論文

확률분포를 이용한 복합재료의 강도예측

조영준* · 강태진* · 이경우**

Prediction of Laminate Composite Strength Using Probabilistic Approach

Young Jun Cho*, Tae Jin Kang* and Kyung Woo Lee**

ABSTRACT

A numerical approach for predicting the ultimate strength of laminate composites has been studied using the Weibull distribution of the strengths of lamina plies. The probabilistic initial failure strengths of laminates were calculated using Tsai-Hill failure criterion. The ultimate strength of the laminate composites has been predicted using progressive failure analysis. The experimental results show that the strength prediction based on the Weibull distribution of ply strength reasonably agrees well with the experimentals better than equal strength assumption.

초 록

복합재료 적층판의 최종강도를 점증적 파손 해석방법을 사용하여 예측하였다. 플라이 강도를 확률분포로 가정했을 경우와 상수로 가정했을 경우 각각의 최종강도를 예측하였다. 복합재료의 강도에 대한 확률분포인 Weibull 분포를 이용하여 임의의 강도 값을 얻은 후 이 값을 Tsai-Hill 파손식에 대입하여 파손여부를 판정하고 파손이 일어나면 재료의 물성을 떨어뜨렸다. 이 방법에 의해서 얻어진 결과를 플라이의 강도를 상수로 가정하여 해석한 경우와의 차이에 대하여 고찰하였다. 결과적으로 두 경우 모두 실험치와 약간의 오차를 보였지만 파손의 경향성에 있어서는 확률분포를 이용한 강도해석이 실험값과 더 근사한 결과를 보였다.

1. 서 론

대부분의 섬유강화 복합재료는 기존의 금속 재료보다 비강도(Specific Strength)와 비강성(Specific Stiffness)이 높고 피로 특성이 좋기 때문에 무게를 줄여야 하는 우주 항공 재료나 운송 기관 구조재로 효율적으로 사용되고 있다.

일반적인 재료인 강철이나 알루미늄은 등방성 물질이지만 복합재료는 이방성 물질이므로 섬유 배향이 많은 방향으로 가장 높은 강성과 강도를 나타내게 된다. 따라서 섬유강화 복합재료를 이용하여 구조를 설계하는 일은 등방성 재료를 사용하여 설계하는 것보다 훨씬 어렵지만 원하는 방향으로 강도와 강성을 조절할 수가 있으므로 필요한 방향으로만 강성과 강도를 높여

*서울대학교 섬유고분자공학과
**동아대학교 의상섬유학부

서 재료의 효율을 높일 수 있는 장점이 있다.[1-5]

섬유강화 복합재료는 방향성에 따라 강도의 편차가 심하며 또한 같은 재료로 만든 시편이라도 측정할 때마다 측정값에 많은 오차를 보여 구조재의 강도를 예측하는데 어려움이 많다. 더구나 초기 파손이 일어난 후 추가적인 하중에도 견딜 수 있으므로 정확한 최종 강도를 예측하기가 쉽지 않다.[6] 섬유복합재료의 초기 파손 및 최종 강도를 예측할 때는 파손식(failure criterion)을 사용하게 되는데 이 때 복합재료의 강도에 일정한 값을 대입하게 되므로 복합재료의 실제 파손현상과 비교해 볼 때 옳은 해석 방법이라고 할 수 없다. Fukunaga 등은 필라멘트 와인딩 실리더의 파열강도를 예측함에 있어서 확률분포를 이용하였다.[6] Pepit 등은 파손이 일어난 재료의 물성을 떨어뜨리는 방법을 통하여 복합재료의 강도를 예측하였다.[7]

본 연구에서는 복합재료의 강도에 대한 확률분포인 Weibull 분포를 이용하여 임의의 강도 값을 얻은 후 이 값을 Tsai-Hill 파손식에 대입하여 파손여부를 판정하고 파손이 일어나면 재료의 물성을 떨어뜨리는 점증적 파손 해석방법 (Progressive Failure Analysis)을 이용하여 복합재료의 강도를 예측하였다. 이 방법과 강도를 상수로 가정하여 해석한 경우와의 차이에 대하여 고찰하였다.

