

論文

내부에 사각판이 결합된 복합재료 원통셸의 자유진동

이영신* · 최명환**

Free Vibration of Composite Cylindrical Shells with a Longitudinal, Interior Rectangular Plate

Lee, Young-Shin* and Choi, Myoung-Hwan**

ABSTRACT

This paper describes the method to analyze the free vibration of simply supported composite cylindrical shells with a longitudinal, interior rectangular plate. To obtain the free vibration characteristics before the combination of two structures, the energy principle based on the classical plate theory and Love's thin shell theory is adopted. The frequency equation of the combined system is formulated using the receptance method. When the line load and moment applied along the joint are assumed as the Dirac delta and sinusoidal function, the continuity conditions at the joint of the plate and shell are proven to be satisfied. The effects on the combined shell frequencies of the length-to-radius ratios and radius-to-thickness ratios of the shell, fiber orientation angles and orthotropic modulus ratios of the composite are also examined.

초 록

본 논문은 단순지지된 복합재료 사각판과 원통셸이 결합된 구조물의 자유진동해석을 위한 해석적 방법에 대하여 기술하였다. 결합전 단순지지된 사각판과 원통셸의 응답을 얻기 위하여 고전적 판이론과 Love의 얇은 셸이론에 기초한 에너지법을 적용하였다. 결합구조물의 해석에는 동적응답법을 적용하였고, 길이방향 판과 셸의 결합부에서의 동적 주기 하중과 모멘트는 Dirac 델타 함수와 정현 함수를 사용하였을 때 연속조건을 만족함을 보였다. 또한 원통셸의 기하학적 매개변수인 셸의 길이 대 반경비와 반경 대 두께비에 따른 진동특성의 변화를 고찰하였고, 복합재료의 섬유 방향각과 직교이방성 매개변수가 결합 원통셸의 기본 진동수에 미치는 영향에 대하여 연구하였다.

1. 서 론

최근들어 항공이나 기계구조물 등의 산업현장에서 복합재료의 채용이 많아지면서, 복합재료와 이들 재료로 제작된 구조물에 대한 연구가 활발히 수행되고 있

다. 구조물의 기초적인 형태인 판(plate)과 셸(shell)에 대한 진동이나 좌굴특성은 정적 혹은 동적 하중하에서의 거동 및 안정성 평가에 중요한 요인이 되기 때문에 많은 연구자들의 관심이 되어 왔다. 일반적으로 구조물의 설계시 진동해석을 통하여 고유진동수나 모드형상

* 충남대학교 기계설계공학과

** 충남대학교 기계설계공학과, Post-Doc

등을 얻고, 이들 결과를 설계에 반영하여 공진으로 인한 손상을 최소화하도록 하며, 보강 등을 통하여 강성을 증가시킴으로서 공진을 피하기도 한다. 이러한 설계에 있어서 구조물이 복잡해지면 단순한 형태의 판이나 쉘에 대한 해석 방법 및 특성들이 달라지게 된다. 특히 여러 복잡한 구조물 중에 원통셸의 내부에 사각형의 바닥판 구조를 갖는 잠수함이나 항공기의 동체 부분은 판과 쉘이 결합된 구조물의 한 형태로 볼 수 있다. 두 구조물이 결합되면 이들의 진동특성은 단순 구조물의 특성과는 달라지며, 새로운 결합 구조물에 대한 해석 방법 및 결과가 필요하다. 또한 최근 개인용 컴퓨터와 해석 프로그램의 발달로 인하여 복잡한 대형 구조물에 대한 해석이 보다 손쉬워졌지만, 이들 구조물의 유한요소해석을 위해서는 모델을 형성하는데 많은 시간과 노력을 기울여야 하는 단점이 있다. 따라서 구조물의 기하학적 형상이나 복합재료의 여러 매개변수 변화에 따른 진동특성을 계산할 수 있는 해석방법을 개발한다면 공학적 기초데이터의 생성이 손쉬워질 수 있다.

결합 구조물의 진동특성을 구하기 위한 해석적 방법의 개발은 복잡한 문제이며, 이 해석적 방법의 개발은 큰 관심이 되어 왔다. 결합된 구조물의 해석방법 중 하나로서 Bishop과 Johnson[1]은 집중질량을 갖는 보(beam)의 진동해석을 위하여 동적응답법(receptance method)을 처음으로 적용하였다. 동적응답법을 이용한 연구로서 Azimi등[2]은 연속 사각판의 자유진동 해석에서 판과 판의 경계에서 적당한 강성을 적용하여 경계조건을 구현하였다. Huang과 Soedel[3]은 양단이 단단지지되고 축방향 임의의 위치에 한 개 혹은 다수의 원판이 결합된 원통셸의 자유진동 및 강제진동 해석을 수행하였으며, 임정식[4]은 외팔형의 원통셸에 축방향 임의의 위치에 원판이 결합된 경우의 고유진동 해석을 수행하였다. 그는 동적응답법을 적용하여 전개한 수식화를 통한 수치해와 실험 그리고 유한요소해석을 수행하였고, 이들 결과를 비교함으로써 이론해의 타당성을 검증하였다.

다양한 모델의 결합구조물에 대한 다른 해석적 방법으로서 Yamada등[5]은 구형(spherical)셸과 원환(annular)판의 결합구조물에 대한 고유진동해석에 전달행렬법(transfer matrix method)을 이용하여 진동수 방정식을 얻었고, Irie등[6]은 절단된 원추(conical)셸과 원통셸이 결합된 구조물의 고유진동해석을 위하여 Flügge의 이론을 행렬 미분방정식으로 나타내었다. Tavakoli[7]는 상태공간(state space)법에 기초한 부

분구조합성법(substructural synthesis method)을 이용하여 얇은 쉘 구조물인 밀봉 캔의 고유해를 구하였고, Cheng[8]은 내부에 원판이 결합된 쉘에 대하여 수식화하기 위하여 변분원리를 이용하였다.

원통셸의 내부에 사각판 구조물이 결합된 원통셸의 진동에 대한 연구는 Peterson[9]에 의하여 처음으로 수행되었는데, 그는 확장된 Rayleigh-Ritz법을 이용하였으며, 단순지지된 판과 쉘의 각각에 대한 변위함수를 가정하고, 결합부에서 이들 사이의 적합성을 보완하기 위하여 구성방정식을 사용하였다. 그 후 전달행렬법[10], 동적강성기법(dynamic stiffness technique)[11], 변분원리[12] 등을 이용한 사각판 결합된 원통셸의 진동연구가 수행되었는데, 이들은 등방성 재료에 대한 결과만을 제시하였으며, 동적응답법을 적용한 예는 없었다. 이것은 동적응답법의 적용에 있어서 판과 원통셸의 결합부에서 적합조건을 세우는데 이용할 만한 하중조건을 찾는 데 어려움이 있었기 때문이다. 그러나 이영신 등[13]은 사각판 결합된 강 및 평직 복합재료 원통셸의 진동해석을 위하여 동적응답법을 적용하였고, 해석적 방법에 의한 이론해석 결과와 실험 및 유한요소해석 결과의 비교를 통하여 이론해의 타당성을 검증하였다.

본 연구에서는 단순지지된 복합재료 사각판과 원통셸의 결합전 응답을 얻기 위한 수식화 과정에 대하여 언급하였고, 고전적 판이론과 Love의 얇은 쉘이론을 적용한 에너지법을 이용하였다. 결합구조물의 자유진동 해석을 위하여 결합부에서의 연속조건을 만족하는 주기하중과 모멘트를 이용하여 진동수방정식을 유도하고, 수치계산을 통한 해를 제시하였다. 또한 원통셸의 기하학적 매개변수인 쉘의 길이 대 반경비와 반경 대 두께비에 따른 진동특성의 변화를 고찰하였고, 복합재료의 섬유 방향각과 직교이방성 매개변수가 결합 원통셸의 기본진동수에 미치는 영향에 대하여 연구함으로써 복합재료 원통셸 구조물의 설계에 유용한 공학적 기초데이터를 제공하였다.

