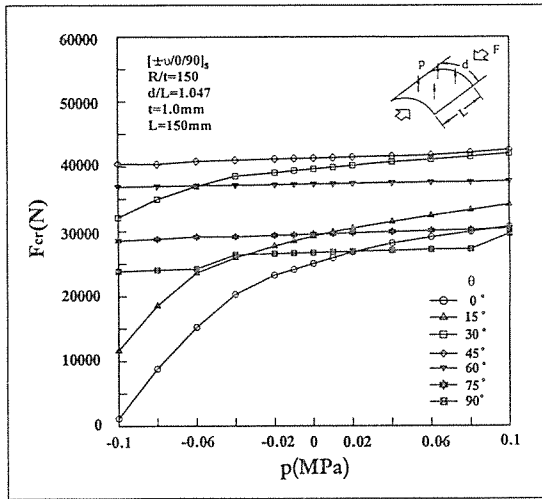


Fig. 7. Effect of lateral pressure on the compression buckling load.

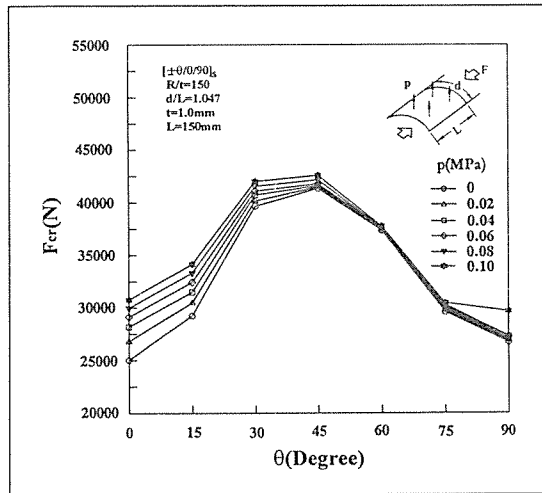


Fig. 8. Effect of fiber angle on the compression buckling load (internal pressure).

압력의 변화에 따른 압축 좌굴응력의 변화를 도시하였다. 제시된 결과를 보면 섬유각 θ 에 따라 횡압력에 대한 민감도가 크게 달라지는 것을 확인할 수 있다. θ 가 45° (준등방성, Quasi-isotropic) 혹은 60° 일 경우 전반적으로 매우 높은 좌굴응력을 보이면서 횡압력의 변화에 따른 영향을 크게 받지 않는 것 알 수 있다. 반면에 θ 가 0° , 15° 등으로 섬유가 판넬의 종축 방향으로 주로 배치될 경우 횡방향 압력에 따른 좌굴응력의 변화가 큰 것을 알 수 있다. 예로서 θ 가 0° 인 경우, 횡압

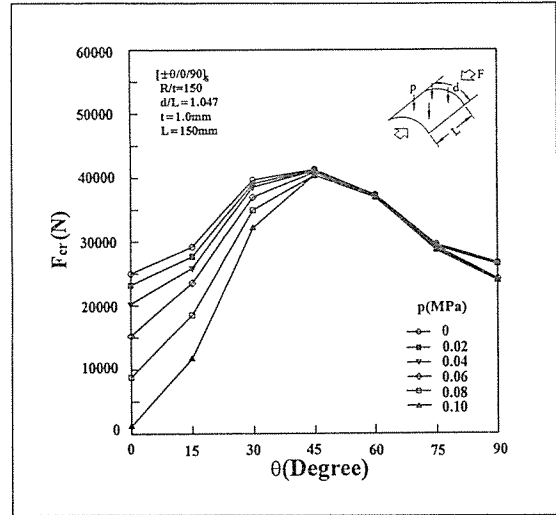


Fig. 9. Effects of fiber angle on the compression buckling load (external pressure).

력이 -0.1 MPa(외압)일 때와 $+0.1$ MPa(내압)일 때의 압축 좌굴응력이 10배 이상 차이가 난다. 또한 전체적으로 정도의 차이는 있지만 판넬이 내압을 받을 경우 좌굴응력이 상승하고 외압을 받게 되면 좌굴응력이 낮아지는 것을 확인할 수 있다.