2. 복합재료의 강도 예측

2.1. 복합재료의 해석

복합재료의 응력해석은 가장 일반적으로 사용되는 방법으로는 고전 적층판 이론(Classical Lamination Theory)을 사용하였다.[8] 고전 적층판 이론은 복합재료의 탄성계수(E_1, E_2, G_{12}, ν_{12})와 플라이의 섬유 배향각을 알면 임의의 하중에서 각 플라이의 응력분포(σ_1, σ_2, τ_{12}), 변형률 등을 구할 수 있다.

2.2. Weibull 분포 (Weibull Distribution)

복합재료의 여러 가지 강도 특성은 정규분포보다는 Weibull 분포로 더 잘 나타내질 수 있다.[9] Weibull 분포는 복합재료의 강도에 대한 누적확률분포함수로서 다음과 같이 나타낸다.

$$y=1-e^{-\alpha x^{\beta}}$$

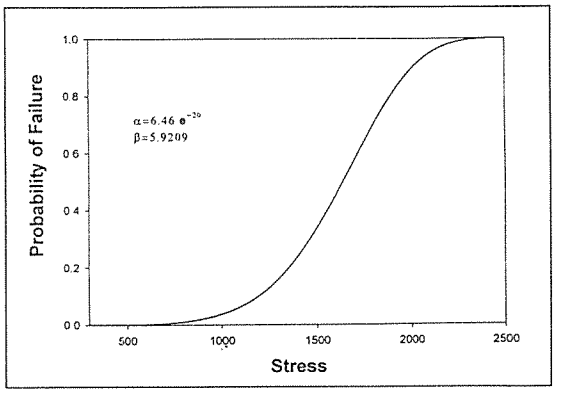

Fig. 1. Weibull Distribution

이는 복합재료에 x라는 stress를 가했을 때 재료가 파괴될 확률에 대한 누적확률분포를 나타내며 두 개의 파라미터 α, β는 실험으로 결정되는 상수값이다.

두 파라미터 α, β를 결정하는 방법은 다음과 같다. 측정된 강도 값을 낮은 것부터 시작하여 순차적으로 나열한 후 각 강도에 대한 누적파손확률은 다음의 식에 의해 구할 수 있다.

$$p(i)=\frac{i}{n+1}$$

여기서 n은 측정한 시편 전체의 개수이고 i=1, 2, 3, ···, n이다. p와 y는 같은 의미가 되므로

$$p_i=1-e^{-\alpha x_i^{\beta}}$$

$$\ln\alpha+\beta\ln x_i=\ln[-\ln(1-p_i)]$$

$\ln x_i$와 $\ln[-\ln(1-p_i)]$의 관계식을 최소자승법 (Least Square Method)을 사용하여 직선 식을 구하면 기울기 β값과 절편값 $\ln\alpha$값으로 α값을 구할 수가 있다. 본 연구에서는 각각 22개씩의 시편의 강도를 측정한 후 세 가지 강도의 Xt, Yt, S의 α, β값을 구하였다. 여기서 Xt는 섬유방향의 인장강도를, Yt는 섬유횡방향의 인장강도를, S는 전단강도를 나타낸다.

이때 압축강도는 인장강도와 절대치는 같고 부호만 다르다고 가정하였다. 이 분포로부터 0과 1 사이의 값을 임의로 발생시켜 이 값에 대응하는 강도 값을 얻는데 이를 Weibull 난수(Weibull Random Variables)라 한다. 이러한 임의의 강도 값을 파손식의 강도부분

에 대입하여 플라이의 파손여부를 판정하였다.