2. 수식화

Fig. 1은 내부에 길이방향으로 사각판이 결합된 복합재료 원통셸의 기하학적 형상을 나타낸 것으로서, a , L_s 와 h_s 는 각각 쉘의 반경, 길이 및 두께를 나타내며, b 와 h_p 는 판의 폭 및 두께를 나타낸다. 또한 각 방향에

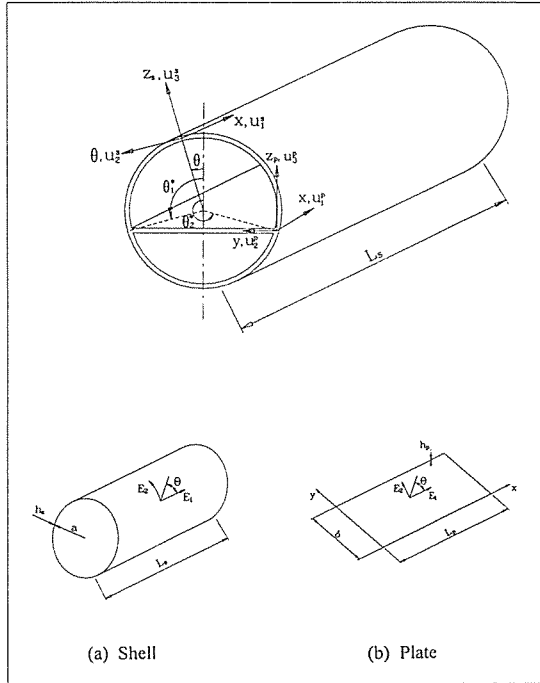


Fig. 1. Geometry of a circular cylindrical shell with an interior plate

대한 원통셀의 변위성분은 u_1^s, u_2^s, u_3^s , 판에 대해서는 u_1^p, u_2^p, u_3^p 로 나타내었다. 원통셀 내부 판의 부착은 셀의 중앙 수직축을 기준으로 하여 원주방향 반시계 방향으로 θ_1^* 와 θ_2^* 에 위치하고, 판과 셀의 길이방향(x)을 복합재료의 주방향 탄성계수(E_1), 판의 폭방향과 셀의 원주방향을 횡방향 탄성계수(E_2)로 정의하였다.

2.1 사각판의 자유진동

사각판이 원통셀의 내부에 길이방향으로 결합되어 있을 때 결합구조물의 진동해석을 위해서는 사각판만의 고유진동수 및 모드 성분을 먼저 구하여 결합한 후의 동적응답에 사용하여야 한다. 따라서 결합부위가 단 순지지된 경계조건을 갖는 사각판의 고유진동수를 먼저 구하였다.

일반적으로 적층 복합재료의 구성방정식(constitutive equation)은 다음과 같다[14].

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ \dots \\ M_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ \dots & \dots \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_i \\ \dots \\ \chi_i \end{Bmatrix} \quad (1)$$

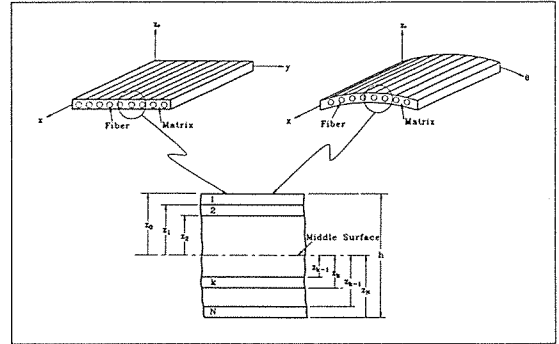


Fig. 2. Geometry of the n-layered laminate

여기서 ϵ_i 와 χ_i 는 각각 구조물 중앙면에서의 변형률(strain)과 곡률(curvature)이다. 그리고 A_{ij} , B_{ij} 와 D_{ij} 는 복합재료 적층재에 대한 신장강성계수(extensional stiffness), 연성강성계수(coupling stiffness) 그리고 굽힘강성계수(bending stiffness)이며, 이들은 각각 다음과 같이 정의된다.

$$[A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}] = \sum_{k=1}^N \int_{-h_k}^{h_k} (\bar{Q}_{ij})_k (1, z, z^2) dz \quad (2)$$

여기서 $(\bar{Q}_{ij})_k$ 는 변환축소강성계수(transformed reduced stiffness)로서, 적층재의 각 층에 대한 적층 각, 물성 등으로 표현되며, Fig. 2는 n 적층된 복합재료 판이나 셀에서의 두께 방향에 대한 기하학적 형상을 나타내었다.

특수 직교이방성 복합재료 판에 대한 변형에너지(strain energy)는

$$U_p = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^{L_p} [D_{11} w_{,xx}^2 + 2D_{12} w_{,xx} w_{,yy} + D_{22} w_{,yy}^2 + 4D_{66} w_{,xy}^2] dx dy \quad (3)$$

와 같이 표현되고[15], 운동에너지(kinetic energy)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$T_p = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^{L_p} \rho_{pt} w^2, dx dy \quad (4)$$

여기서 w 는 판의 수직방향 변위함수, u_3^p 를 달리 표현한 것이고, (,)는 공간에 대한 미분을 나타낸다. 또한 $\rho_{pt} = [\sum_{k=1}^N \rho_{pk} h_{pk}]$ 으로서, ρ_{pk} 와 h_{pk} 는 복합재료 판에

대한 k 번째 층의 밀도와 두께이다.

사각판에 대한 횡진동의 운동방정식의 해는 다음과 같이 가정한다.

$$w(x,y,t) = W(x,y) e^{i\omega_{mn}t} \quad (5)$$

$$= \sum_{m=1}^{m^*} \sum_{n=1}^{n^*} A_{mn} X_m(x) Y_n(y) e^{i\omega_{mn}t}$$

여기서 ω_{mn} 은 판의 각진동수(angular frequency)이고, $X_m(x)$, $Y_n(y)$ 는 경계조건을 만족하는 x 방향과 y 방향의 빔함수(beam function)이다[16]. 식(5)를 식(3)~(4)에 대입하여 각 에너지항을 얻고, 총 에너지식에 대하여 Rayleigh-Ritz법을 적용하면

$$\frac{\partial}{\partial A_{mn}} (T_p - U_p) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} m = 1, 2, \dots, m^* \\ n = 1, 2, \dots, n^* \end{array} \right\} \quad (6)$$

이고, 다음과 같이 행렬형태로 표현된 진동수방정식을 얻는다.

$$\sum_{m=1}^{m^*} \sum_{n=1}^{n^*} [K_{mn}^{ij} - \omega_{mn}^2 M_{mn}^{ij}] A_{mn} = 0 \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m^* \\ j = 1, 2, \dots, n^* \end{array} \right\}$$

여기서

$$M_{mn}^{ij} = \rho_p I_1(m,i) J_1(n,j) \quad (8)$$

$$K_{mn}^{ij} = D_{11} I_3(m,i) J_1(n,j) + D_{12} [I_4(m,i) J_4(n,j) + I_4(i,m) J_4(j,n)] + D_{22} I_1(m,i) J_3(n,j) + 4D_{66} I_2(m,i) J_2(n,j) \quad (9)$$

여기서 I_i , J_i ($i = 1, 2, 3, 4$)는 빔함수의 적분항으로서 다음과 같다.

$$I_1(m,n) = \int_0^L X_m X_n dx$$

$$I_2(m,n) = \int_0^L X_{m,x} X_{n,x} dx \quad (10a)$$

$$I_3(m,n) = \int_0^L X_{m,xx} X_{n,xx} dx$$

$$I_4(m,n) = \int_0^L X_m X_{n,xx} dx$$

$$J_1(m,n) = \int_0^b Y_m Y_n dy$$

$$J_2(m,n) = \int_0^b Y_{m,y} Y_{n,y} dy \quad (10b)$$

$$J_3(m,n) = \int_0^b Y_{m,yy} Y_{n,yy} dy$$

$$J_4(m,n) = \int_0^b Y_m Y_{n,yy} dy$$

네변 모두 단순지지된 경우 경계조건을 만족하는 변위함수는 다음과 같다.

$$X_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{L_p} \quad (11a)$$

$$Y_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (11b)$$

식(11)를 식(10)에 대입하여 적분을 행하고, 질량과 강성행렬을 결정하면, 식(7)의 진동수방정식으로부터 다음의 진동수를 얻는다.

$$\omega_{mn} = \frac{\pi^2}{L_p^2 \sqrt{\rho_p}} \sqrt{D_{11}m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2R^2 + D_{22}n^4R^4} \quad (12)$$

여기서 R 은 사각판의 길이(L_p) 대 폭(b)의 비인 종횡비(aspect ratio)이며, 사각판의 횡방향 모드형상은 (11)식으로부터 x , y 방향 반파수로 표현된다.

$$W_{mn}(x,y) = \sin(m\pi x/L_p) \sin(n\pi y/b), \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

2.2 원통형의 자유진동

동적응답법의 수식화에서 동적하중에 의한 원통형의 변위성분은 결합 원통형과 결합전 원통형의 고유진동수 및 고유 모드성분으로 표현되기 때문에 판이 결합되기 이전의 원통형에 대한 고유진동수를 구해야 한다. 본 연구에서 양단 단순지지된 원통형에 대한 고유진동수는 에너지원리에 기초한 Rayleigh-Ritz법을 이용하여 계산하였다.

