

論文

직물복합재료의 상세 응력해석을 위한 매크로요소의 후처리기법 연구

우경식*

Macroelement Post-processor Approach for Detailed Stress Analysis of Woven Textile Composites

Kyeongsik Woo*

ABSTRACT

A post-processor of multi-field macroelement was developed for the detailed stresses of woven textile composites. A symmetric plain weave unit cell configuration was analyzed to evaluate the performance of the post-processors. The stress results by macroelement post-processors were compared to those by conventional analyses. Results indicated that the post-processors were able to predict detailed stresses within a reasonable accuracy for woven textile composites. The usefulness of the post-processor was demonstrated for a 5-harness satin weave configuration.

초 록

직물복합재료의 상세 응력 해석을 위하여 매크로요소의 후처리가 개발되었다. 이는 다변위장 매크로요소를 확장한 것으로 전역/국지의 2-단계 해석 전략을 채용하고 있다. 후처리기의 성능을 평가하기 위하여 대칭적 평직 평직 복합재료 단위구조의 미세구조에 대하여 응력 해석이 수행되었다. 계산 결과 후처리에 의한 상세 응력 분포는 기존의 유한요소해석의 결과와 비교하여 타당한 정확도를 가지고 있음을 보여주었으며, 또한 5매 주자직 복합재료 단위구조에 대한 상세 응력 해석을 수행함으로써 그 유용성이 확인되었다.

1. 서 론

직물복합재료는 굴곡된 섬유다발이 서로 교차하여 꼬여있는 구조로 되어 있다. 그림 1은 평직 복합재료의 기본구조를 보여주고 있는데 한 장 전체를 이 기본구조를 좌우로 반복하면 얻을 수 있으므로 이를 단위구조라 한다. 그림에 나타난 바와 같이 이 단위구조는 서로 교차하여 배열되어 있는 두개의 섬유다발(Warp Tow, Fill Tow)과 섬유다발 사이의 빈 공간을 채우고 있는 수지로 이루어져 있다. 이와 같은 직물구조로 인

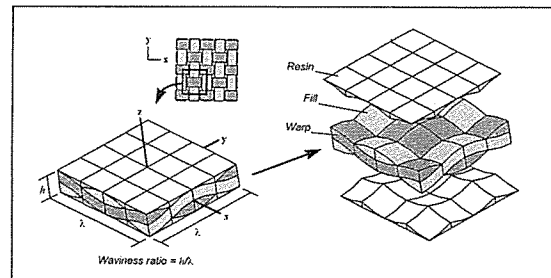


Fig. 1. Typical fiber tow geometry of plain weave textile composites

* 충북대학교 공과대학 구조시스템공학과

하여 식물복합재료는 면의 방향의 충격에 강하고 내부의 결합 등에 의한 층간분리의 성장에 잘 저항하는 우수한 기계적 특성을 가지고 있다. 또한 성형/제작의 측면에서도 식물복합재료는 공정과정 자체를 최종 제품에 중합하는 시스템적 설계의 가능성을 제공한다[1,2]. 이러한 우수한 특성과 가능성 때문에 식물복합재료는 첨단 항공우주 분야의 구조재료로 최근 그 사용이 증가하고 있으며 자동차, 선박, 토목 구조물 및 스포츠 산업에서의 사용에도 기존의 재료에 비하여 점차 가격 경쟁력을 확보하기 시작하고 있다[3].

그러나 최근의 이와 같은 식물복합재료의 사용이 증가하고 있는 추세에도 불구하고 그 기계적 거동에 대한 이해는 아직 미미한 상태이다. 현재 식물복합재료의 상세 응력 및 파괴해석에 대한 연구는 보고된 것이 많지 않으며 그나마 연구된 것은 대부분 단위구조해석에 초점을 맞추고 있는 형편이다[4-7]. 해석적 측면에서 식물복합재료의 복잡한 섬유다발 구조는 상세 해석에 거대한 장애물이 되고 있다. 굴곡된 섬유다발은 위치에 따라서 물성축이 연속적으로 변하고 있고 또한 섬유다발간 및 섬유다발-수지의 경계에서의 경계면 조건은 기하적 복잡성 때문에 이론적 해석 방법으로는 고려하기가 매우 어렵다. 따라서 유한요소법과 같은 수치적 방법이 해석에 적합하나 정확한 계산을 위해서는 식물복합재료를 구성하고 있는 성분별로 개별 모델링을 수행하여야 하는데 이는 많은 양의 전산기 메모리를 요구하게 된다.

평직 복합재료의 단위구조해석에는 메모리 요구조건이 어느정도 받아들일 수 있는 범위에 있을 수 있다. 대칭 적층된 평직 복합재료의 단위구조는 좌우 및 상하 대칭이므로 전체 단위구조 대신에 '1/8' 만큼의 단위구조만으로 해석을 수행할 수 있으며 심지어 특수 경계조건을 가하면 해석에 필요한 부분을 '1/32' 단위구조로 축소할 수도 있다[8].

그러나 실제로 평직 복합재료는 임의의 위상각을 가지고 적층 되므로 전체의 단위구조가 해석에 반드시 필요하게 된다. 전체 단위구조에 대한 유한요소 모델에는 많은 절점 자유도가 존재하고 또한 반복 경계조건을 가하기 위한 다중점 구속조건(Multi-point constraint, MPC)을 가지게 될 것이므로 매우 큰 전산기의 메모리를 요구하게 된다[9]. 한편 임의의 적층각을 가지고 적층된 평직 복합재료에서 단위구조는 많은 적층수를 가지는 경우가 있다. 예를 들어 평직 복합재료는 두께 방향으로 낮은 균일도를 가지고 있으므로 물

성치는 적층수에 따라서 변화한다[10]. 이런 경우 정확한 해석을 위해서 두께 방향의 모든 층이 단위구조에 포함되어야 하는데 이와 같이 단위구조의 크기가 증가하면 해석에 필요한 전산기의 메모리는 엄청나게 증가하게 된다.

주자적 복합재료의 경우 3차원 응력해석에 대한 연구는 거의 시도되지 못하였는데 이는 가장 단순한 단위구조에도 너무나 많은 수의 요소가 포함되기 때문이다. 참고문헌 [11]은 단순한 대칭적층된 8-매 주자적 복합재료의 상세 해석에 얼마나 많은 메모리와 계산시간이 소요되었는지를 보고하고 있다. 이것에 비추어 여러개의 단위구조가 포함되는 주자적 복합재료의 형상에 대해서는 전통적인 유한요소해석이 불가능하거나 비현실적임을 쉽게 알 수 있다.

여러개의 단위구조를 동시에 포함하는 식물복합재료 문제에 대해서 현재까지 서브셀 방법[12]과 마크로요소[13,14]가 생긴 유한요소 메쉬를 사용하면서 재료의 거시적 거동을 효과적으로 예측한 바 있으나 내부 미세구조의 상세 응력 계산은 수행되지 않았다. 한편 생긴 전역 메쉬와 상세한 국지 메쉬를 채용한 전역/국지(Global/local) 방법[15]에 의하여 상세 국지 응력의 계산이 시도되었는데, 여러 단계의 상세도를 가진 메쉬를 사용하는 생각은 내부 미세구조를 가진 식물복합재료의 해석에는 타당한 것으로 생각되었다. 그러나 전역/국지 경계에서 상대적으로 큰 오차가 발생하였고 이를 방지하기 위하여는 관심 지역의 응력 분포에 대한 사전 지식이 요구되었다.

본 연구에서는 다중 변위장 마크로요소(Multi-field macroelement)[14]를 확장하여 식물복합재료의 상세 응력해석을 위한 후처리기를 개발하였다. 해석 전략은 전역/국지 방법과 유사하며 마크로요소 메쉬와 서브메쉬를 사용하는 2단계 과정에 근거하고 있다. 마크로요소는 전역해석에서 식물복합재료의 미세구조를 반영하게 되며 마크로요소에서 미세구조를 정의하는데 사용되었던 서브 메쉬는 다시 국지 상세 응력을 계산하는데 사용되었다. 후처리기의 성능은 평직 복합재료 형상에 대하여 전통적인 유한요소법에 의한 응력과의 비교하여 평가 되었으며 고차 마크로요소에 대하여 오차의 수렴성을 조사 하였다.

다음 절은 먼저 마크로요소와 후처리기에 대하여 기술하였다. 그 다음에 식물복합재료의 모델링 전략을 소개하고 대칭 적층된 평직 복합재료 형상에 대한 해석의 경계조건을 설명하였다. 해석 결과는 마크로요소의

후처리기의 성능 평가에 초점을 맞추어 계산된 응력의 정확도라는 관점에서 검토하였다. 마지막으로 5-매 주 자직 복합재료의 해석을 통하여 후처리기의 유용성을 확인하였다.

2. 매크로요소 후처리기

매크로요소는 내부 미세구조를 가지는 요소로 정의된다. 기존의 연구에서 미세구조를 반영하여 줄 수 있는 두 종류의 매크로요소[13,14]가 개발되어 직물복합재료의 등가 물성치 등 거시 거동을 효과적으로 예측한바 있다. 본 연구에서는 다중 변위장 매크로요소[14]를 확장하여 후처리 과정을 통하여 상세 응력 분포와 같은 미시 거동을 예측하고자 한다. 본 절에서는 매크로요소의 후처리기를 기술하고 있다.

그림 2는 매크로요소와 후처리기를 이용한 직물복합재료에 대한 응력 해석 과정을 개략적으로 나타내고 있는데 여기서 해석과정은 일방향 인장하중을 받고 있는 대칭 적층된 2장의 평직 복합재료에 대하여 설명되었다. 그림에서 보는 바와 같이 해석 과정은 7단계로 나누어져 있는데 개념적으로는 전역 메쉬가 서브 메쉬를 가지는 매크로요소로 이루어져 있다는 것을 제외하고는 전통적인 유한요소법과 동일하다.