2.3. Progressive Failure Model

적층판 복합재료의 파손현상을 해석하기 위해 progressive failure model을 도입하였다.[10] 이 모델을 이용하면 임의의 하중 또는 변형률 단계에서 각 플라이의 파손여부를 판정하여 적층판의 초기 파손강도 및 최종 최종강도를 예측할 수 있다. 이를 위해선 다음과 같은 과정을 수행하였다. 각 플라이의 적층각, 물질상수, geometry를 포함한 데이터를 입력하여 전체적인 적층복합재료를 구성하였다. 이 적층판에 일정한 변형을 단계적으로 가하였다. 변형률을 0.001에서 시작하여 0.0003 간격으로 40단계에 걸쳐 가하였다. 복합재료의 각 층의 응력상태는 고전 적층판 이론을 사용하여 분석하였다. 그리고 각 층의 파손여부를 판정하기 위해 플라이 응력을 파손식에 적용시켰다. 변형을 계속 가해줌에 따라 파손식은 초기 파손에 이르게 되며 파손이 일어난 플라이의 물질상수를 떨어뜨린 후 다음 단계의 변형을 가해주었다. 본 연구에서는 파손이 일어난 층의 물질상수는 다음과 같이 떨어뜨렸다.

$$[E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}] \rightarrow [0.1E_1, 0.1E_2, 0.1G_{12}, \nu_{12}]$$

이와 같이 변형률의 증가, 응력 분석, 파손 판정의 일련의 과정을 적층판이 더 이상의 응력을 받을 수 없을 때까지 반복하였다. 최종 변형률이 얻어지면 그에 해당하는 응력 값을 계산하여 최종 강도를 결정하였다.

2.4. 파손의 판정

적층복합재료에 변형을 가해주면 고전 적층판 이론을 통해 각 플라이의 플라이 응력(σ_1, σ_2, τ_{12})을 구할 수 있다. 각 층의 응력 값과 강도(X, Y, S) 값을 아래의 Tsai-Hill 파손식에 대입하여 이 식을 만족시키면 그 층에서는 파손이 일어난다.[11]

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 \geq 1$$

기존의 연구에서는 강도 값을 일정한 상수라 가정하여 실험치의 산술평균값을 대입하였다. 그러나 복합재료의 강도는 편차가 심하여 같은 시편이라 할지라도 측정값에 많은 차이를 나타낸다. 따라서 본 연구에서는 복합재료의 강도는 상수가 아니라 Weibull 분포를 따

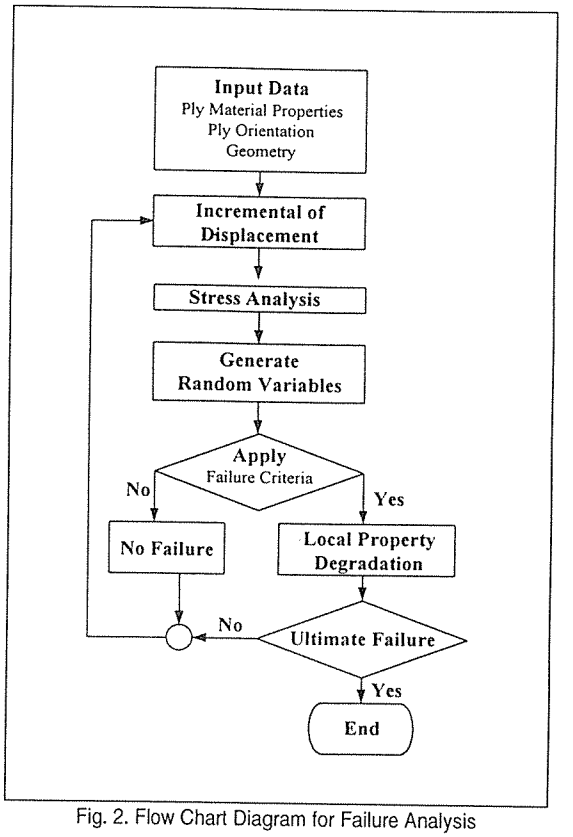

Fig. 2. Flow Chart Diagram for Failure Analysis

르는 변수로 보았다. 변형률이 가해지면 Weibull 분포에서 확률 y에 해당되는 임의의 난수를 0과 1사이에서 발생시켜(y_r) 다음 식을 통해 이 값에 대응하는 강도값 x을 구할 수 있다.