일반적으로 적층재의 구성방정식에서 기준좌표계의 x 축을 0° 섬유방향과 일치하도록 선택하는 경우, $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ 가 되며, 대칭으로 적층된 경우 $B_{ij} = 0$ 가 된다. 본 연구에서 고려된 복합재료는 모두 대칭 적층된 경우를 고려하였기 때문에 연성강성계수 $B_{ij} = 0$ 이고, 복합재료 원통형에 대한 변형에너지는 강성계수 A_{ij} , D_{ij} 를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^{L_s} \int_0^{2\pi} [A_{11} \varepsilon_x^2 + 2A_{12} \varepsilon_x \varepsilon_\theta + A_{22} \varepsilon_\theta^2 + A_{66} \varepsilon_{x\theta}^2 + D_{11} x_s^2 + 2D_{12} x_s x_\theta + D_{22} x_\theta^2 + D_{66} x_{s\theta}^2] a d\theta dx \quad (14)$$

또한 원통셸의 운동에너지는 회전관성 모멘트 항을 무시하여, 다음식으로 표현할 수 있다.

$$T_s = \frac{1}{2} \int_0^{L_s} \int_0^{2\pi} \rho_s [(\dot{u}_1^s)^2 + (\dot{u}_2^s)^2 + (\dot{u}_3^s)^2] a d\theta dx \quad (15)$$

여기서 ρ_{sk} 와 h_{sk} 는 원통셸의 k 번째 층에서의 밀도와 두께이며, (\cdot) 는 시간에 대한 미분을 나타낸다.

셸의 양단 단순지지 경계조건을 만족하는 변위함수의 가정은 축방향 모드에 대하여 빔모드 함수를 사용하였으며, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_1^s(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^m \sum_{n=1}^n U_{1mn} \bar{X}_m(x) \cos n\theta e^{i\omega_{mnt}} \quad (16a)$$

$$u_2^s(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^m \sum_{n=1}^n U_{2mn} X_m(x) \sin n\theta e^{i\omega_{mnt}} \quad (16b)$$

$$u_3^s(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^m \sum_{n=1}^n U_{3mn} X_m(x) \cos n\theta e^{i\omega_{mnt}} \quad (16c)$$

여기서 $\bar{X}_m(x) = \frac{\partial X_m}{\partial x}$ 로서 축방향 빔함수의 미분을 나타내고, U_{1mn} , U_{2mn} , U_{3mn} 는 x , θ , z 방향의 진폭계수이며, m , n 은 길이방향과 원주방향의 반파수이다. $X_m(x)$ 는 셸 양단에서의 경계조건을 만족하는 축 모달함수로서 단순지지된 원통셸의 경우 판에서와 마찬가지로 식(11a)에서 L_p 를 L_s 로 대체하여 사용할 수 있다.

경계조건을 만족하는 변위식 (16)을 에너지식 (14)와 (15)에 대입하고 원통셸의 길이와 원주방향에 대하여 적분을 수행한 후 변형에너지와 운동에너지의 합으로 표현된 총 에너지 식에 Rayleigh-Ritz 과정을 적용하면, 복합재료 원통셸에 대한 진동수방정식은 다음과 같이 강성행렬과 질량행렬로 표현된다.

$$|k_{ij} - \omega_{mn}^2 m_{ij}| = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (17)$$

여기서 ω_{mn} 은 원통셸의 각진동수를 나타내고, 이들 원통셸의 진동수를 식(16)에 대입하여 U_{3mn} 으로 표현된 상대 진폭비를 구하고, 이를 이용하면 각 방향별 진동 모드성분을 나타낼 수 있다.

$$U_{1mn}^s(x, \theta) = (U_{1mn}/U_{3mn}) \cos(m\pi x/L_s) \cos(n\theta) \quad (18a)$$

$$U_{2mn}^s(x, \theta) = (U_{2mn}/U_{3mn}) \sin(m\pi x/L_s) \sin(n\theta) \quad (18b)$$

$$U_{3mn}^s(x, \theta) = \sin(m\pi x/L_s) \cos(n\theta) \quad (18c)$$

2.3 결합구조물의 고유진동해석

진동에 의한 구조물의 동적응답은 동적 주기 입력(하중 혹은 모멘트)에 대한 응답(변위 혹은 기울기)의 비로서 정의된다[17]. 두 구조물 A와 B가 결합되어 있을 때 진동에 의해서 발생하는 결합부에서의 변위 또는 기울기는 서로 같아야 하는 연속조건에 의해서 진동수 방정식을 유도할 수 있다.

일반적으로 두 독립계 A와 B가 결합되어 있을 때, 하중과 변위의 관계식으로부터

$$[\alpha_{ij} + \beta_{ij}] \{F_{Aj}\} = 0 \quad (19)$$

를 얻는다. 여기서 α_{ij} 와 β_{ij} 는 각각 결합전 독립계 A와 B의 응답으로서 원통셸과 사각판의 동적응답이고, 결합구조물의 고유진동수는 다음의 조건으로부터 구할 수 있다.

$$|\alpha_{ij} + \beta_{ij}| = 0 \quad (20)$$

또한 한 구조물의 변위는 모드기여계수와 모달변위를 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) U_{ik}(\alpha_1, \alpha_2), i=1,2,3 \quad (21)$$

여기서 U_{ik} 는 세 주방향의 고유모드 성분이고, 모드기여계수 η_k 는 다음과 같은 모드기여계수 방정식의 근이다.

$$\ddot{\eta}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = F_k^* e^{j\omega t} \quad (22)$$

여기서

$$F_k^* = \frac{1}{\rho h N_k} \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} f_i^* U_{ik} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (23)$$

$$N_k = \int_{\alpha_1} \int_{\alpha_2} U_{ik}^2 A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (24)$$

여기서 $f_i^*(i = 1, 2, 3)$ 는 결합부에 작용하는 주기력

이다. 따라서 무한대의 모드중에 k 번째까지의 모드를 취하여 모드함으로 변위를 나타낼 수 있고, 식(22)의 정상상태 해는 구조물의 감쇠가 없다고 가정하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^*}{(\omega_k^2 - \omega^2)} U_{ik}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\omega t} \quad (25)$$

여기서 ω_k 는 결합전 두 독립구조물의 고유진동수이고, ω 는 결합된 구조물의 고유진동수를 나타낸다.

원통셸과 사각판의 결합부위에서 변위의 연성은 단지 사각판의 폭방향 기울기 변화 및 횡방향 변위를 고려할 수 있고, 원통셸에 대하여 횡방향 변위 및 원주방향 기울기만을 고려할 수 있다. 이들 동적 선하중 및 모멘트 하중을 받는 사각판과 원통셸의 변위 및 기울기 응답을 구하는 수식화 과정은 이영신[13]등에 의하여 언급되었고, 여기서는 결합구조물의 진동수방정식만을 간략히 나타낸다.