주어진 횡압력 하에서 섬유방향 θ 의 변화가 좌굴응력에 미치는 영향을 Fig. 8(내압을 받는 경우)과 Fig. 9(외압을 받는 경우)에 제시하였다. 내·외압을 받는 경우 모두 좌굴응력이 섬유방향 θ 에 매우 민감하게 변하는 것을 알 수 있다. 또한 압력의 크기와 방향에 무관하게 $\theta=45^\circ$ 에서 좌굴응력이 가장 높게 나타난다. 내압을 받는 경우에는 압력의 크기가 증가함에 따라 좌굴응력이 증가하지만 증가하는 정도는 매우 미미하다. 반면에 외압을 받을 경우 압력의 증가에 따른 좌굴응력의 감소가 상대적으로 크게 나타난다. Fig. 7에서도 볼 수 있었던 것처럼 좌굴응력은 $\theta=45^\circ$ 에서 가장 높고 횡압력에 대한 민감도는 $\theta=60^\circ$ 에서 가장 안정적인 것을 확인할 수 있다.

본 연구를 통해 발견한 흥미로운 사실은 횡압력이 좌굴모우드에 미치는 영향이다. 횡방향 압력의 크기에 따라 좌굴응력이 달라진다는 것은, 다르게 설명하면 좌굴모우드도 달라질 수 있다는 것을 의미한다. 이것은 Fig. 10에 제시된 $\theta=0^\circ$ 인 판넬의 좌굴모우드를 살펴보면 쉽게 알 수 있다. $\theta=0^\circ$ 인 판넬은 좌굴응력이 횡압력의 변화에 매우 민감한 경우이다. 그림의 (a)와

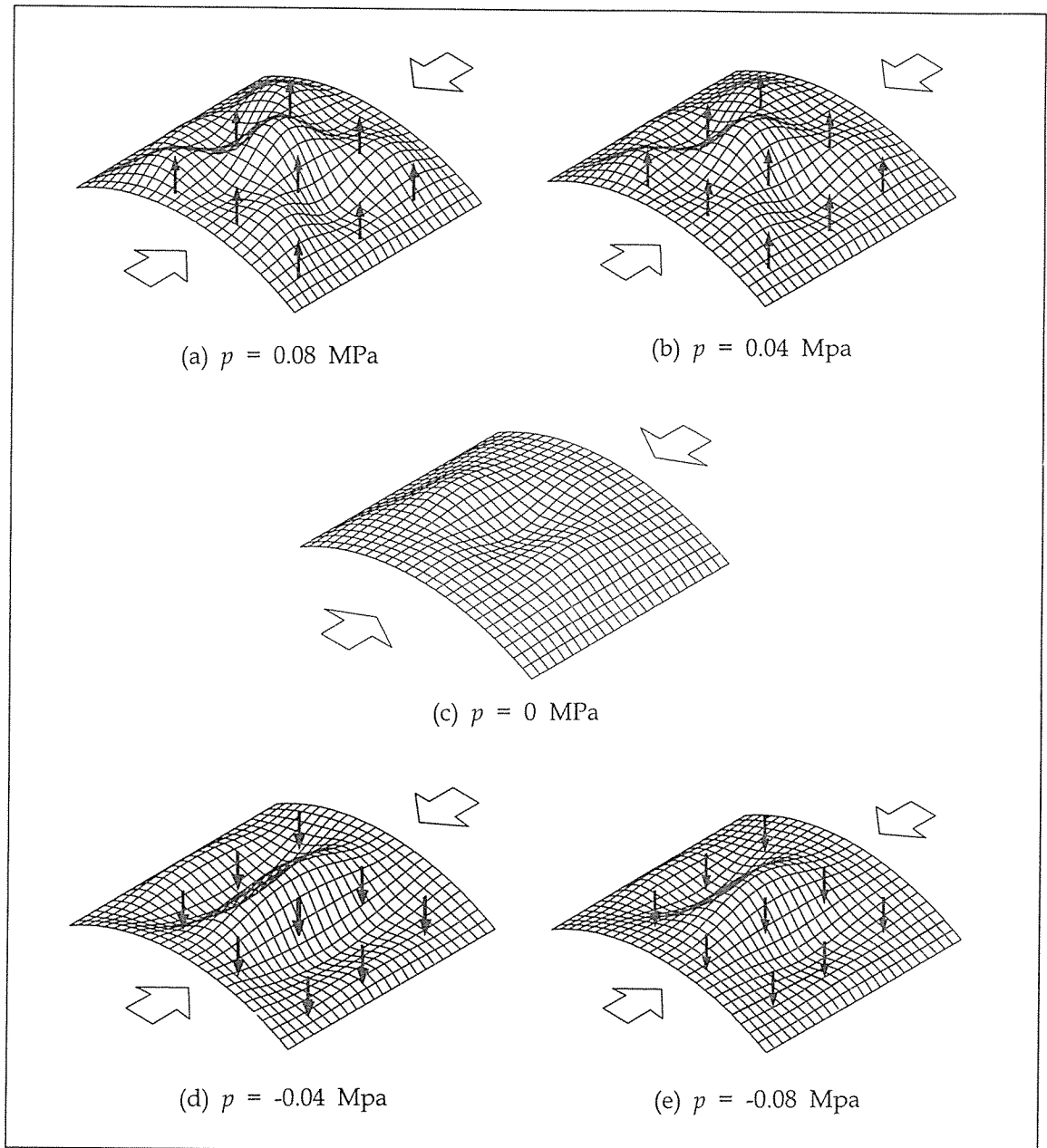


Fig. 10. Three dimensional plots of buckling mode shapes for $[03/90]_s$ panel.