$$x = \left[\frac{1}{\alpha}\ln\left[\frac{1}{1-y_r}\right]\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

이와 같이 각 강도에 대하여 이러한 난수를 동시에 발생시켰다. 이 때 각 플라이별로 서로 다른 난수가 발생하므로 같은 적층각과 성질을 가진 플라이라 하더라도 서로 다른 강도 값을 갖게 된다. 이 값들을 위의 파손식에 대입하여 파손여부를 판정하였다. 이러한 난수를 300개를 발생시켜 각각을 파손식에 대입하였다. 결국 한 변형률 단계에서 300개의 파손식이 만들어지게 되며 이 파손식들 중 50% (또는 30%, 70%, 90%)가 이 식을 만족시킬 때 이 변형률 단계에서 파손이 일어났다고 판정을 내리고 다음 변형률 단계를 가하여 주

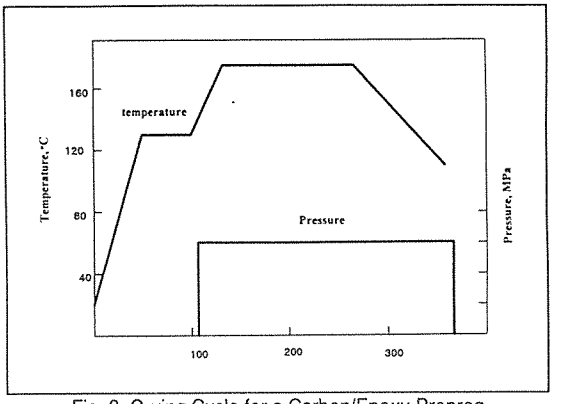

Fig. 3. Curing Cycle for a Carbon/Epoxy Prepreg

었다. 복합재료에 최종 파손이 발생할 때까지 이러한 과정을 반복하였다. 이와 같은 일련의 과정을 Fig. 2에 나타내었다.

3. 실 험

3.1. 시편 제작

본 연구에서 (주)SKI의 UPN 116B carbon/epoxy 프리프레그를 사용하였다. 일방향의 프리프레그를 적층하여 hot press machine을 사용해 경화시켰다. 이와 같은 경화 cycle을 Fig. 3에 나타내었다.

제작된 복합재료에 glass/epoxy 탭을 부착하여 다이아몬드 톱을 이용하여 절단하였다. 모든 시편은 size effect와 edge effect를 최대한 줄이기 위하여 ASTM D3039−79에 의거하여 제작하였다. 또한 인장실험과 전단실험을 통해 일방향 플라이의 기본적인 탄성 성질과 강도를 측정하였다. 인장실험은 ASTM 3039−76에 따라 수행하였다. Instron 인장실험기를 사용하였으며 이 때 crosshead 속도는 0.5mm/min으로 유지하였다. 변형률을 측정하기 위하여 시편에 strain gauge를 부착하였다.

본 연구에서는 강도 예측 프로그램을 사용하여 적층순서를 달리한 적층복합재료의 강도를 예측하였다.

Table 1. 플라이 기본 물성 (V_f=60%)

섬유방향 탄성계수, E_1	168.8 GPa
섬유직각방향 탄성계수, E_2	7.44 GPa
전단방향 탄성계수, G_{12}	6.89 GPa
Poisson's ratio , ν_{12}	0.25

이를 실험을 통하여 확인할 시편은 $[0/45/90/-45]_S$, $[0_2/45/-45]_S$, $[0_2/60/-60]_S$의 적층순서로 제작하였다.