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} + \beta_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} + \beta_{24} \\ \alpha_{31} + \beta_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} + \beta_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} + \beta_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} + \beta_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

여기서 α_{ij} 와 β_{ij} 는 각각 원통셸과 사각판의 동적응답을 나타내는 항들로 부록 A에 제시하였다. 이 진동수방정식은 원통셸의 내부에 사각판이 결합되어 있는 복합재료 결합구조물의 진동특성을 나타내는 식이다. 식(26)의 수치계산을 위하여 FORTRAN 언어를 사용한 프로그램을 작성하였고, 수치계산은 단순지지 사각판에 대하여 길이와 폭방향 각각 7항, 원통셸에 대하여 길이와 원주방향으로 각각 10항을 사용하여 수행하였다.

Table 1. Dimension of combined composite shells(unit : mm)

Material		GFRP
Dimension		
Shell	Length(L_s)	360.0
	Radius (a)	109.0
	Thickness(h_s)	3.5
Plate	Length(L_p)	360.0
	Width (b)	218
	Thickness(h_p)	3.5

3. 수치결과 및 고찰

원통셸의 내부에 사각판이 결합된 강 및 평직 복합재료 원통셸에 대한 연구는 이영신등[13]에 의하여 수행된바 있으며, 실험을 통하여 이론해의 타당성을 검증하였다. 본 논문에서는 이론해의 검증을 위하여 제작한 평직 복합재료 시험편에 대한 진동실험과 유한요소 해석에 대하여 언급하고, 셸의 기하학적 매개변수 및 적층 복합재료의 적층각과 이방성 특성이 결합셸의 진동에 미치는 영향에 대하여 고찰하였다.

진동실험을 위한 시험편은 $[0^\circ_3 / \pm 45^\circ_3 / 90^\circ_3]$, 적층된 평직(plain weave) 유리섬유강화 복합재료(GFRP)를 이용하여 원통셸의 중앙($\theta_1^* = 90^\circ$)에 사각판이 결합될 수 있도록 두 개의 물드에 적층한 후 오토클래브 내에서 $125 \pm 3^\circ\text{C}$ 의 온도로 120분간 성형하였다. Table 1에는 기하학적 형상 데이터를 나타내었고, 시험편에 대한 진동실험은 주파수분석기(FFT), 충격해머와 가속도계를 이용한 충격가진법을 이용하였다. 유한요소해석은 상용 전산프로그램인 ANSYS[18]를 이용하였다. 결합셸이 반경에 비해 비교적 얇고 복합재료이기 때문에 유한요소 모델링에는 적층셸요소(SHELL99)를 사용하여 1736개의 절점과 650개의 요소로 모델하였으며, 모달해석은 부공간법(subspace method)을 이용하였다. 또한 해석에 사용한 평직 복합재료의 물성은 인장시험을 통하여 결정하였고, 수치계산을 위하여 인용한 복합재료의 물성들과 함께 Table 2에 나타내었다.

3.1 결합전 구조물의 진동특성

사각판과 원통셸이 결합된 구조물의 진동수방정식은 이들이 결합되기 이전의 단순지지된 판과 셸의 고유진동수를 포함하고 있으며, 결합전의 진동특성은 동적응답의 수치해석에 사용되고, 결합 구조물의 진동수 변화

Table 2. Elastic properties of various composite materials

Properties	Unit	GFRP (Plain weave)	KFRP[20]	GFRP[21]	CFRP[21]
E_1	GPa	26.2	76.0	34.64	106.2
E_2	GPa	26.2	5.5	7.18	6.86
G_{12}	GPa	4.9	2.3	3.82	3.57
ρ	kg/m ³	1880.0	1460.0	1780.0	1480.0
ν_{12}	—	0.12	0.34	0.26	0.33
E_1/E_2	—	1.0	13.82	4.82	15.48

Table 3. Natural frequencies of the GFRP plain weave composite rectangular plate with simply supported end conditions

n*	Axial half wave number (m)						
	1	2	3	4	5	6	7
1	162.3	288.8	504.5	808.5	1200.2	1679.3	2245.8
2	528.2	649.3	857.6	1155.2	1542.1	2017.9	2581.9
3	1139.0	1258.1	1461.0	1751.1	2130.4	2599.1	3157.3
4	1994.5	2112.6	2312.6	2597.3	2969.4	3430.3	3980.7
5	3094.4	3212.1	3410.3	3691.6	4058.3	4512.4	5055.1
6	4438.7	4556.2	4753.4	5032.4	5395.3	5844.0	6380.1
7	6027.5	6144.8	6341.4	6618.9	6979.0	7423.6	7954.3

* : Half wave number in the y direction

에 대한 비교 자료가 될 수 있다. Table 3과 4는 각각 단순지지된 사각판과 원통셸의 결합되기 이전의 고유진동수 및 방향별 모드수를 나타내었다. 사각판의 기본진동수는 162.3 Hz이고, 판은 처음 3차까지 길이방향 모드를 보였으며, 4번째 진동수에서 폭방향의 2차 모드(1,2)가 나타났다. 이것은 사각판의 길이와 반경의 비인 중횡비(L_r/b)가 약 1.65로서 폭에 비해 길이가 길기 때문이다. 원통셸은 길이방향과 원주방향의 반파수 (1,3) 모드에서 583.1 Hz의 기본진동수를 보였고, 1 kHz의 범위내에 길이방향 1차 모드인 3개의 진동수가 존재하였다. 또한 결합전 두 구조물의 기본진동수는 원통셸의 진동수가 사각판에 비하여 420.8Hz 높은 값을 보이는데, 기하학적 형상차이로 인하여 셸의 강성이 크기 때문이다.

Table 5는 판과 셸이 결합되었을 때의 양단 단순지지된 원통셸의 해석결과를 처음 7차까지의 진동수를 오름차순으로 나타내었다. 동적응답법을 이용한 이론해석 결과는 실험결과와 5%이내의 오차범위에서 잘 일치하였고, 결합구조물의 기본진동수는 234.5Hz로서 사각판 만의 기본진동수보다 약 30% 증가한 결과를 보였으며, 내부 결합판의 1차 굽힘모드를 보였다. 처음 7차까지의 기본진동수를 볼 때 사각판과 원통셸이 결합된 후의 고유진동수와 진동모드는 결합전 구조물의 진동특성을 많이 따르고 있다. 즉 결합 구조물의 처음 4차까지는 사각판의 모드가 크게 나타나고, 5차모드에서 원통셸은 결합전 583.1Hz보다 약 16%증가된 696Hz를 보였다. 두 단순구조물의 결합으로 인하여 사각판의 고유진동수가 상당히 크게 증가되고, 원통셸의 진동수도 판 진동수 증가의 1/2정도가 증가하였다.

Table 4. Natural frequencies of the GFRP plain weave composite cylindrical shell with simply supported end conditions

n*	Axial half wave number (m)						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1708.8	3451.5	4253.6	4598.0	4812.6	5017.4	5266.9
2	818.3	2152.6	3181.3	3848.5	4303.5	4673.8	5039.7
3	583.1	1431.6	2357.5	3128.7	3745.1	4269.2	4764.7
4	779.7	1222.8	1925.6	2653.8	3326.4	3946.4	4544.9
5	1182.5	1421.7	1898.5	2507.2	3154.7	3806.6	4464.3
6	1704.5	1868.2	2201.8	2685.5	3264.6	3899.1	4573.1
7	2328.3	2464.3	2727.0	3122.7	3630.6	4224.3	4885.2
8	3050.0	3175.1	3404.4	3748.1	4202.1	4753.3	5388.5
9	3868.5	3989.0	4202.1	4516.8	4934.9	5451.8	6059.9
10	4783.6	4901.9	5106.9	5405.2	5800.6	6292.4	6877.5

* : Half wave number in the circumferential direction

Table 5. Comparison of natural frequencies(Hz) of analytical, experimental and ANSYS results of the GFRP plain weave composite cylindrical shell with interior plate at $\theta_1^* = 90^\circ$ location

Method Mode*	Analysis	Experiment	ANSYS
1st	234.5	245.0	241.6
2nd	344.3	335.0	352.8
3rd	547.2	540.0	547.5
4th	579.2	610.0	593.6
5th	696.0	660.0	614.5
6th	774.1	750.0	760.3
7th	804.5	810.0	803.5