처음에 평직 복합재료는 성긴 전역 매크로요소 메쉬로 모델링 된다. 각각의 다른 미세구조를 가지는 매크로요소들에 대해 해당 서브 메쉬가 만들어지게 된다. 이 그림에서 전역 메쉬는 하나의 매크로요소가 대칭 적층된 직물복합재료 평판의 섬유다발의 '1/2' 주기 만큼의 지역을 담당하도록 모델링 되었다. 이렇게 하면 전역 메쉬는 2종류의 서로 다른 매크로요소로 모델링할 수 있으므로 (그림에서 Type A와 Type B로 구분) 이 매크로요소들에 대해서만 서브 메쉬들을 모델링하면 된다.

전역 메쉬와 서브 메쉬가 만들어 지면 다음 단계는 각각의 서브 메쉬에 대해 강성행렬을 구하게 된다. 서브 메쉬에서 절점 자유도(q)는 내부 자유도(q_i)와 경계 자유도(q_b)로 구분된다. 서브 메쉬에 대해 구한 강성행렬과 하중 벡터는 내부와 경계 자유도에 따라 재순서하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ib} \\ K_{bi} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ q_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_b \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(1)$$

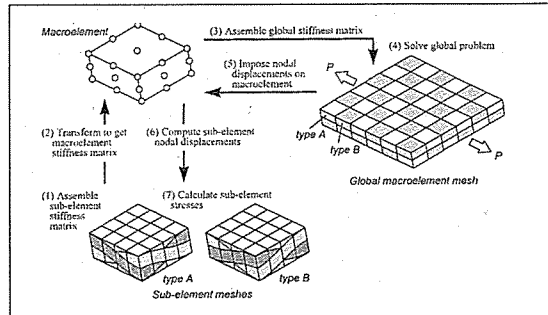


Fig. 2. Schematic of stress analysis procedure with macroelements for woven textile composite structures

다중 변위장 매크로요소에서는 서브 메쉬의 자유도 중에서 경계에 위치한 자유도들만 매크로요소의 자유도에 구속되어 있으므로

$$\{q_b\} = [T_b] \{q_m\} \quad \dots\dots\dots(2)$$

내부 자유도는 정적 압축하여 제거되고[16] 나머지 경계 자유도에 대한 식들은 매크로요소 강성행렬과 하중벡터로 다음과 같이 변환된다.

$$[K_m] = [T_b]^T [\bar{K}_{bb}] [T_b], \{f_m\} = [T_b]^T \{\bar{f}_b\} \quad \dots\dots\dots(3)$$

여기서

$$\begin{aligned} [\bar{K}_{bb}] &= [K_{bb}] - [K_{bi}] [K_{ii}]^{-1} [K_{ib}] \\ \{\bar{f}_b\} &= \{f_b\} - [K_{bi}] [K_{ii}]^{-1} \{f_i\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(4)$$

참고문헌 [14]는 이상의 단계를 효율적으로 구현하는 기법을 상세히 설명하고 있다.

매크로요소의 강성행렬과 하중벡터가 계산되면 이들은 즉시 기억장치에 저장된다. 식 (2)에서 변환행렬 $[T_b]$ 는 서브 메쉬의 변위가 어떻게 매크로요소의 변위에 구속되었는지를 나타내고 있다. 본 연구에서 변환행렬을 구성하기 위하여 매크로요소의 모양함수가 사용되었다.

모든 매크로요소의 강성행렬과 하중벡터가 구해지면 다음 단계로 이들은 전역 메쉬에 대한 전역 강성행렬과 하중벡터로 조립된다. 각 형태의 매크로요소에 대하여 해당 매크로요소 강성행렬과 하중벡터는 기억장치에서 불러와서 조립된다. 여기서 전역 메쉬가 제한된 수의 매크로요소로 모델되어 있으므로 (현재의 경우는

2개) 이 과정은 매우 빠르고 효율적으로 이루어진다.

조립이 완료되면 전역 문제를 풀어 전역 변위를 구하게 된다. 그 다음에 특정 마크로요소에 대하여 마크로 변위(q_m)가 전역 변위에서 추출된다. 그러나 이 시점에서 마크로요소는 물성치를 가지고 있지 않으므로 국지 응력을 계산할 수 없다. 따라서 마크로 변위는 직물복합재료의 개별 물성치가 정의되어 있는 서브 메쉬 변위로 변환된다. 다중 변위장 마크로요소에서 서브 메쉬의 경계 자유도는 마크로 자유도에 구속되어 있으므로 경계 자유도 변위는 마크로요소의 변위와 모양함수에 의해 보간되어 구해진다. 마지막으로 내부 자유도에 대한 변위는 식(1)을 정리하여 다음과 같이 구하게 된다.

$$\{q_i\} = [K_{ii}]^{-1} (\{f_i\} - [K_{ib}]\{q_b\}) \dots\dots\dots(5)$$

따라서 서브 메쉬에 대한 모든 변위가 구하여 졌으므로 국지 응력은 전통적인 유한요소법과 동일한 방법으로 구할 수 있다.

실제 계산에서 국지 응력은 국지 해석을 통하여 구하게 된다. 즉, 마크로 변위로부터 보간하여 구한 경계 자유도 변위는 서브 메쉬에 대한 경계조건이 되고 국지 응력은 이 문제를 풀어 구하게 된다.

표 1은 마크로요소 당 절점수를 요약하고 있다. 다중 변위장 마크로요소는 라그랑지 계열[16]의 요소에서 내부의 요소를 뺀 것으로 요소의 경계에만 절점이 있는 요소이다. 따라서 n -차 마크로요소의 절점수는 다음과 같다.

$$\text{Number of nodes per element} = (n+1)^3 - (n-1)^3 \dots\dots\dots(6)$$

본 연구에서 2차에서 5차까지의 다중 변위장 마크로요소가 사용되었다. 모양함수를 구성하는 기본 단항식은 참고문헌 [16]에서 제시한 방법에 따라서 선정되었다. 5차 마크로요소의 모양함수를 구성하는 단항식은 부록에 정리되어 있다.

표 1. 다중 변위장 마크로요소의 요소당 절점수

마크로요소 차수	요소당 절점수
2	26
3	56
4	98
5	152

3. 모델링 전략

그림 3은 직물복합재료 해석에서의 모델링 전략을 나타내고 있다. 먼저 전역 해석은 개별 물성 모델링에 의한 상세 메쉬와 등가 물성치를 가지는 성긴 메쉬, 그리고 마크로요소 메쉬를 사용하여 수행될 수 있다. 그리고 국지 응력 해석의 경우에도 상세 메쉬와 성긴 메쉬를 사용할 수 있다. 그림에서 전략 A로 표시된 것은 상세 메쉬를 전역 해석과 국지 해석 모두에 사용하는 것인데 이는 바로 전통적인 유한요소법으로 미세구조에 대한 상세 응력 분포를 구할 수 있다. 그러나 전통적인 유한요소법에 의한 직물복합재료의 해석은 지나치게 큰 계산 용량을 요구하므로 바람직하지 않은 방법이다.

전략 B는 전역 및 응력해석 모두에서 등가 물성치를 가지는 성긴 메쉬를 사용하는 방법이다. 이 경우 등가 물성치가 사용되었으므로 명목상의 응력인 등가 응력만이 계산된다. 이를 여기서는 등가 해석으로 부르기로 하자. 그림 4는 하나의 예로서 전통적인 유한요소 해석과 등가 해석에 의한 응력 분포를 비교하고 있다. 이것은 2장의 대칭 적층된 평직 복합재료 매트에서 x-방향으로 일방향 인장하중이 걸렸을 때의 응력 분포이다. 그림에서 보는 바와 같이 전통적인 유한요소법은 섬유다발과 수지 등 미세구조의 상세 거동을 반영하는 복잡한 응력 분포를 나타내고 있다. 그러나 등가 해석은 그 결과로 단순한 등가 응력 분포만을 주므로 미세구조의 거동을 연구하는데는 타당하지 않음을 알 수 있다.

다른 전략으로서 전역 해석과 국지 해석에서 모델링 전략을 혼합하여 사용하는 방법이 있을 수 있다. 전략 C는 이의 한 방법으로 본 연구의 주제이다. 이 전략은 전역 해석에는 마크로요소를 그리고 국지 해석에는 미세구조를 상세히 모델하고 있는 서브 메쉬를 사용하는 방법이다. 마크로요소는 전역 해석에서 미세구조의 영

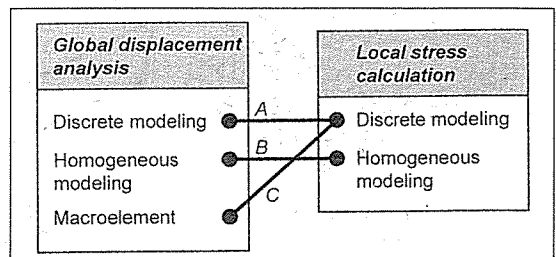


Fig. 3. Modeling strategies for stress analysis of woven composites.

향을 적절히 반영하면서 계산 용량을 감소시키게 된다. 그리고 상세 국지 응력은 전절에서 설명된 후처리기법에 의해 계산된다.

위 전략에서 전역 해석의 매크로요소를 등가 물성 모델링을 가지는 일반 요소를 대체하여 사용하는 방법이 있을 수 있다. 이 방법은 매크로요소의 강성 행렬과 하중 벡터를 계산하지 않고 단순히 등가 물성치를 사용하자는 생각이다. 국지 응력 계산에서는 계속 상세 개별 모델링을 사용하게 된다. 이 모델링 전략의 기초를 이루는 가정은 전역 구조물이 균질하다는 것이다. 직물복합재료에서 이 가정은 구조물이 많은 수의 적층수를 가지고 있는 경우에 적용될 수 있다. 충분히 두꺼운 직물복합재료 구조물은 섬유다발 등의 미세구조의 특성크기가 판의 두께와 같은 구조물의 특성크기에 비하여 작아서 상대적으로 높은 균질도를 가진다. 그러나 얇은 직물복합재료 구조물은 미세구조의 특성크기가 구조물의 특성크기에 비하여 작지 않으므로 그 균질도

가 낮게 된다. 이 때 전역 해석에서 등가 물성치를 사용하는 것은 큰 오차를 유발할 수도 있다.