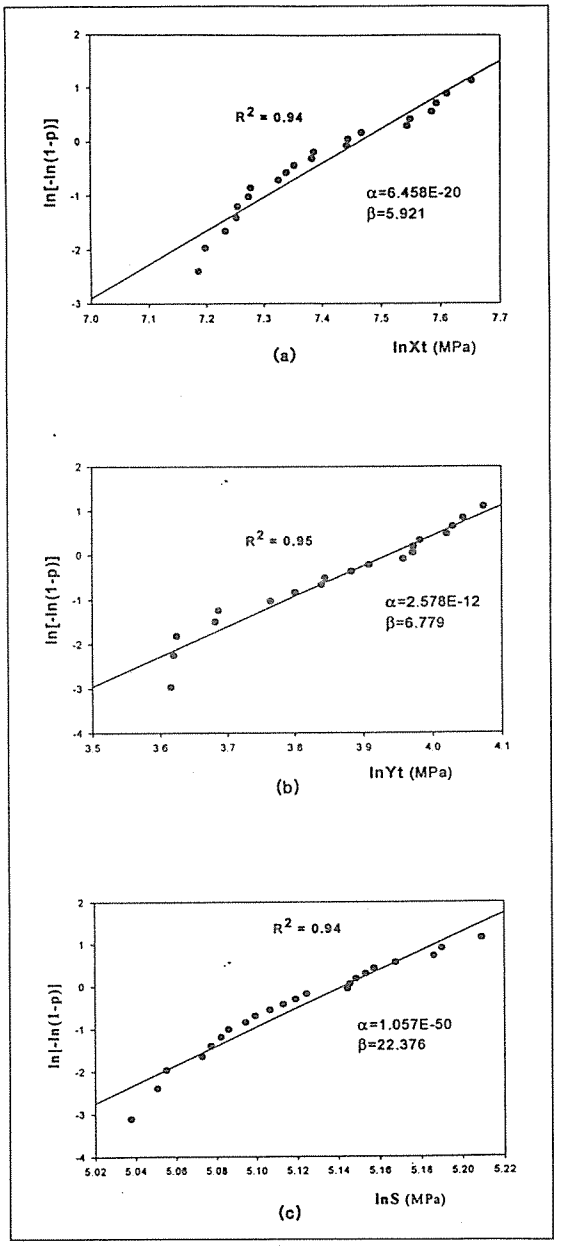

Fig. 4. Determination of Weibull Parameters by Curve Fitting
(a) Longitudinal Tensile Strength, Xt
(b) Transverse Tensile Strength, Yt
(c) Shear Strength, S

4. 결과 및 고찰

4.1. 탄성계수 측정

실험을 통해 측정한 플라이의 기본적인 물질상수는 Table 1과 같다.

4.2. 강도 측정 결과

Weibull 분포에서 2개의 파라미터 α, β를 결정하기 위해 실험을 통해 강도를 구하였다. 측정한 강도와 이를 이용해 구한 각 강도의 Weibull 파라미터는 Fig. 4(a)−(c)에 나타내었다.

세 가지 적층판에 대해 인장실험을 하였다. 최종 파단은 섬유방향의 플라이가 끊어지는 부분에서 발생한다. 결과에서 알 수 있듯이 적층판에 섬유방향의 플라이 개수가 많을수록, 적층각이 하중방향에 가까워질수록 적층판의 강도가 증가함을 볼 수 있다. 세 가지 적층판의 강도 측정 결과를 Fig. 5에 나타내었다.

4.3. 강도 예측

강도예측 프로그램을 이용하여 3가지 적층판에 대한 해석을 수행하였다. Weibull 확률분포를 이용하여 강도를 해석한 결과와 확률분포를 이용하지 않았을 때의 결과(Normal)를 실험치와 비교하였다. 이때 확률분포를 이용한 경우는 발생시킨 난수의 30%, 50%, 70%, 90%의 기준을 설정하여 파손식이 이들 값 이상을 만족시킬 때 파손이 일어났다고 판정하였다. 네 가지 각각에 대해서 해석을 수행하였다.