* : Frequency ascending order

3.2 원통셸의 기하 매개변수에 따른 진동특성

일반적으로 원통셸의 특성을 좌우하는 기하학적 매개변수로는 셸의 길이 대 반경비(L_s/a)와 반경 대 두께비(a/h_s)를 고려할 수 있다. 이들 매개변수가 판 결합된 평직 복합재료 원통셸의 진동특성에 미치는 영향을 고찰하기 위한 수치계산을 수행하였다. 양단 단순지지된 중앙에 사각판이 결합된($\theta_1^* = 90^\circ$) GFRP 평직 복합재료 원통셸을 고려하였고, 이에 대한 상세한 것은 Table 1에서 언급하였다. 일정한 반경의 원통셸에 대한 길이의 변화를 고찰하였다. 고려한 원통셸은 비교적 짧은 셸($L_s/a < 5$)로서 $L_s/a = 1 \sim 5$ 까지 변할 때의 기본진동수 결과를 Fig. 3에 나타내었다. 결과는 단순지지된 사각판과 원통셸 만의 기본진동수와 이들이 결

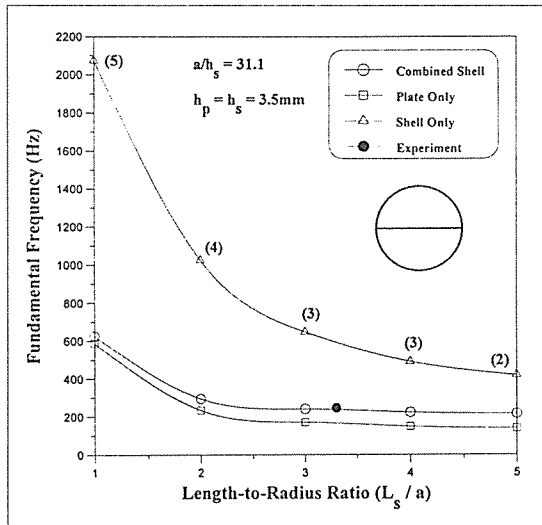


Fig. 3. Fundamental frequencies of the GFRP plain weave composite cylindrical shell with various length-to-radius ratios (L_s/a)

합되었을 때 원통셸의 기본진동수를 함께 제시하였다. 원통셸 만의 결과에서 ()안의 숫자는 최저 고유진동수가 발생할 때의 원주방향 모드수를 의미한다. 원통셸의 길이가 길어질수록 원통셸 만의 진동수는 낮아지고, 원주방향 모드수가 $n=5$ 에서 2로 줄어들어 길이가 길어지면서 원주방향 모드 특성이 줄어들음을 알 수 있다. 또한 사각판 만의 진동수도 길이가 길어지면서 낮아지는데 $L_s/a = 2.5$ 이상이 되면 거의 일정한 값을 갖는다. 이들 두 단순모델의 결과와 비교할 때, 판 결합된 원통셸의 기본진동수는 판 만의 진동수보다 약간 높은 값을 갖고, 거의 유사한 경향으로 변화하고 있다. 이것은 사각판 결합된 원통셸의 기본진동수는 사각판의 진동모드가 지배적이며, 원통셸과의 결합으로 인하여 약 30% 정도의 진동수가 증가한 결과이다.

판 결합된 평직 복합재료 원통셸의 반경 대 두께비 (a/h_s)에 따른 기본진동수의 변화를 Fig. 4에 나타내었다. 이때 원통셸과 내부판의 길이는 360 mm, 두께는 3.5 mm로 일정하고, 셸의 반경은 70 mm~210 mm 범위에서 고려하였다. 일반적으로 얇은 셸(thin shell)은 반경 대 두께비(a/h_s)가 20보다 크거나 같을 때로 정의[19]되므로, 본 모델에서 셸의 두께가 3.5 mm인 경우, 얇은 셸이론을 적용하기 위하여 반경이 70 mm 이상이면 된다. $a/h_s = 20$ 으로 셸의 반경이 비교적 작을 때 결합 원통셸의 기본진동수는 509 Hz로

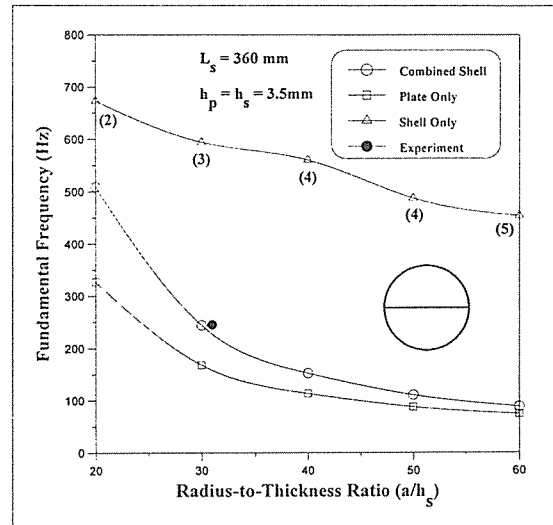


Fig. 4. Fundamental frequencies of the GFRP plain weave composite cylindrical shell with various radius-to-thickness ratios (a/h_s)

사각판과 원통셸 만의 기본진동수 중간 정도의 값을 보였다. 셸의 반경이 커지면서 $a/h_s = 40$ 정도까지는 결합구조물과 사각판 만의 진동수가 급격히 낮아지고, 40 이상에서는 비교적 완만히 감소하는 경향을 보였다. 그러나 원통셸 만의 진동수는 전체적으로 완만한 감소를 보였고, 기본진동수에서 나타나는 원주방향 반파수는 $a/h_s = 20$ 일 때 (1,2)모드가 $a/h_s = 60$ 일 때는 (1,5)모드를 보여, 반경이 커지면서 원주방향 셸 모드가 주도적이 된다는 것을 알 수 있다. 결합 원통셸의 기본진동수는 반경이 작았을 때 원통셸 만의 진동수에 근접한 값을 보였으나, 반경이 커지면서 사각판 만의 진동수에 점점 근접하는 결과를 보였다. 이것은 결합구조물에서 원통셸의 반경이 커지면서 내부에 결합되는 판의 폭도 같이 커지게 되고, 이로 인하여 결합된 구조물이지만 원통셸과 사각판은 각각의 독립 구조물에 대한 동적거동과 유사하게 거동하기 때문으로 생각된다.

3.3 적층 복합재료 매개변수에 따른 진동특성

복합재료로 제작된 구조물의 진동특성에 영향을 미치는 변수로는 적층재의 재질, 섬유 방향각(θ), 복합재료의 직교이방성 매개변수(E_1/E_2)등을 생각할 수 있다. 따라서 복합재료의 특성이라 할 수 있는 이들 매개변수가 판결합된 원통셸의 진동에 미치는 영향을 고찰하였다. 축방향과 횡방향으로 서로 다른 특성을 갖는

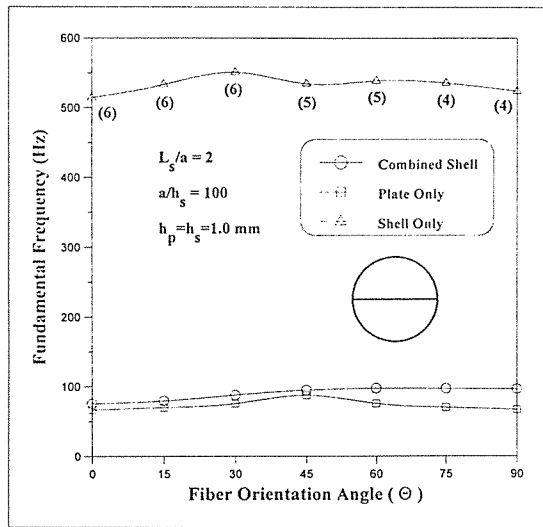


Fig. 5. Fundamental frequencies of the GFRP laminated composite cylindrical shell with $[(\Theta/-\Theta)_2]_s$ stacking sequence for various fiber orientation angles