그림 5는 전역 해석에서 개별 모델링과 등가 모델링, 그리고 매크로요소를 사용하였을 때 변형된 형상을 비교하고 있다. 여기서 변형된 형상은 그림 4에서 회색으로 칠하여진 지역에 대한 것이다. 경사와 위사의 미세구조 배치로 인하여 개별 모델링은 윗 면에서 많은 기복이 있는 변형된 형상을 나타내고 있다. 그러나 등가 해석에 의한 변형된 형상은 전혀 기복을 보이지 않았다. 따라서 등가 해석에 의한 전역 변위는 국지 해석에 사용되어 정확한 응력을 계산할 수 없음을 쉽게 알 수 있다. 그러나 매크로요소는 기복이 있는 평직 복합재료의 변형을 잘 예측할 수 있었다. 3차 매크로요소와 전통적인 유한요소 해석에 사용된 개별 모델링과 동일한 상세도를 가지는 서브 메쉬를 사용하여 계산한 결과 그림 5(c)는 매크로요소의 변형된 형상이 전통적인 유한요소 해석이 변형 결과에 잘 따라가고 있음을 보여주고 있다.

이상은 미세구조의 자세한 내용이 정확한 계산을 위해 전역 해석에 반영되어야만 한다는 것을 의미하고 있다. 이것은 특히 낮은 균일도를 가진 얇은 직물복합재료의 계산에는 더욱 그러할 것으로 생각된다. 본 연구에서는 그림 3의 전략 C를 채택하여 해석하였으며 직물복합재료의 미세구조를 전역 모델에 반영하도록 매크로요소를, 그리고 국지 응력 해석을 위하여 개별 모델링된 서브 메쉬를 사용하였다.

4. 해석 모델

본 절에서는 대칭 적층된 평직 복합재료 단위구조

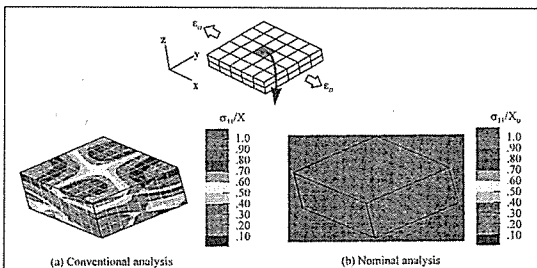


Fig. 4. Comparison of stress distributions by the conventional and nominal analyses for two symmetrically stacked plain weave textile mats under a uniaxial tension loading in the x-direction. The applied nominal strain(ϵ_0) was 0.005. The conventional stress was transformed to the material axes and normalized by the strengths and the nominal stress was normalized by $X_0 = \epsilon_0 E_{xx}$.

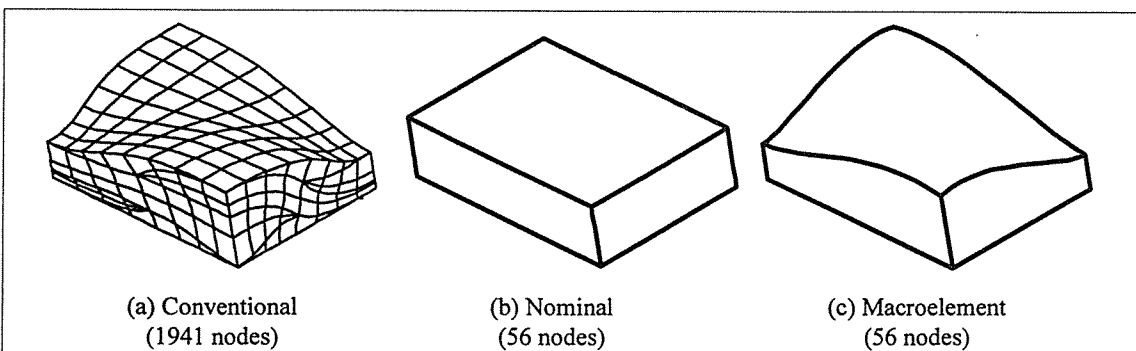


Fig. 5. Comparison of deformed meshes for two symmetrically stacked plain weave textile mats under a uniaxial tension loading in the x-direction. The applied nominal strain was 0.005. The deformation was scaled for viewing purpose.

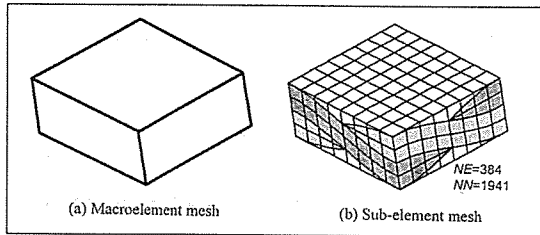


Fig. 6. Macroelement and sub-element meshes for '1/8' plain weave symmetric unit cell

해석 모델과 미세구조를 이루는 각 구성성분의 물성치에 대하여 기술하였다.

평직 복합재료 미세구조는 그림 1에 나타난 바와 같이 섬유다발(경사, 위사)과 수지로 구성되어 있다. 섬유다발은 다시 섬유와 수지로 되어 있으나 본 연구에서는 균질하다고 가정하였다. 계산에 사용된 섬유다발과 수지에 대한 물성치는 다음과 같다[17].

Fiber tow:

$$\begin{aligned} E_{11} &= 206.9 \text{ GPa}, E_{22} = E_{33} = 5.171 \text{ GPa} \\ \nu_{12} &= \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25 \\ G_{12} &= G_{13} = 2.386 \text{ GPa}, G_{23} = 2.068 \text{ GPa} \\ X &= 1034 \text{ MPa} / -689.5 \text{ MPa}, \\ Y &= Z = 41.37 \text{ MPa} / -117.2 \text{ MPa} \\ S_{12} &= S_{13} = 68.95 \text{ MPa}, S_{23} = 55.13 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Resin:

$$\begin{aligned} E &= 3.45 \text{ GPa}, \nu = 0.35, G = 1.28 \text{ GPa} \\ X &= 103.4 \text{ MPa} / -241.3 \text{ MPa}, S = 89.6 \text{ MPa} \end{aligned}$$

본 연구에서 섬유다발의 단면은 볼록렌즈(Lenticular) 형으로, 그리고 길이 방향으로는 사인파형으로 굴곡되어 있다고 가정하였다. 따라서 섬유다발의 물성 좌표계는 전체 좌표계에 대하여 연속적으로 변하게 되어 섬유다발의 물성치는 전체 좌표계로 변환 되어야 한다. 평직 복합재료의 경우 섬유다발의 굴곡각은 심지어 하나의 요소 내에서도 그 변화가 적지 않으므로 본 연구에서 물성치의 변환은 매 적분점 마다 수행하였다[18]. 섬유다발의 굴곡도는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{Waviness ratio} = \frac{h}{\lambda} \dots\dots\dots (7)$$

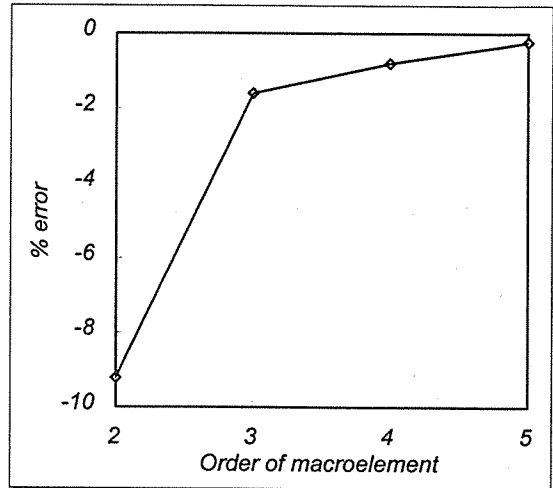


Fig. 7. Convergence of E_{xx} for a symmetric plain weave unit cell

여기서 h 는 한 층의 두께이고 λ 는 섬유다발의 주기이다. 이와 같은 굴곡도의 정의는 주자직 복합재료에도 적용될 수 있는데 이 때 주기는 섬유다발의 굴곡된 지역의 길이로 대체된다. 본 연구에서 섬유다발의 굴곡도는 1/3로 가정하였다.

그림 6은 무한히 반복되는 대칭 적층된 평직 복합재료 형상에 대한 매크로요소 메쉬와 서브 메쉬를 보여주고 있다. 서브 메쉬는 섬유다발과 수지지역을 개별적으로 모델링하고 있는데 384개의 20-절점 요소가 사용되었다. 그림에서 서브 메쉬는 섬유다발의 반주기 만큼을 모델하고 있는데 이는 하나의 단위구조의 '1/8'에 해당한다. 이 '1/8' 단위구조를 그림 6(a)에 나타난 것과 같이 하나의 매크로요소로 모델링 하였다.

5. 계산결과 및 고찰

본 절에서는 매크로요소 후처리기의 국지 응력 분포의 예측 성능을 중심으로 한 계산 결과를 검토하였다. 후처리기에 의한 응력 결과는 전통적인 유한요소해석의 결과와 비교되었으며 그에 대한 퍼센트 차이를 도표로 나타내었다. 먼저 평직 복합재료 형상에 대하여 후처리기의 성능이 평가 되었으며, 다음으로 5-매 주자직 복합재료에 대하여 그 유용성을 확인하였다.

그림 7은 매크로요소에 의한 대칭 적층된 평직 복합재료의 등가 탄성계수 E_{xx} 의 수렴도를 나타내고 있다. 등가 탄성계수는 중첩법에 의한 단위구조 해석에 의한

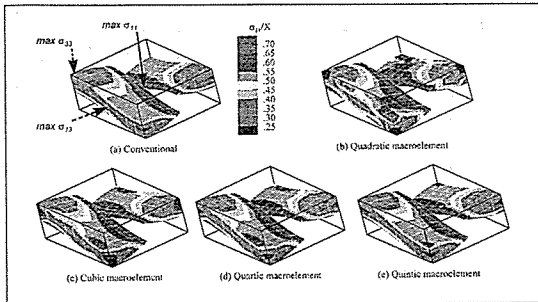


Fig. 8. Stress distributions of warp tows by conventional analysis and by post-processing with multi-field macroelement. Locations of maximum stresses are indicated in(a)

여 계산하였다[4]. 퍼센트 오차는 마크로요소 해석 결과와 전통적인 유한요소 해석 결과와의 차이를 나타낸다. 그림에서 볼 수 있는 것과 같이 마크로요소는 평직 복합재료의 등가 탄성계수를 잘 예측하고 있음을 알 수 있었다. 마크로요소의 차수가 증가함에 따라서 오차는 빠른 속도로 감소하였다. 한 개의 3차 마크로요소를 사용하여 계산한 등가 탄성계수는 전통적인 유한요소법에 의한 계산결과와 비교하여 그 오차가 1.6%에 불과하였다.