플라이 강도를 상수로 가정한 경우 적층판을 구성하는 각각의 플라이의 경우 같은 적층각을 가진 플라이는 동일한 힘을 받게 되어 같은 하중에서 파손이 동시에 일어나게 된다. 하지만 실제 복합재료는 같은 층이 동시에 파손이 일어나지 않는 경우가 일반적이다. 확률분포를 이용한 경우 각 층에서 발생시키는 난수가 서로 다르므로 동일한 층이라 하더라도 파손이 일어나는 시점이 달라질 수 있게 되어 복합재료의 파손을 해석하는데 있어서 실제의 경우에 보다 가깝게 설명할 수 있다는 장점이 있다.

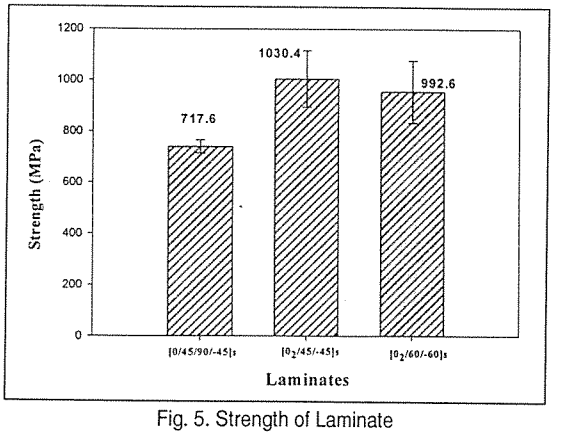

Fig. 5. Strength of Laminate

네 가지 파손기준 확률 30%, 50%, 70%, 90%로 해석을 수행한 결과 확률을 높일수록 얻어지는 최종강도는 높아지는 경향을 나타내고 있다. 즉, 확률을 조절하여 실험치와 이론치와의 차이를 줄일 수가 있었다.

4.3.1. [0/45/90/−45]s Laminate Composite

90°플라이에서 파손이 일어난 후 변형률을 증가시킴에 따라 점차적으로 45°, 0°플라이에서 파손이 일어나게 된다. 확률분포를 이용하지 않은 경우 동일한 적

Table 2. 실험치와 해석치의 비교, $[0/45/90/-45]_S$ Laminate Composite

	최종강도(MPa)	*오차(%)
실험치	717.61	–
Normal	593.47	17.3
30% Probability	538.64	24.9
50% Probability	579.55	19.2
70% Probability	640.91	10.7
90% Probability	661.37	7.8

$$*\text{오차}(\%) = \left| \frac{\text{실험치} - \text{해석치}}{\text{실험치}} \right| \times 100$$

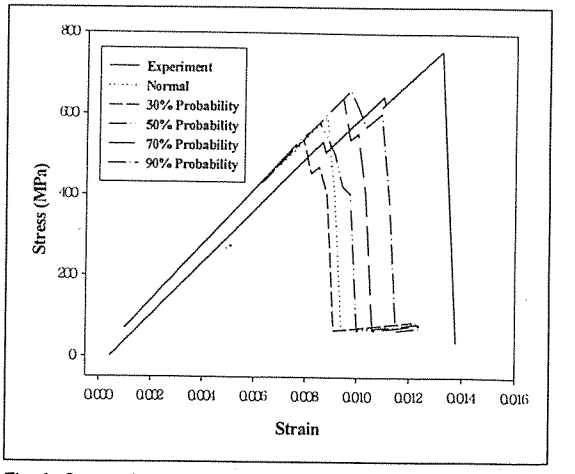

Fig. 6. Comparison of Experimental and Predicted Results for $[0/45/90/-45]_S$ Laminate Composite