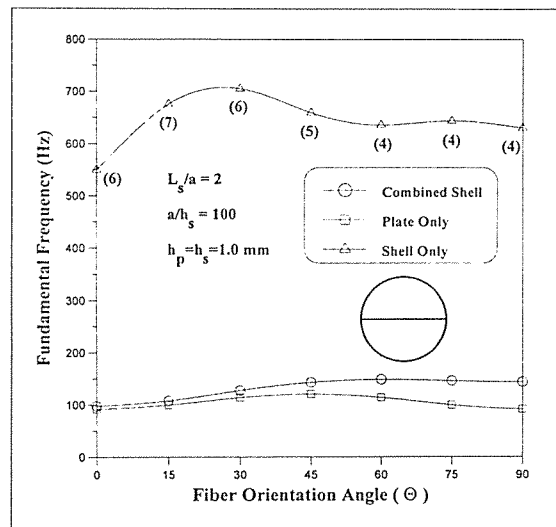


Fig. 6. Fundamental frequencies of the KFRP laminated composite cylindrical shell with $[(\Theta/-\Theta)_2]_s$ stacking sequence for various fiber orientation angles

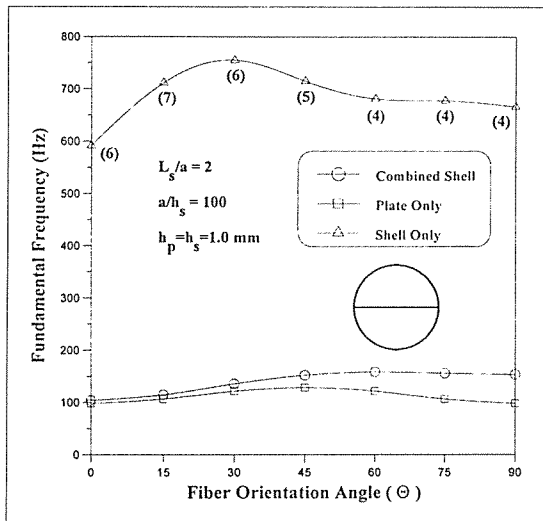


Fig. 7. Fundamental frequencies of the CFRP laminated composite cylindrical shell with $[(\Theta/-\Theta)_2]_s$ stacking sequence for various fiber orientation angles

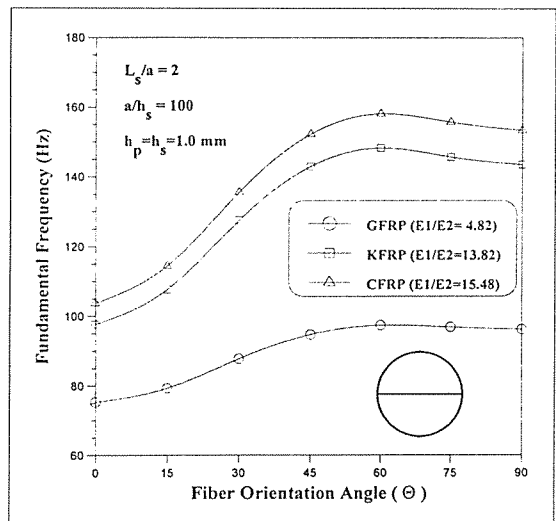


Fig. 8. Effect of the orthotropic modulus (E_1 / E_2) on the fundamental frequencies of the laminated composite cylindrical shell with interior plate at $\Theta_1^* = 90^\circ$ location

KFRP(Kev 49), GFRP(E-glass), CFRP(T300) 복합재료의 물성[20,21]을 인용하여 해석에 적용하였으며, 이들의 기계적 물성을 Table 2에 나타내었다.

고려한 복합재료는 대칭 angle-ply $[(\Theta/-\Theta)_2]_s$ 이고, 섬유 한 층의 두께는 0.125 mm, 총 8 적층의 1.0 mm

두께를 갖는 것으로 가정하였다. 또한 원통셸은 $L_s / a = 2$, $a / h_s = 100$ 의 크기를 갖는 경우에 대한 수치계산을 수행하였다. Fig. 5~7에는 섬유방향각(Θ)에 따른 이방성 매개변수가 다른 세 복합재료 결합 원통셸의 기본진동수 변화를 나타내었다. 세 재료 모두 사각

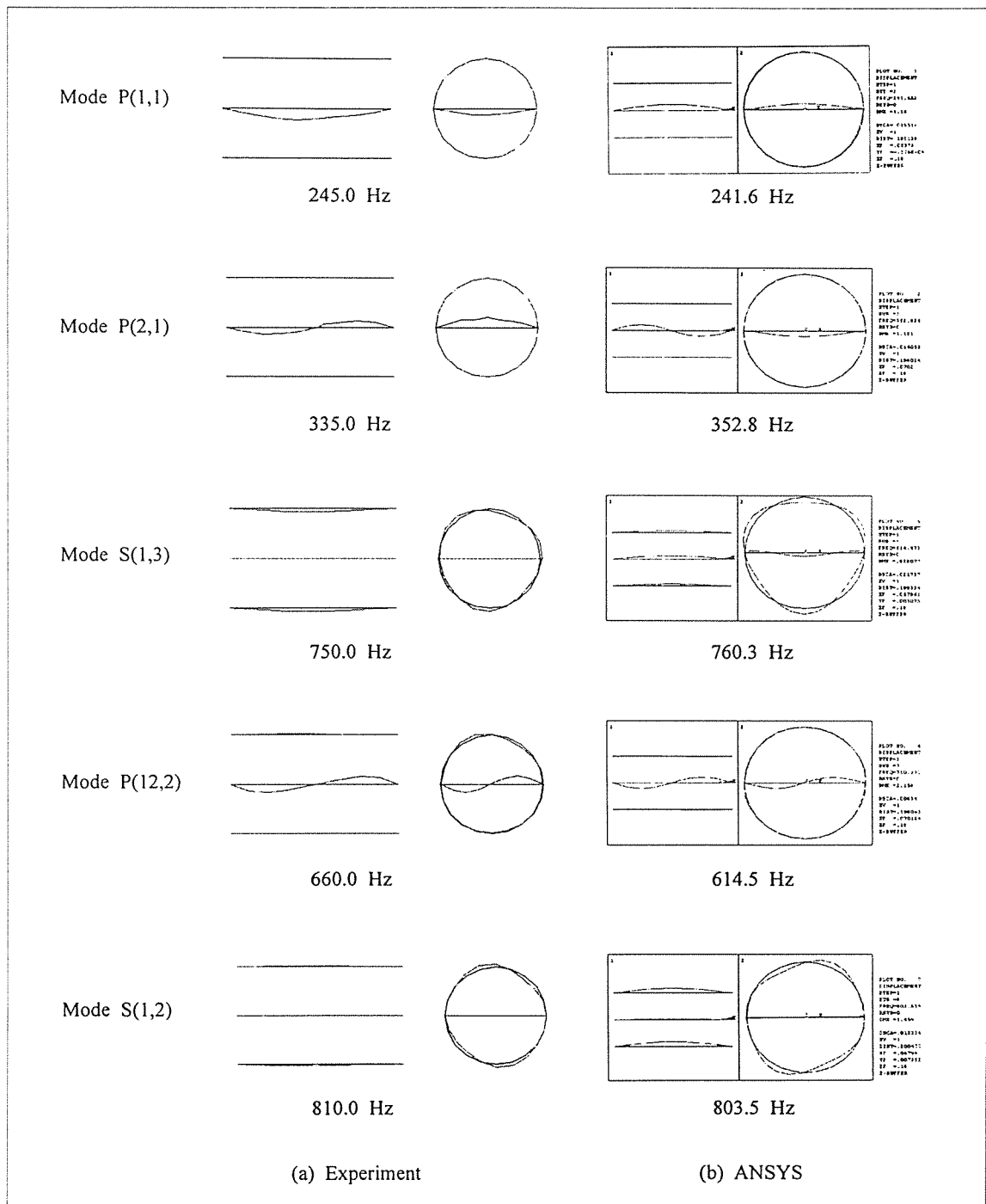


Fig. 9. Experimental and ANSYS mode shapes of the simply supported plain weave composite cylindrical shell with interior plate at $\theta_1^* = 90^\circ$ location