(b) 혹은 (c)와 (d)를 비교해 보면 압력의 크기에 따른 좌굴모우드의 변화는 거의 발견되지 않는다. 반면에 내압을 받는 경우인 (a)와 외압을 받는 경우인 (c)를 비교해 보면 좌굴모우드 자체가 완전히 달라지는 것을

볼 수 있다. 반면에 좌굴응력이 횡압력에 민감하지 않은 준등방성 판넬($\theta=45^\circ$)의 경우 Fig. 11에 보인 바와 같이 압력에 따른 좌굴모우드의 변화가 심하지 않은 것을 볼 수 있다. 이로부터 횡압력의 차이에 따라

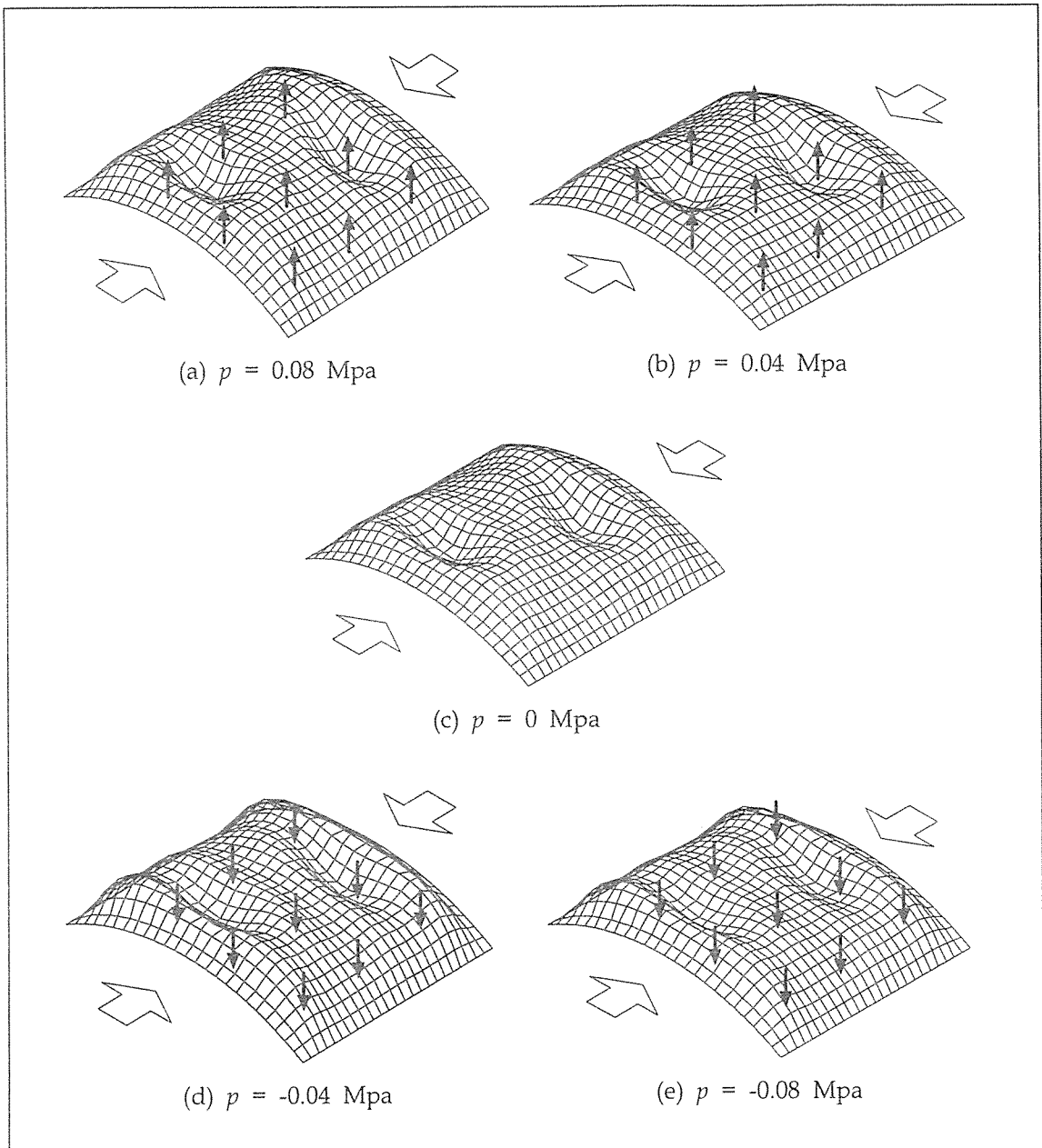


Fig. 11. Three dimensional plots of buckling mode shapes for $[\pm 45/0/90]_s$ panels.

좌굴응력이 달라지는 것은 좌굴모우드의 차이에 기인
한다는 것을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 증분이론의 적용을 받지 않는 일정
크기 하중과 증분이론을 사용하여 해석을 해야 하는

큰 하중이 동시에 가해지는 구조물의 비선형 유한요소 해석을 위한 수정 호길이법을 제안하였다. 제안된 알고리즘의 타당성 및 적용성 검토를 위해 기존의 수치해석 결과들과의 비교 연구를 수행하였고, 일정한 횡압력과 증분 압축하중을 동시에 받는 복합재 원통판넬에 대한 비선형 좌굴거동을 해석하였다. 수치예제들에 대한 해석 결과, 제안된 알고리즘이 증분하중과 고정하중을 동시에 받는 구조물의 비선형 해석에 효과적으로 적용될 수 있음을 확인하였다. 또한 제안된 방법을 사용하여 복합재 원통판넬의 좌굴거동에 대한 인자연구를 수행한 결과 준등방성 적층에서는 횡압력에 대한 좌굴응력의 변화가 미세한 반면 보강섬유가 판넬의 종축 방향으로 많이 배치될 경우 횡압력의 변화에 따른 좌굴응력 및 좌굴모우드의 변화가 커지는 것을 확인하였다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 지정 경상대학교 항공기부품기술연구센터의 지원에 의한 것입니다.

참고문헌

1. J. C. Amazigo, "Buckling under Axial Compression of Long Cylindrical Shells with Random Axisymmetric Imperfection", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol.39, 1972, pp.179-184.
2. D. J. Wilkins, "Compression Buckling Tests of Laminated Graphite-Epoxy Curved Panels", *AIAA Journal*, Vol.13, 1975, pp.465-470.
3. J. S. Hansen, "Influence of General Imperfection in Axially Load Cylindrical Shells", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.11, 1975, pp.1123-1133.
4. J. S. Hansen, "General Random Imperfection in The Buckling of Axially Loaded Cylinders",