그림 6의 대칭 적층된 평직 복합재료 단위구조 마크로요소와 서브 메쉬는 후처리기를 통하여 국지 응력을 계산하는데 다시 사용되었다. 이 형상에 일방향 인장하중이 x-방향으로 가하여 졌으며 부가된 명목 변형도는 0.005 였다. 일방향 인장 하중 상태를 묘사하기 위하여 y-방향과 z-방향으로는 단위구조 해석에서 구한 포아송 비 ν_{xy} 와 ν_{xz} 에 의한 축소 변형의 양이 계산되어 모델의 외부 평면에 경계조건으로 가하여 졌다.

그림 8은 일방향 인장 하중을 받고 있는 평직 복합재료의 경사에 대하여 전통적인 유한요소법과 마크로요소의 후처리기에 의하여 계산된 σ_{11} 응력 분포를 나타내고 있다. 여기서 분포된 응력은 물성축으로 변환되고 다시 강도로 나눈 값이다. 그림에서 다중 변위장 마크로요소의 후처리기는 국지 응력을 예측하는데 타당한 성능을 가지고 있음을 알 수 있었다. 낮은 차수의 마크로요소는 요소 내부에 위치한 지역의 응력을 어느 정도 정확하게 계산해 내었다. 그러나 서브 메쉬의 경계 자유도의 변위가 마크로요소의 변위로부터 보간되는 경계로 다가가면 계산된 응력은 상당한 오차를 보이고 있다. 그러나 마크로요소의 차수가 증가함에 따라서 응력의 정확도는 수렴하였고 내부 뿐만 아니라 경

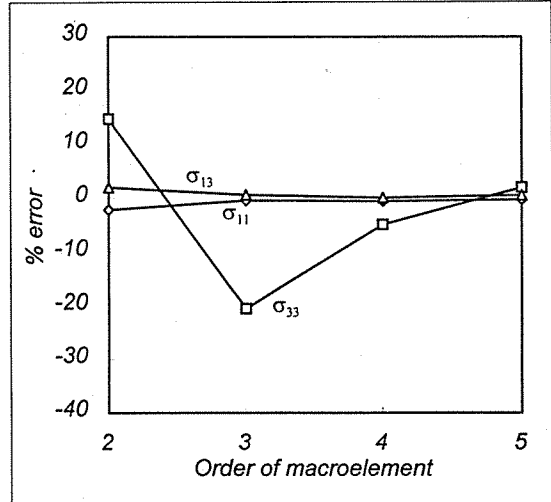


Fig. 9. Convergence of maximum stresses for warp tows of a symmetric plain weave unit cell under a uniaxial tension loading in the x-direction

계 주위에서도 정확한 분포를 가짐을 알 수 있었다.

그림 9는 마크로요소의 차수가 증가함에 따라 후처리에 의해 계산된 응력의 오차의 수렴도는 경사에서 발생하는 최대응력의 퍼센트 오차를 잘 나타내고 있다. 일방향 인장하중을 받고 있는 평직 복합재료의 경사에서 σ_{11} 와 σ_{33} , 그리고 σ_{13} 가 주요 응력이므로 이들 응력의 수렴도가 추적되었다. 그림에서 보는 바와 같이 최대 응력에 대한 오차는 마크로요소의 차수가 증가함에 따라 빠른 속도로 수렴하였다. 5차 마크로요소가 사용되었을 때 발생한 최대오차는 허용될 수 있는 범위 내로 1.1%에 불과 하였다.

그림 9에서 후처리기에 의한 경사의 최대응력 σ_{11} 은 낮은 차수에서도 상당히 정확한 값을 가지고 있는데 반하여 최대응력 σ_{13} 는 그렇지 않음을 볼 수 있다. 이것은 최대응력이 어느 지역에서 발생하였는가에 달려 있는 것으로 생각된다. 그림8(a)에서 화살표는 각 응력별로 최대값이 발생한 곳을 표시하고 있다. 외부로 감싸고 있는 선은 마크로요소와 서브 메쉬의 경계를 나타낸다. 현재의 서브 메쉬 모델링에 의하면 최대 응력 σ_{11} 은 항상 서브 메쉬의 한 가운데 지역에서 발생하였고 최대응력 σ_{33} 은 꼭지점에서, 그리고 최대응력 σ_{13} 은 옆 경계면에 발생하게 된다. 최대응력 σ_{11} 이 발생한 지역이 경계 자유도 변위가 보간된 경계면에서 멀리 떨어져 있으므로 응력에 대한 오차는 매우 작게 되는 것으로 보인다. 반면에 3개의 경계면과 접촉하고 있는 꼭지점 지역에서 발생

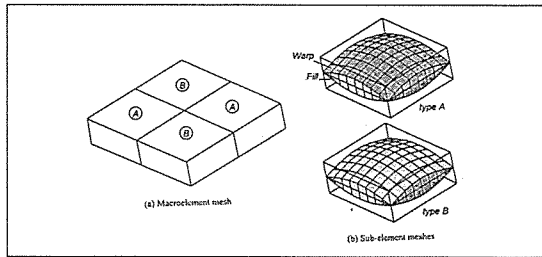


Fig. 10. Macroelement and sub-element meshes for a '1/2' symmetric plain weave unit cell. Circled letters in the macroelement mesh indicate macroelement types. Elements for resin in the sub-element meshes were removed to show tow architecture

한 최대응력 σ_{33} 에 대한 오차는 저차 매크로요소를 사용하였을 때 그 오차가 작지 않게 되는 것이다.

다른 가능성을 고려하기 위하여 최대응력 σ_{11} 이 발생하는 지역이 경계면에 위치하도록 매크로요소와 서브 메쉬를 모델링하여 계산을 수행하였다. 그림 10은 대칭 적층된 평직 복합재료 '1/2' 단위구조에 대하여 4개의 매크로요소로 된 전역 메쉬와 서브 메쉬들을 보여주고 있다. 평직 복합재료를 이렇게 모델링하면 x-방향과 y-방향의 대칭성은 사라지게 되므로 반복경계조건을 가하고 z-방향으로만 대칭 경계조건을 가하였다. 원내의 번호는 서브 메쉬의 종류를 나타낸다.

그림 11은 그림 10의 형상에 대하여 후처리기로 국지 응력을 계산한 결과 최대응력들의 수렴도를 나타내고 있다. 최대응력 σ_{11} 은 경계면에서 발생하였으므로 수렴속도는 빠르지 않음을 보이고 있다. 최대응력 σ_{33} 의 경우 비록 윗 경계면 지역에서 발생하고 있으나 단 하나의 경계면에만 인접하므로 작은 오차가 발생하였다. 두 응력 모두 매크로요소의 차수가 증가함에 따라서 오차는 작아지는 경향을 보였다. 이것은 후처리기가 국지 응력 분포를 어느 정도 정확히 계산해 낼 수 있음을 보여준다.

개발된 후처리기의 유용성을 보여주기 위하여 대칭 적층된 5-매 주자직 복합재료 형상에 대한 국지 응력 해석이 수행되었다. 그림 12는 '1/2' 대칭 단위구조에 대한 매크로요소 메쉬와 서브 메쉬를 나타내고 있다. 5-매 주자직 복합재료의 단위구조는 25개의 매크로요소로 모델되었으며 원 내의 번호는 서브 메쉬의 종류를 표시하고 있다. 이 형상에 x-방향으로 일방향 하중이 가하여 졌으며 단위구조의 외곽면에는 반복 경계조건이 부가되었다. 본 형상에 대하여 일방향 하중부하시 발생하는 y-방향 및 z-방향의 포아송 수축량을 구하기

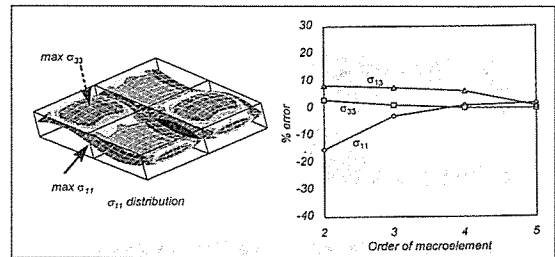


Fig. 11. Convergence of maximum stresses for warp tows by post-processing of multi-field macroelements with changed sub-element modeling

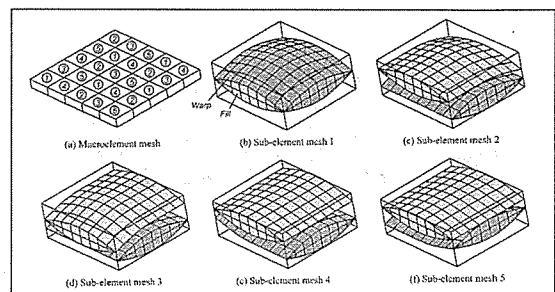


Fig. 12. Macroelement and sub-element meshes for a '1/2' symmetric 5-harness satin weave unit cell. Elements for resin were removed to show tow architecture

위하여 먼저 단위구조해석을 수행하여 포아송 비를 계산하였다.