판 만의 기본진동수는 섬유방향각이 45° 일 때 가장 높고, 0° 와 90° 일 때 같은 값을 갖는다. 원통셸 만의 섬유방향각에 따른 기본진동수 변화는 이방성 매개변수가 4.82로 비교적 작은 GFRP 복합재료의 경우 크게 나타나지 않았으나, 이방성이 커질수록(KFRP, CFRP) 섬유방향각 $0^\circ \sim 45^\circ$ 사이의 구간에서 크게 변화하였다. 섬유방향각에 따른 셸 만의 기본진동수가 나타나는 원주방향 모드는 0° 일 때 (1,6) 모드였으나, 90° 에서는 (1,4) 모드를 보여 섬유방향각이 증가하면서 원주방향의 반파수가 감소하였다. 이것은 섬유방향각에 따른 원주방향의 강성 차이로 인하여 나타나는 현상으로 생각된다. 즉, $\theta = 90^\circ$ 일 때 주방향 탄성계수 (E_1)를 갖는 섬유는 원주방향으로 적층되기 때문에 0° 일 때 보다 더 큰 강성을 갖게 되고, 이것은 원주방향으로의 셸 모드를 구속하게 되어 반파수가 감소하는 것이다. 판 결합된 원통셸의 기본진동수는 세 재료 모두 내부 사각판의 모드이고, 섬유방향각이 0° 일 때 보다는 90° 일 때 단순지진된 사각판 만의 진동수와 차이가 커짐을 알 수 있다. 이러한 경향은 결합 원통셸의 기본진동수가 사각판의 모드에 영향을 크게 받지만 적층각의 증가에 따라서 원주방향 강성이 강해지는 원통셸과의 결합으로 인하여 판의 고유진동수가 증가하기 때문으로 판단된다. 또한 이러한 결과는 이방성이 커지면서 더 크게 나타남을 확인할 수 있다. 위에서 언급된 이방성 매개변수가 서로 다른 세 재료에 대하여 판 결합된 복합재료 원통셸의 적층각에 따른 기본진동수를 Fig. 8에 나타내었다. 복합재료의 이방성이 커지면서 진동수는 증가하고, 적층각 θ 가 60° 일 때 최대의 진동수를 보였으며, 직교이방성 매개변수가 비슷한 KFRP와 CFRP는 유사한 경향을 보였다.

Fig. 9는 Table 5에서 제시한 양단 단순지진된 결합 원통셸의 고유진동수에 따른 실험과 ANSYS를 통한 모드형상을 나타내었다. 두 결과는 잘 일치하여 실험 결과의 신뢰성을 확인할 수 있었고, 진동수가 낮은 범위에서는 대부분 내부 사각판의 모드가 지배적이고, 고차모드에서 셸의 모드가 나타났다. 또한 낮은 진동수에서는 이들 두 구조물의 거동이 분리되어 모드를 구분하기가 쉬웠지만, 진동수가 높아져 1 kHz 이상이 되면 판과 셸의 모드는 연성되어 이들 두 모드를 정확히 언급하기가 어렵게 되었다.

4. 결 론

사각판과 원통셸의 두 독립 구조물에 대한 결합진동수 방정식은 고전적 판이론과 Love's 셸 이론에 기초하여 유도하였고, 동적응답법을 채용하여 판 결합된 원통셸의 진동해석을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 원통셸의 판 결합부에서 사각판의 경계조건은 단순지진로 고려하였고, 길이방향 결합부에서 동적주기 선하중 및 모멘트는 정현(sine) 함수를 사용하였을 때 연속조건을 만족하였다.

(2) 원통셸의 중앙에 판 결합된 GFRP 평직 복합재료 원통셸에서 기본진동수는 길이 대 반경비(L_s / a)가 커질수록, 반경 대 두께비(a / h_s)가 커질수록 감소하고, 사각판 만의 진동수 보다 약간 증가된 값을 보였다.

(3) 내부에 판 결합된 적층 복합재료 원통셸에서 섬유방향각이 $\theta = 60^\circ$ 일 때 기본진동수는 가장 높은 값을 보였고, 직교이방성 매개변수(E_1 / E_2)에 따라 복합재료의 이방성이 커지면서 기본진동수는 증가하였다.

(4) 원통셸의 양단이 다른 경계조건을 갖는 경우에 동적응답법을 적용할 수 있다는 가능성을 제시하였으며, 판 결합된 복합재료 원통셸의 설계에 있어 다양한 요구조건에 손쉽게 대응할 수 있는 기초 데이터 생성에 활용할 수 있을 것으로 기대된다.

후 기

본 연구는 1997년 교육부 학술연구조성비(기계공학 ME-97-A-16)에 의하여 연구되었으며 관계자 여러분께 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

1. Bishop, R.E.D. and Johnson, D.C., The Mechanics of Vibration, London: 1960, Cambridge University Press.
2. Azimi, S., Hamilton, J.F. and Soedel, W., "The Receptance Method Applied to the Free Vibration of Continuous Rectangular Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol. 93, No. 1, 1984, pp. 9~29.

3. Huang, D.T. and Soedel, W., "Study of the Forced Vibration of Shell-Plate Combinations Using the Receptance Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 166, No. 2, 1993, pp. 341~369.
4. Lim, J.S., Sohn, D.S. and Lee, Y.S., "Free Vibration of Clamped-Free Circular Cylindrical Shell with a Plate Attached at an Arbitrary Axial Position", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 213, No. 1, 1998, pp. 75~88.
5. Yamada, G., Kobayash, Y., Ogawa, B. and Irie, T., "Free Vibration of a Jointed Spherical Shell-Annular Plate System", *日本機械學會論文集 C 編*, 第 53 卷, 第 491 號, 1987, pp. 1305~1308.
6. Irie, T. and Yamada, G., "Free Vibration of Jointed Conical-Cylindrical Shells", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 95, No. 1, 1984, pp. 31~39.
7. Tavakoli, M.S., and Singh, R., "Eigensolution of Joined/Hermitic Shell Structures Using the State Space Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 100, No. 1, 1989, pp. 92~123.
8. Cheng, L. and Nicolas, J., "Free Vibration Analysis of Cylindrical Shell-Circular system with General Coupling and Various Boundary Conditions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 155, No. 2, 1992, pp. 231~247.
9. Peterson, M.R. and Boyd, D.E., "Free Vibrations of Circular Cylinders with Longitudinal, Interior Partitions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 60, No. 1, 1978, pp.45~62.
10. Irie, T., Yamada, G. and Kobayashi, Y., "Free Vibration of Non-Circular Cylindrical Shells with Longitudinal Interior Partitions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 96, No. 1, 1984, pp.133~142.
11. Langley, R.S., "A Dynamic Stiffness Technique for the Vibration Analysis of Stiffened Shell Structures", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 156, No. 3, 1992, pp. 521~540.
12. Missaoui, J., Cheng, L. and Richard, M.J., "Free and Forced Vibration of a Cylindrical Shell with a Floor Partition", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 190, No. 1, 1995, pp.21~40.
13. 이영신, 최명환, "내부판 구조물이 결합된 강 및 평직 복합재료 원통셸의 구조진동 특성 연구", *한국소음진동공학회지*, 제 9 권, 제 1 호, 1999, pp. 149~162.
14. Jones, R.M., "Mechanics of Composite Materials", Hemisphere Publishing Co., New York, 1975.
15. Whitney, J.M., "Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates", Technomic Publishing Co., Lancaster, Pennsylvania, 1987.
16. Blevins, R.D., "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1979.
17. Soedel, W., "Vibrations of Shells and Plates", 2nd ed., Marcel Dekker, Inc, 1993.
18. Swanson Analysis Systems Inc., "ANSYS User's Manual", 1992.
19. Ugural, A.C., "Stresses in Plates and Shells", McGraw-Hill, Inc, 1981.
20. Tsai, S.W., "Composites Design", Think Composite, Dayton, Ohio, 1988.
21. 이영신, 최명환, "외팔형 복합재료 및 혼합적층 사각판의 자유진동해석", *大韓機械學會論文集*, 第 18 卷, 第 8 號, 1994, pp. 1899~1909.
22. Gibson, R.F., "Principles of Composite Material Mechanics", McGraw-Hill, Inc, 1994.