AIAA Journal, Vol.15, 1977, pp.1250-1256.

5. M. Boonton and R. C. Tennyson, "Buckling of Imperfect Anisotropic Circular Cylinders under Combined Loading", *AIAA Journal*, Vol.17, 1979, pp.278-287.

6. D. Bushnell, "Buckling of Shells-Pitfall for Designers", *AIAA Journal*, Vol.19, 1981, pp.1183-1226.

7. N. R. Bauld, Jr. and N. S. Khot, "Numerical and Experimental Investigations of The Buckling Behavior of Composite Panels", *Computers and Structures*, Vol.15, 1982, pp.393-403.

8. W. F. Chen and E. M. Lui, *Structural Stability*, Elsevier, New York, 1987.

9. S. M. Jun and C. S. Hong, "Buckling Behavior of Laminated Composite Cylindrical Panels under Axial Compression", *Computers and Structures*, Vol.29, 1988, pp.479-490.

10. E. Riks, "An Incremental Approach to The solution of Snapping and Buckling Problems", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.15, 1979, pp.529-551.

11. M. A. Crisfield, "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap-Through", *Computers and Structures*, Vol.13, 1981, pp.55-62.

12. J. H. Kweon and C. S. Hong, "An Improved Arc-Length Method for Postbuckling Analysis of Composite Cylindrical Panels", *Computers and Structures*, Vol.53, 1994, pp.541-549.

13. T. Y. Chang and K. Sawamiphakdi, "Large Deflection Analysis of Laminated Shells by Finite Element Method", *Computers and Structures*, Vol.13, 1981, pp.331-340.

14. D. S. Zhu and Y. K. Cheung, "Postbuckling Analysis of Shells by Spline Finite Strip Method", *Computers and Structures*, Vol.31, 1989, pp.357-364.