Table 3. 실험치와 해석치의 비교, $[0_2/45/-45]_S$ Laminate Composite

	최종강도(MPa)	오차(%)
실험치	1030.38	–
Normal	963.03	6.53
30% Probability	864.54	16.1
50% Probability	930.20	9.7
70% Probability	995.86	3.4
90% Probability	1081.40	4.9

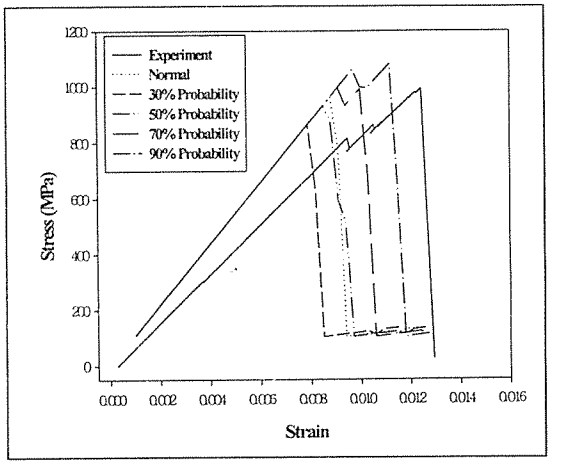

Fig. 7. Comparison of Experimental and Predicted Results for $[0_2/45/-45]_S$ Laminate Composite

Table 4. 실험치와 해석치의 비교, $[0_2/60/-60]_S$ Laminate Composite

	최종강도(MPa)	오차(%)
실험치	992.58	–
Normal	770.39	22.4
30% Probability	727.85	26.7
50% Probability	807.73	18.6
70% Probability	887.62	10.6
90% Probability	967.51	2.5

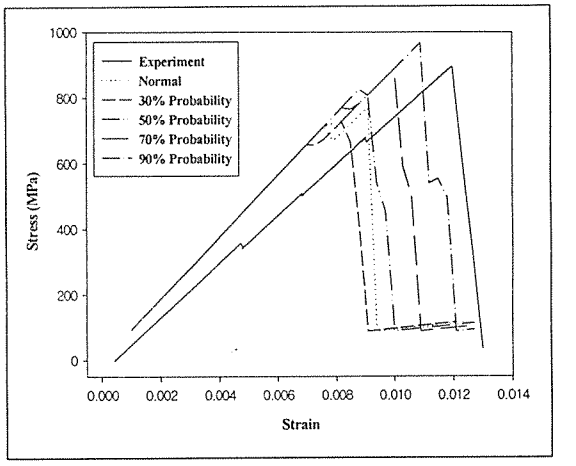

Fig. 8. Comparison of Experimental and Predicted Results for $[0_2/60/-60]_S$ Laminate Composite

층각을 가진 플라이는 같은 변형률 단계에서 동시에 파손이 일어나지만 확률분포를 이용한 경우에는 같은 플라이라 하더라도 동시에 파손이 발생하지 않으므로 그래프가 좀더 복잡한 양상을 가지게 된다. 파손기준 확률을 높일수록 실험치와의 오차는 줄어들며 확률을 이용하지 않은 경우는 50% 확률로 해석했을 때와 비슷하였다. 이때의 결과를 Table 2와 Fig. 6에 나타내었다.

4.3.2. $[0_2/45/-45]_S$ Laminate Composite

45°플라이에서 파손이 일어난 후 더 큰 변형률에서 0°플라이에서 파손이 일어났다. 이 역시 4층의 동일한 45° 또는 0°플라이는 동시에 파손되기보다는 서로 다른 단계에서 파손되는 경우가 일반적이었다. 이 적층판의 경우는 해석치와 실험치가 잘 일치하고 있으며 확률을 높일수록 오차가 줄어들었다. 이때의 결과를 Table 3과 Fig. 7에 나타내었다.