그림 13은 5-매 주자직 복합재료의 국지 응력 계산을 위한 블록별 후처리기법을 보여주고 있다. 본 계산은 5차 매크로요소를 사용하여 수행되었다. 먼저 전역 해석이 수행된 후 각 매크로요소에 대하여 선택적으로 국지 응력이 후처리에 의해 계산되었다. 이는 그림에서 진하게 칠하여진 지역에 있는 매크로요소들로서 계산된 국지 응력은 이 지역에 대하여 합하여 졌다. 이 형상에 대하여 전통적인 유한요소해석을 수행한다면 상당한 량의 기억용량과 계산시간이 소요되었을 것임을 감안한다면, 본 계산은 후처리기가 직물 복합재료의 상세 응력해석에 효율적인 도구가 될 수 있음을 잘 설명하고 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 다중 변위장 매크로요소를 확장하여 직물 복합재료의 상세 응력해석을 위한 후처리기가 개

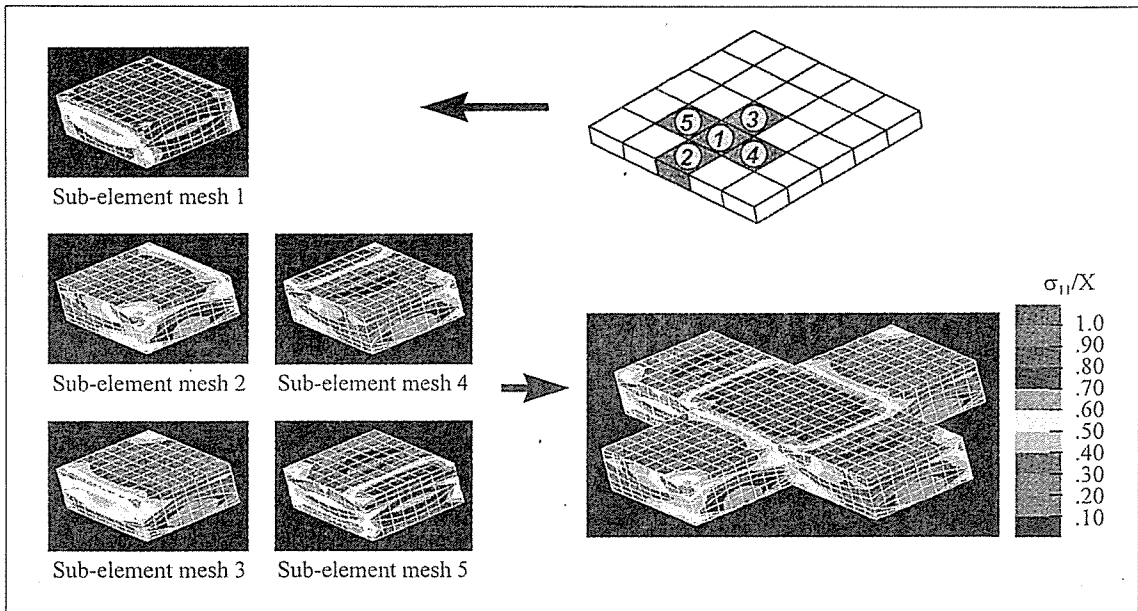


Fig. 13. Block-wise post-processing

발되었다. 매크로요소에서 내부 미세구조를 모델하기 위하여 사용되었던 서브 메쉬가 국지 응력을 계산하는데 다시 사용되었다. 후처리기의 성능을 평가하기 위하여 대칭적응된 평직 복합재료 '1/8' 단위구조에 대하여 응력해석이 수행되었다. 또한 계산결과의 정확도와 매크로요소의 경계와의 위치적 관련성을 조사하기 위하여 대칭적응된 평직 복합재료 '1/2' 단위구조가 고려되었다. 후처리에 의한 응력결과는 전통적인 유한요소 해석의 결과와 비교하여 정확도를 평가하였다.

계산결과 매크로요소의 후처리는 직물복합재료의 상세 응력해석에 효과적으로 사용될 수 있는 도구가 될 수 있음을 알 수 있었다. 후처리기는 평직 복합재료의 미세구조에서의 국지 응력을 타당한 정확도를 가지고 계산해 낼 수 있었다. 또한 저차의 매크로요소 사용시 경계면 주변에서 발생한 오차는 차수가 증가함에 따라서 감소하였다. 한편 후처리기의 유용성은 5-매주자직 복합재료의 해석을 통하여 입증되었다. 본 연구에서 전역 변위는 매크로요소의 모양함수를 통하여 서브 메쉬로 전달되었는데 보다 정확한 경계면 응력의 계산을 위하여 향상된 변위 전달 방식에 대한 연구가 차후에 필요한 것으로 판단되었다.

후 기

이 논문은 1997년 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

- 1) Ko, F. K. and Gu, G.-W., "Processing of textile preforms," In Advanced Composites Manufacturing, Ed. T. G. Gutowski, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1997, pp. 157-205.
- 2) Byun, J.-H. and Chou, T.-W., "Modeling and characterization of textile structural composites: A review, Journal of Strain Analysis," Vol. 24, 1989, pp. 253-262.
- 3) Middleton, D. H., Case histories, In Composite Materials in Aircraft Structures, Longman Science and Technical, Essex, England, 1990, pp. 228-390.
- 4) Whitcomb, J. D., "Three-dimensional stress analysis of plain weave composites. In Composite Materials: Fatigue and Fracture," ASTM STP

1110, ed. T. K. O'Brien. American Society for Testing and Materials, 1991, pp. 417-438.

5) Blackketter, D. M., Walrath, D. E. and Hansen, A. C., "Modeling damage in a plain weave fabric reinforced composites materials," Journal of Composites Technology and Research, Vol. 15, 1993, pp. 136-142.

6) Whitcomb, J. D. and Sriengan K., "Effect of various approximations on predicted progressive failure on plain weave composites," Composite Structures, Vol. 34, 1996, pp. 13-20.

7) Dasgupta, A., Agarwal, R. K. and Bhandarkar, S. M., "Three-dimensional modeling of woven-fabric composites for effective thermomechanical and thermal properties," Composites Science and Technology, Vol. 56, 1996, pp. 209-223.

8) Chapman, C. and Whitcomb, J. D., "Effect of assumed tow architecture on predicted moduli and stresses in plain weave composites," Journal of Composite Materials, Vol. 29, 1995, pp. 2134-2159.

9) Woo, K. and Whitcomb, J. D., "Effects of fiber tow misalignment on the engineering properties of plain weave textile composites," Composite Structures, Vol. 37, 1997, pp. 343-355.

10) Whitcomb, J. D., Kondagunta, G. and Woo, K., "Boundary effects in woven composites," Journal of Composite Materials," Vol. 29, 1995, pp. 507-524.

11) Chapman, C., Prediction of moduli and strength of woven carbon-carbon composites using object-oriented finite element analysis, PhD Dissertation, Texas AandM University, College Station, Texas, 1997.

12) Foye, R. L., Finite element analysis of the stiffness of fabric reinforced composites, NASA Contractor Report 189572, Contract NAS1-19000, 1992.

13) Woo, K. and Whitcomb, J. D., "Macro finite element using subdomain integration, Communications in Numerical Methods in Engineering," Vol. 9, 1993, pp.937-949.

14) Whitcomb, J. D. and Woo, K., "Enhanced direct stiffness method for finite element analysis of textile composites, Composite Structures," Vol. 28, 1994, pp. 385-390.

15) Woo, K and Whitcomb, J. D., "Three-dimensional failure analysis of plain weave textile composites using a global/local finite element method," Journal of Composite Materials, Vol. 30, 1996, pp. 984-1003.

16) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., The Finite Element Method, 4th ed, Volume 1: Basic Formulation and Linear Problems, McGraw-Hill Book Company, London, 1989.

17) Jones, R. M., Mechanics of Composite Materials, Scripta Book Company, Washington D.C., 1975.

18) Avery, W. B. and Herakovich, C. T., A study on the mechanical behavior of a 2D carbon-carbon composite, Interim Report 66, VPI and SU, 1987.

부 록

제 5차 다중 변위장 매크로요소의 기본 단항식 :