부 록 A

식(26)에서 선하중(혹은 모멘트)에 의한 원통셀의 변위(혹은 기울기)를 나타내는 동적응답 α_{ij} 에 대한 각 항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \frac{u'_{31}(x, \theta_1^*, t) |_{F_1}}{F_1^s \sin(\frac{m\pi}{L_s} x)} \\ &= \frac{\frac{F_1^s L_s}{2\rho_s h_s N_{mn}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta_1^*}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \sin \frac{m\pi x}{L_s} \cos n\theta}{F_1^s \sin(\frac{m\pi}{L_s} x)} \\ &= \frac{L_s}{2\rho_s h_s N_{mn}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta_1^*}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \cos n\theta_1^*\end{aligned}\quad (A1)$$

$$\alpha_{31} = \frac{u'_{32}(x, \theta_2^*, t) |_{F_1}}{F_1^s \sin(\frac{m\pi}{L_s} x)} = \frac{L_s}{2\rho_s h_s N_{mn}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta_1^*}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \cos n\theta_2^* \quad (A2)$$

$$\alpha_{13} = \frac{u'_{31}(x, \theta_1^*, t) |_{F_2}}{F_2^s \sin(\frac{m\pi}{L_s} x)} = \frac{L_s}{2\rho_s h_s N_{mn}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta_2^*}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \cos n\theta_1^* \quad (A3)$$

$$\alpha_{33} = \frac{u'_{32}(x, \theta_2^*, t) |_{F_2}}{F_2^s \sin(\frac{m\pi}{L_s} x)} = \frac{L_s}{2\rho_s h_s N_{mn}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta_2^*}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \cos n\theta_2^* \quad (A4)$$

$$\alpha_{21} = \frac{\beta_{\theta 1}(x, \theta_1^*, t) |_{F_1}}{F_1^s \sin(\frac{m\pi}{L_s} x)} = -\frac{L_s}{2\rho_s h_s N_{mn}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cos n\theta_1^*}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \sin n\theta_1^* \quad (A5)$$

$$\alpha_{41} = \frac{\beta_{\theta 2}(x, \theta_2^*, t) |_{F_1}}{F_1^s \sin(\frac{m\pi}{L_s} x)} = -\frac{L_s}{2\rho_s h_s N_{mn}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cos n\theta_1^*}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \sin n\theta_2^* \quad (A6)$$

$$\alpha_{23} = \frac{\beta_{\theta 1}(x, \theta_1^*, t) |_{F_2}}{F_2^s \sin(\frac{m\pi}{L_s} x)} = -\frac{L_s}{2\rho_s h_s N_{mn}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cos n\theta_2^*}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \sin n\theta_1^* \quad (A7)$$

$$\alpha_{43} = \frac{\beta_{\theta 2}(x, \theta_2^*, t) |_{F_2}}{F_2^s \sin(\frac{m\pi}{L_s} x)} = -\frac{L_s}{2\rho_s h_s N_{mn}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \cos n\theta_2^*}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \sin n\theta_2^* \quad (A8)$$

$$\alpha_{12} = \frac{u'_{31}(x, \theta_1^*, t) |_{M_1}}{M_1^s \sin(\frac{m\pi}{L_s} x)} = \frac{L_s}{2\rho_s h_s N_{mn}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sin n\theta_1^*}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \cos n\theta_1^* \quad (A9)$$

$$\alpha_{32} = \frac{u'_{32}(x, \theta_2^*, t) |_{M_1}}{M_1^s \sin(\frac{m\pi}{L_s} x)} = \frac{L_s}{2\rho_s h_s N_{mn}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sin n\theta_1^*}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \cos n\theta_2^* \quad (A10)$$

$$\alpha_{14} = \frac{u'_{31}(x, \theta_1^*, t) |_{M_2}}{M_2^s \sin(\frac{m\pi}{L_s} x)} = \frac{L_s}{2\rho_s h_s N_{mn}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sin n\theta_2^*}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \cos n\theta_1^* \quad (A11)$$

$$\alpha_{34} = \frac{u'_{32}(x, \theta_2^*, t) |_{F_2}}{M_2^s \sin(\frac{m\pi}{L_s} x)} = \frac{L_s}{2\rho_s h_s N_{mn}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sin n\theta_2^*}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \cos n\theta_2^* \quad (A12)$$

$$\alpha_{22} = \frac{\beta_{\theta 1}(x, \theta_1^*, t) |_{M_1}}{M_1^s \sin(\frac{m\pi}{L_s} x)} = -\frac{L_s}{2\rho_s h_s N_{mn}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \sin n\theta_1^*}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \sin n\theta_1^* \quad (A13)$$

$$\alpha_{42} = \frac{\beta_{\theta 2}(x, \theta_2^*, t) |_{M_1}}{M_1^s \sin(\frac{m\pi}{L_s} x)} = -\frac{L_s}{2\rho_s h_s N_{mn}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \sin n\theta_1^*}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \sin n\theta_2^* \quad (A14)$$

$$\alpha_{24} = \frac{\beta_{\theta 1}(x, \theta_1^*, t) |_{M_2}}{M_2^s \sin(\frac{m\pi}{L_s} x)} = -\frac{L_s}{2\rho_s h_s N_{mn}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \sin n\theta_2^*}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \sin n\theta_1^* \quad (A15)$$

$$\alpha_{44} = \frac{\beta_{\theta 2}(x, \theta_2^*, t) |_{F_2}}{M_2^s \sin(\frac{m\pi}{L_s} x)} = -\frac{L_s}{2\rho_s h_s N_{mn}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot \sin n\theta_2^*}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \sin n\theta_2^* \quad (A16)$$

원통셀과 마찬가지로 방법으로 사각판의 동적응답 β_{ij} 에 대한 각 항은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\beta_{11} &= \frac{u'_{21}(x, y_1^*)|_{F_1}}{F'_{11} \sin(-\frac{m\pi}{L_p} x)} \\ &= -\frac{2F'_{11}}{\rho_p h_p b} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(-\frac{n\pi}{b} y_1^*)}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \sin(-\frac{n\pi}{b} y) \sin(\frac{m\pi}{L_p} y)}{F'_{11} \sin(-\frac{m\pi}{L_p} x)} \quad (B1)\end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{\rho_p h_p b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(-\frac{n\pi}{b} y_1^*)}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \sin(-\frac{n\pi}{b} y_1^*) = -\frac{2}{\rho_p h_p b \omega^2}$$

$$\beta_{31} = \frac{u'_{22}(x, y_2^*)|_{F_1}}{F'_{11} \sin(-\frac{m\pi}{L_p} x)} = \frac{2}{\rho_p h_p b \omega^2} \quad (B2)$$

$$\beta_{13} = -\frac{u'_{21}(x, y_1^*)|_{F_2}}{F'_{21} \sin(\frac{m\pi}{L_p} x)} = -\frac{2}{\rho_p h_p b \omega^2} \quad (B3)$$

$$\beta_{33} = -\frac{u'_{22}(x, y_2^*)|_{F_2}}{F'_{21} \sin(\frac{m\pi}{L_p} x)} = -\frac{2}{\rho_p h_p b \omega^2} \quad (B4)$$

$$\beta_{22} = \frac{\beta'_{21}(x, y_1^*)|_{M_1}}{M'_{11} \sin(-\frac{m\pi}{L_p} x)} = \frac{2\pi^2}{\rho_p h_p b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \quad (B5)$$

$$\beta_{42} = \frac{\beta'_{22}(x, y_2^*)|_{M_1}}{M'_{11} \sin(-\frac{m\pi}{L_p} x)} = \frac{2\pi^2}{\rho_p h_p b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \quad (B6)$$

$$\beta_{24} = -\frac{\beta'_{21}(x, y_1^*)|_{M_2}}{M'_{21} \sin(\frac{m\pi}{L_p} x)} = -\frac{2\pi^2}{\rho_p h_p b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \quad (B7)$$

$$\beta_{44} = -\frac{\beta'_{22}(x, y_2^*)|_{M_2}}{M'_{21} \sin(\frac{m\pi}{L_p} x)} = -\frac{2\pi^2}{\rho_p h_p b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2)} \quad (B8)$$