4.3.3. $[0_2/60/-60]_S$ Laminate Composite

60°플라이에서 파손이 일어난 후 더 큰 변형률에서 0°플라이에서 파손이 일어났다. 동일한 4층의 60°플라이와 0°플라이는 동시에 파손되기보다는 서로 다른 변형률 단계에서 파손되는 경우가 일반적이었다. 파손기준 확률을 높일수록 실험치와의 오차가 줄어들었으며 90% 확률로 해석했을 때 실험치와의 오차가 가장 적었다. 이때의 결과를 Table 4와 Fig. 8에 나타내었다.

5. Conclusion

Weibull 분포를 이용하여 적층복합재료의 강도를 확률분포함수를 이용하여 예측하였고 실험치와 비교하였다. 또 Weibull 분포를 이용하지 않았을 경우와도 비교하였다. 결과적으로 두 경우 모두 실험치와 약간의 오차를 보였지만 파손의 경향성에 있어서는 확률분포를 이용한 강도해석이 실제와 비슷한 결과를 보였다.

플라이 강도를 상수로 가정했을 경우는 동일한 적층각을 가진 플라이는 동시에 파손이 일어나지만 확률분포를 이용한 경우는 같은 플라이라고 하더라도 서로 다른 시점에서 파손이 일어날 수 있다는 사실을 알 수 있었다. 실제로 복합재료의 경우에도 동시에 파손이 일어나기보다는 순차적으로 일어날 확률이 높으므로 확률분포를 이용하면 복합재료 파손현상을 해석하는데 좀 더 실제적인 접근방법이 될 수 있다. 또한 파손확률 기준을 높일수록 최종강도가 실험치에 가까워짐을 알 수 있었다. 즉 파손확률 기준을 조절함으로써 정확한 최종강도를 예측할 수 있다.

이와 같이 강도가 확률분포를 따른다는 사실을 고려하는 해석방법을 이용하면 사용하는 재료에 가장 잘 부합하는 파손확률을 결정하여 이를 바탕으로 해석을 수행하여 복합재료의 구조물 설계에 보다 유용한 정보를 줄 수 있음을 보여주었다.

후 기

본 연구는 1998년도 교육부 신소재 분야 연구비 지원에 의해 이루어졌으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. 이대길, 복합재료 역학 및 가공론, 성안당, 1996

2. J.R.Vinson and R. L. Sierakowski, The Behavior of Structures Composed of Composite Materials, Martinus Nijhoff Publishers, 1987

3. P. K. Mallick, Fiber-Reinforced Composites, Materials, Manufacturing and Design, Marcel Dekker, Inc. 1988

4. R. M. Jones, Mechanics of Composite Materials, McGraw-Hill Book Company, Chapter 2.4, 1975

5. N. J. Pagano, Interlaminar Response of Composite Materials, Elsevier, 1989

6. M. Uemura and H. Fukunaga, Probabilistic Burst Strength of Filament-Wound Cylinders Under Internal Pressure, J. of Composite Materials, vol 15, 1981, pp. 462-480

7. P. H. Pepit and M. E. Waddoups, A Method of Predicting the Nonlinear Behavior of Laminated Composites, J. of Composite Materials, Vol 3. 1969, p.2

8. Bhagwan D. Agarwal and Lawrence J. Broutman, Analysis and Performance of Fiber Composites, 2nd Ed., Chapter 5.6, John Wiley & Sons, 1990

9. P. K. Mallick, Fiber-Reinforced Composites : Materials, Manufacturings, and Design, Marcell Dekker, INC. , 1988, pp. 179-184

10. Chang, F.K. and Chang, K.Y. Post-Failure Analysis of Bolted Composite Joints in Tension or Shear-Out Failure, J. of Composite Materials, Vol. 21, October 1987, pp. 809-833

11. Hill. R, A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals, Proc, Royal Soc, London, 1948, pp.281-297