$$\{1, \xi, \eta, \zeta, \xi^2, \eta^2, \zeta^2, \xi\eta, \xi\zeta, \eta\zeta, \xi^3, \eta^3, \zeta^3, \xi^2\eta, \xi^2\zeta, \eta^2\zeta, \xi\eta^2, \xi\zeta^2, \eta\zeta^2, \xi^3\eta, \xi^3\zeta, \eta^3\zeta, \xi^2\eta^2, \xi^2\eta\zeta, \xi^2\zeta^2, \eta^2\zeta^2, \xi\eta^3, \xi\eta^2\zeta, \xi\eta\zeta^2, \xi^3\eta^2, \xi^3\eta\zeta, \xi^3\zeta^2, \eta^3\zeta^2, \xi^4, \eta^4, \zeta^4, \xi^4\eta, \xi^4\zeta, \eta^4\zeta, \xi^5, \eta^5, \zeta^5, \xi^5\eta, \xi^5\zeta, \eta^5\zeta, \xi^6, \eta^6, \zeta^6, \xi^6\eta, \xi^6\zeta, \eta^6\zeta, \xi^7, \eta^7, \zeta^7, \xi^7\eta, \xi^7\zeta, \eta^7\zeta, \xi^8, \eta^8, \zeta^8, \xi^8\eta, \xi^8\zeta, \eta^8\zeta, \xi^9, \eta^9, \zeta^9, \xi^9\eta, \xi^9\zeta, \eta^9\zeta, \xi^{10}, \eta^{10}, \zeta^{10}, \xi^{10}\eta, \xi^{10}\zeta, \eta^{10}\zeta, \xi^{11}, \eta^{11}, \zeta^{11}, \xi^{11}\eta, \xi^{11}\zeta, \eta^{11}\zeta, \xi^{12}, \eta^{12}, \zeta^{12}, \xi^{12}\eta, \xi^{12}\zeta, \eta^{12}\zeta, \xi^{13}, \eta^{13}, \zeta^{13}, \xi^{13}\eta, \xi^{13}\zeta, \eta^{13}\zeta, \xi^{14}, \eta^{14}, \zeta^{14}, \xi^{14}\eta, \xi^{14}\zeta, \eta^{14}\zeta, \xi^{15}, \eta^{15}, \zeta^{15}, \xi^{15}\eta, \xi^{15}\zeta, \eta^{15}\zeta, \xi^{16}, \eta^{16}, \zeta^{16}, \xi^{16}\eta, \xi^{16}\zeta, \eta^{16}\zeta, \xi^{17}, \eta^{17}, \zeta^{17}, \xi^{17}\eta, \xi^{17}\zeta, \eta^{17}\zeta, \xi^{18}, \eta^{18}, \zeta^{18}, \xi^{18}\eta, \xi^{18}\zeta, \eta^{18}\zeta, \xi^{19}, \eta^{19}, \zeta^{19}, \xi^{19}\eta, \xi^{19}\zeta, \eta^{19}\zeta, \xi^{20}, \eta^{20}, \zeta^{20}, \xi^{20}\eta, \xi^{20}\zeta, \eta^{20}\zeta, \xi^{21}, \eta^{21}, \zeta^{21}, \xi^{21}\eta, \xi^{21}\zeta, \eta^{21}\zeta, \xi^{22}, \eta^{22}, \zeta^{22}, \xi^{22}\eta, \xi^{22}\zeta, \eta^{22}\zeta, \xi^{23}, \eta^{23}, \zeta^{23}, \xi^{23}\eta, \xi^{23}\zeta, \eta^{23}\zeta, \xi^{24}, \eta^{24}, \zeta^{24}, \xi^{24}\eta, \xi^{24}\zeta, \eta^{24}\zeta, \xi^{25}, \eta^{25}, \zeta^{25}, \xi^{25}\eta, \xi^{25}\zeta, \eta^{25}\zeta, \xi^{26}, \eta^{26}, \zeta^{26}, \xi^{26}\eta, \xi^{26}\zeta, \eta^{26}\zeta, \xi^{27}, \eta^{27}, \zeta^{27}, \xi^{27}\eta, \xi^{27}\zeta, \eta^{27}\zeta, \xi^{28}, \eta^{28}, \zeta^{28}, \xi^{28}\eta, \xi^{28}\zeta, \eta^{28}\zeta, \xi^{29}, \eta^{29}, \zeta^{29}, \xi^{29}\eta, \xi^{29}\zeta, \eta^{29}\zeta, \xi^{30}, \eta^{30}, \zeta^{30}, \xi^{30}\eta, \xi^{30}\zeta, \eta^{30}\zeta, \xi^{31}, \eta^{31}, \zeta^{31}, \xi^{31}\eta, \xi^{31}\zeta, \eta^{31}\zeta, \xi^{32}, \eta^{32}, \zeta^{32}, \xi^{32}\eta, \xi^{32}\zeta, \eta^{32}\zeta, \xi^{33}, \eta^{33}, \zeta^{33}, \xi^{33}\eta, \xi^{33}\zeta, \eta^{33}\zeta, \xi^{34}, \eta^{34}, \zeta^{34}, \xi^{34}\eta, \xi^{34}\zeta, \eta^{34}\zeta, \xi^{35}, \eta^{35}, \zeta^{35}, \xi^{35}\eta, \xi^{35}\zeta, \eta^{35}\zeta, \xi^{36}, \eta^{36}, \zeta^{36}, \xi^{36}\eta, \xi^{36}\zeta, \eta^{36}\zeta, \xi^{37}, \eta^{37}, \zeta^{37}, \xi^{37}\eta, \xi^{37}\zeta, \eta^{37}\zeta, \xi^{38}, \eta^{38}, \zeta^{38}, \xi^{38}\eta, \xi^{38}\zeta, \eta^{38}\zeta, \xi^{39}, \eta^{39}, \zeta^{39}, \xi^{39}\eta, \xi^{39}\zeta, \eta^{39}\zeta, \xi^{40}, \eta^{40}, \zeta^{40}, \xi^{40}\eta, \xi^{40}\zeta, \eta^{40}\zeta, \xi^{41}, \eta^{41}, \zeta^{41}, \xi^{41}\eta, \xi^{41}\zeta, \eta^{41}\zeta, \xi^{42}, \eta^{42}, \zeta^{42}, \xi^{42}\eta, \xi^{42}\zeta, \eta^{42}\zeta, \xi^{43}, \eta^{43}, \zeta^{43}, \xi^{43}\eta, \xi^{43}\zeta, \eta^{43}\zeta, \xi^{44}, \eta^{44}, \zeta^{44}, \xi^{44}\eta, \xi^{44}\zeta, \eta^{44}\zeta, \xi^{45}, \eta^{45}, \zeta^{45}, \xi^{45}\eta, \xi^{45}\zeta, \eta^{45}\zeta, \xi^{46}, \eta^{46}, \zeta^{46}, \xi^{46}\eta, \xi^{46}\zeta, \eta^{46}\zeta, \xi^{47}, \eta^{47}, \zeta^{47}, \xi^{47}\eta, \xi^{47}\zeta, \eta^{47}\zeta, \xi^{48}, \eta^{48}, \zeta^{48}, \xi^{48}\eta, \xi^{48}\zeta, \eta^{48}\zeta, \xi^{49}, \eta^{49}, \zeta^{49}, \xi^{49}\eta, \xi^{49}\zeta, \eta^{49}\zeta, \xi^{50}, \eta^{50}, \zeta^{50}, \xi^{50}\eta, \xi^{50}\zeta, \eta^{50}\zeta, \xi^{51}, \eta^{51}, \zeta^{51}, \xi^{51}\eta, \xi^{51}\zeta, \eta^{51}\zeta, \xi^{52}, \eta^{52}, \zeta^{52}, \xi^{52}\eta, \xi^{52}\zeta, \eta^{52}\zeta, \xi^{53}, \eta^{53}, \zeta^{53}, \xi^{53}\eta, \xi^{53}\zeta, \eta^{53}\zeta, \xi^{54}, \eta^{54}, \zeta^{54}, \xi^{54}\eta, \xi^{54}\zeta, \eta^{54}\zeta, \xi^{55}, \eta^{55}, \zeta^{55}, \xi^{55}\eta, \xi^{55}\zeta, \eta^{55}\zeta, \xi^{56}, \eta^{56}, \zeta^{56}, \xi^{56}\eta, \xi^{56}\zeta, \eta^{56}\zeta, \xi^{57}, \eta^{57}, \zeta^{57}, \xi^{57}\eta, \xi^{57}\zeta, \eta^{57}\zeta, \xi^{58}, \eta^{58}, \zeta^{58}, \xi^{58}\eta, \xi^{58}\zeta, \eta^{58}\zeta, \xi^{59}, \eta^{59}, \zeta^{59}, \xi^{59}\eta, \xi^{59}\zeta, \eta^{59}\zeta, \xi^{60}, \eta^{60}, \zeta^{60}, \xi^{60}\eta, \xi^{60}\zeta, \eta^{60}\zeta, \xi^{61}, \eta^{61}, \zeta^{61}, \xi^{61}\eta, \xi^{61}\zeta, \eta^{61}\zeta, \xi^{62}, \eta^{62}, \zeta^{62}, \xi^{62}\eta, \xi^{62}\zeta, \eta^{62}\zeta, \xi^{63}, \eta^{63}, \zeta^{63}, \xi^{63}\eta, \xi^{63}\zeta, \eta^{63}\zeta, \xi^{64}, \eta^{64}, \zeta^{64}, \xi^{64}\eta, \xi^{64}\zeta, \eta^{64}\zeta, \xi^{65}, \eta^{65}, \zeta^{65}, \xi^{65}\eta, \xi^{65}\zeta, \eta^{65}\zeta, \xi^{66}, \eta^{66}, \zeta^{66}, \xi^{66}\eta, \xi^{66}\zeta, \eta^{66}\zeta, \xi^{67}, \eta^{67}, \zeta^{67}, \xi^{67}\eta, \xi^{67}\zeta, \eta^{67}\zeta, \xi^{68}, \eta^{68}, \zeta^{68}, \xi^{68}\eta, \xi^{68}\zeta, \eta^{68}\zeta, \xi^{69}, \eta^{69}, \zeta^{69}, \xi^{69}\eta, \xi^{69}\zeta, \eta^{69}\zeta, \xi^{70}, \eta^{70}, \zeta^{70}, \xi^{70}\eta, \xi^{70}\zeta, \eta^{70}\zeta, \xi^{71}, \eta^{71}, \zeta^{71}, \xi^{71}\eta, \xi^{71}\zeta, \eta^{71}\zeta, \xi^{72}, \eta^{72}, \zeta^{72}, \xi^{72}\eta, \xi^{72}\zeta, \eta^{72}\zeta, \xi^{73}, \eta^{73}, \zeta^{73}, \xi^{73}\eta, \xi^{73}\zeta, \eta^{73}\zeta, \xi^{74}, \eta^{74}, \zeta^{74}, \xi^{74}\eta, \xi^{74}\zeta, \eta^{74}\zeta, \xi^{75}, \eta^{75}, \zeta^{75}, \xi^{75}\eta, \xi^{75}\zeta, \eta^{75}\zeta, \xi^{76}, \eta^{76}, \zeta^{76}, \xi^{76}\eta, \xi^{76}\zeta, \eta^{76}\zeta, \xi^{77}, \eta^{77}, \zeta^{77}, \xi^{77}\eta, \xi^{77}\zeta, \eta^{77}\zeta, \xi^{78}, \eta^{78}, \zeta^{78}, \xi^{78}\eta, \xi^{78}\zeta, \eta^{78}\zeta, \xi^{79}, \eta^{79}, \zeta^{79}, \xi^{79}\eta, \xi^{79}\zeta, \eta^{79}\zeta, \xi^{80}, \eta^{80}, \zeta^{80}, \xi^{80}\eta, \xi^{80}\zeta, \eta^{80}\zeta, \xi^{81}, \eta^{81}, \zeta^{81}, \xi^{81}\eta, \xi^{81}\zeta, \eta^{81}\zeta, \xi^{82}, \eta^{82}, \zeta^{82}, \xi^{82}\eta, \xi^{82}\zeta, \eta^{82}\zeta, \xi^{83}, \eta^{83}, \zeta^{83}, \xi^{83}\eta, \xi^{83}\zeta, \eta^{83}\zeta, \xi^{84}, \eta^{84}, \zeta^{84}, \xi^{84}\eta, \xi^{84}\zeta, \eta^{84}\zeta, \xi^{85}, \eta^{85}, \zeta^{85}, \xi^{85}\eta, \xi^{85}\zeta, \eta^{85}\zeta, \xi^{86}, \eta^{86}, \zeta^{86}, \xi^{86}\eta, \xi^{86}\zeta, \eta^{86}\zeta, \xi^{87}, \eta^{87}, \zeta^{87}, \xi^{87}\eta, \xi^{87}\zeta, \eta^{87}\zeta, \xi^{88}, \eta^{88}, \zeta^{88}, \xi^{88}\eta, \xi^{88}\zeta, \eta^{88}\zeta, \xi^{89}, \eta^{89}, \zeta^{89}, \xi^{89}\eta, \xi^{89}\zeta, \eta^{89}\zeta, \xi^{90}, \eta^{90}, \zeta^{90}, \xi^{90}\eta, \xi^{90}\zeta, \eta^{90}\zeta, \xi^{91}, \eta^{91}, \zeta^{91}, \xi^{91}\eta, \xi^{91}\zeta, \eta^{91}\zeta, \xi^{92}, \eta^{92}, \zeta^{92}, \xi^{92}\eta, \xi^{92}\zeta, \eta^{92}\zeta, \xi^{93}, \eta^{93}, \zeta^{93}, \xi^{93}\eta, \xi^{93}\zeta, \eta^{93}\zeta, \xi^{94}, \eta^{94}, \zeta^{94}, \xi^{94}\eta, \xi^{94}\zeta, \eta^{94}\zeta, \xi^{95}, \eta^{95}, \zeta^{95}, \xi^{95}\eta, \xi^{95}\zeta, \eta^{95}\zeta, \xi^{96}, \eta^{96}, \zeta^{96}, \xi^{96}\eta, \xi^{96}\zeta, \eta^{96}\zeta, \xi^{97}, \eta^{97}, \zeta^{97}, \xi^{97}\eta, \xi^{97}\zeta, \eta^{97}\zeta, \xi^{98}, \eta^{98}, \zeta^{98}, \xi^{98}\eta, \xi^{98}\zeta, \eta^{98}\zeta, \xi^{99}, \eta^{99}, \zeta^{99}, \xi^{99}\eta, \xi^{99}\zeta, \eta^{99}\zeta, \xi^{100}, \eta^{100}, \zeta^{100}, \xi^{100}\eta, \xi^{100}\zeta, \eta^{100}\zeta, \xi^{101}, \eta^{101}, \zeta^{101}, \xi^{101}\eta, \xi^{101}\zeta, \eta^{101}\zeta, \xi^{102}, \eta^{102}, \zeta^{102}, \xi^{102}\eta, \xi^{102}\zeta, \eta^{102}\zeta, \xi^{103}, \eta^{103}, \zeta^{103}, \xi^{103}\eta, \xi^{103}\zeta, \eta^{103}\zeta, \xi^{104}, \eta^{104}, \zeta^{104}, \xi^{104}\eta, \xi^{104}\zeta, \eta^{104}\zeta, \xi^{105}, \eta^{105}, \zeta^{105}, \xi^{105}\eta, \xi^{105}\zeta, \eta^{105}\zeta, \xi^{106}, \eta^{106}, \zeta^{106}, \xi^{106}\eta, \xi^{106}\zeta, \eta^{106}\zeta, \xi^{107}, \eta^{107}, \zeta^{107}, \xi^{107}\eta, \xi^{107}\zeta, \eta^{107}\zeta, \xi^{108}, \eta^{108}, \zeta^{108}, \xi^{108}\eta, \xi^{108}\zeta, \eta^{108}\zeta, \xi^{109}, \eta^{109}, \zeta^{109}, \xi^{109}\eta, \xi^{109}\zeta, \eta^{109}\zeta, \xi^{110}, \eta^{110}, \zeta^{110}, \xi^{110}\eta, \xi^{110}\zeta, \eta^{110}\zeta, \xi^{111}, \eta^{111}, \zeta^{111}, \xi^{111}\eta, \xi^{111}\zeta, \eta^{111}\zeta, \xi^{112}, \eta^{112}, \zeta^{112}, \xi^{112}\eta, \xi^{112}\zeta, \eta^{112}\zeta, \xi^{113}, \eta^{113}, \zeta^{113}, \xi^{113}\eta, \xi^{113}\zeta, \eta^{113}\zeta, \xi^{114}, \eta^{114}, \zeta^{114}, \xi^{114}\eta, \xi^{114}\zeta, \eta^{114}\zeta, \xi^{115}, \eta^{115}, \zeta^{115}, \xi^{115}\eta, \xi^{115}\zeta, \eta^{115}\zeta, \xi^{116}, \eta^{116}, \zeta^{116}, \xi^{116}\eta, \xi^{116}\zeta, \eta^{116}\zeta, \xi^{117}, \eta^{117}, \zeta^{117}, \xi^{117}\eta, \xi^{117}\zeta, \eta^{117}\zeta, \xi^{118}, \eta^{118}, \zeta^{118}, \xi^{118}\eta, \xi^{118}\zeta, \eta^{118}\zeta, \xi^{119}, \eta^{119}, \zeta^{119}, \xi^{119}\eta, \xi^{119}\zeta, \eta^{119}\zeta, \xi^{120}, \eta^{120}, \zeta^{120}, \xi^{120}\eta, \xi^{120}\zeta, \eta^{120}\zeta, \xi^{121}, \eta^{121}, \zeta^{121}, \xi^{121}\eta, \xi^{121}\zeta, \eta^{121}\zeta, \xi^{122}, \eta^{122}, \zeta^{122}, \xi^{122}\eta, \xi^{122}\zeta, \eta^{122}\zeta, \xi^{123}, \eta^{123}, \zeta^{123}, \xi^{123}\eta, \xi^{123}\zeta, \eta^{123}\zeta, \xi^{124}, \eta^{124}, \zeta^{124}, \xi^{124}\eta, \xi^{124}\zeta, \eta^{124}\zeta, \xi^{125}, \eta^{125}, \zeta^{125}, \xi^{125}\eta, \xi^{125}\zeta, \eta^{125}\zeta, \xi^{126}, \eta^{126}, \zeta^{126}, \xi^{126}\eta, \xi^{126}\zeta, \eta^{126}\zeta, \xi^{127}, \eta^{127}, \zeta^{127}, \xi^{127}\eta, \xi^{127}\zeta, \eta^{127}\zeta, \xi^{128}, \eta^{128}, \zeta^{128}, \xi^{128}\eta, \xi^{128}\zeta, \eta^{128}\zeta, \xi^{129}, \eta^{129}, \zeta^{129}, \xi^{129}\eta, \xi^{129}\zeta, \eta^{129}\zeta, \xi^{130}, \eta^{130}, \zeta^{130}, \xi^{130}\eta, \xi^{130}\zeta, \eta^{130}\zeta, \xi^{131}, \eta^{131}, \zeta^{131}, \xi^{131}\eta, \xi^{131}\zeta, \eta^{131}\zeta, \xi^{132}, \eta^{132}, \zeta^{132}, \xi^{132}\eta, \xi^{132}\zeta, \eta^{132}\zeta, \xi^{133}, \eta^{133}, \zeta^{133}, \xi^{133}\eta, \xi^{133}\zeta, \eta^{133}\zeta, \xi^{134}, \eta^{134}, \zeta^{134}, \xi^{134}\eta, \xi^{134}\zeta, \eta^{134}\zeta, \xi^{135}, \eta^{135}, \zeta^{135}, \xi^{135}\eta, \xi^{135}\zeta, \eta^{135}\zeta, \xi^{136}, \eta^{136}, \zeta^{136}, \xi^{136}\eta, \xi^{136}\zeta, \eta^{136}\zeta, \xi^{137}, \eta^{137}, \zeta^{137}, \xi^{137}\eta, \xi^{137}\zeta, \eta^{137}\zeta, \xi^{138}, \eta^{138}, \zeta^{138}, \xi^{138}\eta, \xi^{138}\zeta, \eta^{138}\zeta, \xi^{139}, \eta^{139}, \zeta^{139}, \xi^{139}\eta, \xi^{139}\zeta, \eta^{139}\zeta, \xi^{140}, \eta^{140}, \zeta^{140}, \xi^{140}\eta, \xi^{140}\zeta, \eta^{140}\zeta, \xi^{141}, \eta^{141}, \zeta^{141}, \xi^{141}\eta, \xi^{141}\zeta, \eta^{141}\zeta, \xi^{142}, \eta^{142}, \zeta^{142}, \xi^{142}\eta, \xi^{142}\zeta, \eta^{142}\zeta, \xi^{143}, \eta^{143}, \zeta^{143}, \xi^{143}\eta, \xi^{143}\zeta, \eta^{143}\zeta, \xi^{144}, \eta^{144}, \zeta^{144}, \xi^{144}\eta, \xi^{144}\zeta, \eta^{144}\zeta, \xi^{145}, \eta^{145}, \zeta^{145}, \xi^{145}\eta, \xi^{145}\zeta, \eta^{145}\zeta, \xi^{146}, \eta^{146}, \zeta^{146}, \xi^{146}\eta, \xi^{146}\zeta, \eta^{146}\zeta, \xi^{147}, \eta^{147}, \zeta^{147}, \xi^{147}\eta, \xi^{147}\zeta, \eta^{147}\zeta, \xi^{148}, \eta^{148}, \zeta^{148}, \xi^{148}\eta, \xi^{148}\zeta, \eta^{148}\zeta, \xi^{149}, \eta^{149}, \zeta^{149}, \xi^{149}\eta, \xi^{149}\zeta, \eta^{149}\zeta, \xi^{150}, \eta^{150}, \zeta^{150}, \xi^{150}\eta, \xi^{150}\zeta, \eta^{150}\zeta, \xi^{151}, \eta^{151}, \zeta^{151}, \xi^{151}\eta, \xi^{151}\zeta, \eta^{151}\zeta, \xi^{152}, \eta^{152}, \zeta^{152}, \xi^{152}\eta, \xi^{152}\zeta, \eta^{152}\zeta, \xi^{153}, \eta^{153}, \zeta^{153}, \xi^{153}\eta, \xi^{153}\zeta, \eta^{153}\zeta, \xi^{154}, \eta^{154}, \zeta^{154}, \xi^{154}\eta, \xi^{154}\zeta, \eta^{154}\zeta, \xi^{155}, \eta^{155}, \zeta^{155}, \xi^{155}\eta, \xi^{155}\zeta, \eta^{155}\zeta, \xi^{156}, \eta^{156}, \zeta^{156}, \xi^{156}\eta, \xi^{156}\zeta, \eta^{156}\zeta, \xi^{157}, \eta^{157}, \zeta^{157}, \xi^{157}\eta, \xi^{157}\zeta, \eta^{157}\zeta, \xi^{158}, \eta^{158}, \zeta^{158}, \xi^{158}\eta, \xi^{158}\zeta, \eta^{158}\zeta, \xi^{159}, \eta^{159}, \zeta^{159}, \xi^{159}\eta, \xi^{159}\zeta, \eta^{159}\zeta, \xi^{160}, \eta^{160}, \zeta^{160}, \xi^{160}\eta, \xi^{160}\zeta, \eta^{160}\zeta, \xi^{161}, \eta^{161}, \zeta^{161}, \xi^{161}\eta, \xi^{161}\zeta, \eta^{161}\zeta, \xi^{162}, \eta^{162}, \zeta^{162}, \xi^{162}\eta, \xi^{162}\zeta, \eta^{162}\zeta, \xi^{163}, \eta^{163}, \zeta^{163}, \xi^{163}\eta, \xi^{163}\zeta, \eta^{163}\zeta, \xi^{164}, \eta^{164}, \zeta^{164}, \xi^{164}\eta, \xi^{164}\zeta, \eta^{164}\zeta, \xi^{165}, \eta^{165}, \zeta^{165}, \xi^{165}\eta, \xi^{165}\zeta, \eta^{165}\zeta, \xi^{166}, \eta^{166}, \zeta^{166}, \xi^{166}\eta, \xi^{166}\zeta, \eta^{166}\zeta, \xi^{167}, \eta^{167}, \zeta^{167}, \xi^{167}\eta, \xi^{167}\zeta, \eta^{167}\zeta, \xi^{168}, \eta^{168}, \zeta^{168}, \xi^{168}\eta, \xi^{168}\zeta, \eta^{168}\zeta, \xi^{169}, \eta^{169}, \zeta^{169}, \xi^{169}\eta, \xi^{169}\zeta, \eta^{169}\zeta, \xi^{170}, \eta^{170}, \zeta^{170}, \xi^{170}\eta, \xi^{170}\zeta, \eta^{170}\zeta, \xi^{171}, \eta^{171}, \zeta^{171}, \xi^{171}\eta, \xi^{171}\zeta, \eta^{171}\zeta, \xi^{172}, \eta^{172}, \zeta^{172}, \xi^{172}\eta, \xi^{172}\zeta, \eta^{172}\zeta, \xi^{173}, \eta^{173}, \zeta^{173}, \xi^{173}\eta, \xi^{173}\zeta, \eta^{173}\zeta, \xi^{174}, \eta^{174}, \zeta^{174}, \xi^{174}\eta, \xi^{174}\zeta, \eta^{174}\zeta, \xi^{175}, \eta^{175}, \zeta^{175}, \xi^{175}\eta, \xi^{175}\zeta, \eta^{175}\zeta, \xi^{176}, \eta^{176}, \zeta^{176}, \xi^{176}\eta, \xi^{176}\zeta, \eta^{176}\zeta, \xi^{177}, \eta^{177}, \zeta^{177}, \xi^{177}\eta, \xi^{177}\zeta, \eta^{177}\zeta, \xi^{178}, \eta^{178}, \zeta^{178}, \xi^{178}\eta, \xi^{178}\zeta, \eta^{178}\zeta, \xi^{179}, \eta^{179}, \zeta^{179}, \xi^{179}\eta, \xi^{179}\zeta, \eta^{179}\zeta, \xi^{180}, \eta^{180}, \zeta^{180}, \xi^{180}\eta, \xi^{180}\zeta, \eta^{180}\zeta, \xi^{181}, \eta^{181}, \zeta^{181}, \xi^{181}\eta, \xi^{181}\zeta, \eta^{181}\zeta, \xi^{182}, \eta^{182}, \zeta^{182}, \xi^{182}\eta, \xi^{182}\zeta, \eta^{182}\zeta, \xi^{183}, \eta^{183}, \zeta^{183}, \xi^{183}\eta, \xi^{183}\zeta, \eta^{183}\zeta, \xi^{184}, \eta^{184}, \zeta^{184}, \xi^{184}\eta, \xi^{184}\zeta, \eta^{184}\zeta, \xi^{185}, \eta^{185}, \zeta^{185}, \xi^{185}\eta, \xi^{185}\zeta, \eta^{185}\zeta, \xi^{186}, \eta^{186}, \zeta^{186}, \xi^{186}\eta, \xi^{186}\zeta, \eta^{186}\zeta, \xi^{187}, \eta^{187}, \zeta^{187}, \xi^{187}\eta, \xi^{187}\zeta, \eta^{187}\zeta, \xi^{188}, \eta^{188}, \zeta^{188}, \xi^{188}\eta, \xi^{188}\zeta, \eta^{188}\zeta, \xi^{189}, \eta^{189}, \zeta^{189}, \xi^{189}\eta, \xi^{189}\zeta, \eta^{189}\zeta, \xi^{190}, \eta^{190}, \zeta^{190}, \xi^{190}\eta, \xi^{190}\zeta, \eta^{190}\zeta, \xi^{191}, \eta^{191}, \zeta^{191}, \xi^{191}\eta, \xi^{191}\zeta, \eta^{191}\zeta, \xi^{192}, \eta^{192}, \zeta^{192}, \xi^{192}\eta, \xi^{192}\zeta, \eta^{192}\zeta, \xi^{193}, \eta^{193}, \zeta^{193}, \xi^{193}\eta, \xi^{193}\zeta, \eta^{193}\zeta, \xi^{194}, \eta^{194}, \zeta^{194}, \xi^{194}\eta, \xi^{194}\zeta, \eta^{194}\zeta, \xi^{195}, \eta^{195}, \zeta^{195}, \xi^{195}\eta, \xi^{195}\zeta, \eta^{195}\zeta, \xi^{196}, \eta^{196}, \zeta^{196}, \xi^{196}\eta, \xi^{196}\zeta, \eta^{196}\zeta, \xi^{197}, \eta^{197}, \zeta^{197}, \xi^{197}\eta, \xi^{197}\zeta, \eta^{197}\zeta, \xi^{198}, \eta^{198}, \zeta^{198}, \xi^{198}\eta, \xi^{198}\zeta, \eta^{198}\zeta, \xi^{199}, \eta^{199}, \zeta^{199}, \xi^{199}\eta, \xi^{199}\zeta, \eta^{199}\zeta, \xi^{200}, \eta^{200}, \zeta^{200}, \xi^{200}\eta, \xi^{200}\zeta, \eta^{200}\zeta, \xi^{201}, \eta^{201}, \zeta^{201}, \xi^{201}\eta, \xi^{201}\zeta, \eta^{201}\zeta, \xi^{202}, \eta^{202}, \zeta^{202}, \xi^{202}\eta, \xi^{202}\zeta, \eta^{202}\zeta, \xi^{203}, \eta^{203}, \zeta^{203}, \xi^{203}\eta, \xi^{203}\zeta, \eta^{203}\zeta, \xi^{204}, \eta^{204}, \zeta^{204}, \xi^{204}\eta, \xi^{204}\zeta, \eta^{204}\zeta, \xi^{205}, \eta^{205}, \zeta^{205}, \xi^{205}\eta, \xi^{205}\zeta, \eta^{205}\zeta, \xi^{206}, \eta^{206}, \zeta^{206}, \xi^{206}\eta, \xi^{206}\zeta, \eta^{206}\zeta, \xi^{207}, \eta^{207}, \zeta^{207}, \xi^{207}\eta, \xi^{207}\zeta, \eta^{207}\zeta, \xi^{208}, \eta^{208}, \zeta^{208}, \xi^{208}\eta, \xi^{208}\zeta, \eta^{208}\zeta, \xi^{209}, \eta^{209}, \zeta^{209}, \xi^{209}\eta, \xi^{209}\zeta, \eta^{209}\zeta, \xi^{210}, \eta^{210}, \zeta^{210}, \xi^{210}\eta, \xi^{210}\zeta, \eta^{210}\zeta, \xi^{211}, \eta^{211}, \zeta^{211}, \xi^{211}\eta, \xi^{211}\zeta, \eta^{211}\zeta, \xi^{212}, \eta^{212}, \zeta^{212}, \xi^{212}\eta, \xi^{212}\zeta, \eta^{212}\zeta, \xi^{213}, \eta^{213}, \zeta^{213}, \xi^{213}\eta, \xi^{213}\zeta, \eta^{213}\zeta, \xi^{214}, \eta^{214}, \zeta^{214}, \xi^{214}\eta, \xi^{214}\zeta, \eta^{214}\zeta, \xi^{215}, \eta^{215}, \zeta^{215}, \xi^{215}\eta, \xi^{215}\zeta, \eta^{215}\zeta, \xi^{216}, \eta^{216}, \zeta^{216}, \xi^{216}\eta, \xi^{216}\zeta, \eta^{216}\zeta, \xi^{217}, \eta^{217}, \zeta^{217}, \xi^{217}\eta, \xi^{217}\zeta, \eta^{217}\zeta, \xi^{218}, \eta^{218}, \zeta^{218}, \xi^{218}\eta, \xi^{218}\zeta, \eta^{218}\zeta, \xi^{219}, \eta^{219}, \zeta^{219}, \xi^{219}\eta, \xi^{219}\zeta, \eta^{219}\zeta, \xi^{220}, \eta^{220}, \zeta^{220}, \xi^{220}\eta, \xi^{220}\zeta, \eta^{220}\zeta, \xi^{221}, \eta^{221}, \zeta^{221}, \xi^{221}\eta, \xi^{221}\zeta, \eta^{221}\zeta, \xi^{222}, \eta^{222}, \zeta^{222}, \xi^{22$$