

## 論文

고분자 용융액의 압축성이 단섬유 복합재료의 섬유 배열 및  
역학적 성질에 미치는 영향

이석원\* · 윤재륜\*

**Effects of Compressibility of Polymer Melt on Fiber Orientation and  
Mechanical Properties of Short Fiber Reinforced Composites**

Seok Won Lee\* and Jae Ryoun Youn\*

**ABSTRACT**

A flow analysis considering compressibility of the polymer melt is carried out to predict fiber orientation states. Tait's state equation is adopted to describe compressibility and modified Cross model is employed to consider non-Newtonian behavior of the polymer melt. The 2nd order orientation tensor is introduced to describe 3-dimensional states of fiber orientation. It is possible to predict flow-induced fiber orientation by solving the equation of change for the orientation tensor with a suitable closure approximation. In this study, orthotropic closure is applied except for the low  $C_I$  value. Fiber orientation develops mainly due to shear flow in the skin layer and due to stretching effect in the core layer. It turns out that the compressibility, which induces additional velocity gradients during packing, reduces development of the fiber orientation. Results are dependent upon the magnitude of the interaction coefficient between short fibers. The larger the interaction coefficient, the smaller the orientation development and the compressibility effect, and vice versa. Effects of compressibility are strong at the middle layer where fibers are moderately oriented.

To predict orientation dependent mechanical properties, the orientation averaging for an arbitrary orientation is performed from the properties of a transversely isotropic unit cell. The compressibility reduces the axial modulus, and increases the transverse modulus. For thermal expansion coefficients, opposite results are observed. The larger the interaction coefficient, the less the effect of compressibility. The compressibility reduces anisotropy on the whole.

**초 록**

단섬유 복합재료의 섬유 배열 상태를 예측하기 위한 고분자 용융액의 압축성을 고려한 유동 해석을 수행하였다. 고분자 용융액의 압축성을 나타내기 위한 Tait의 상태방정식과 비뉴턴 거동을 나타내기 위한 수정된 Cross 모델을 이용하였다. 3차원 섬유 배열 상태를 묘사하기 위하여 2차 배열 텐서를 도입하였다. 적절한 최종 근사를 이용하면 배열 텐서를 위한 변화 방정식을 풀 수 있으며 유동에 의한 섬유 배열의 예측이

\*서울대학교 섬유고분자공학과

가능하다. 본 연구에서는 낮은  $C_f$  값일 때를 제외하고는 직교이방성 최종 근사가 이용되었다. 섬유 배열은 주로 skin층에서는 전단 유동에 의해서, core층에서는 인장 유동에 의해서 발달된다.

압축시 발생하는 부가적인 속도 구배가 섬유 배열의 발달 정도를 감소시키는 것으로 드러났다. 그 결과는 단섬유간의 상호 간섭 계수의 크기에 의존하였다. 상호 간섭 계수가 클수록 배열 발달 정도는 감소하였다. 섬유 배열 발달 정도가 작은 중간층에서 압축성의 효과가 가장 크게 나타났다.

배열에 따른 역학적 성질을 예측하기 위하여 가로등방성인 unit cell로부터 임의의 배열에 대한 배열 평균화를 수행하였다. 압축성은 축방향의 탄성계수를 감소시키고, 가로방향의 탄성계수는 증가시켰다. 열팽창 계수의 경우에는 반대의 결과가 나타났다. 상호 간섭 계수가 클수록 압축성의 효과는 크게 나타났다. 전체적으로 압축성은 이방성을 감소시키는 역할을 하였다.

## 1. 서 론

최근 구조물의 제작에서 보강재가 첨가된 고분자 복합재료, 특히 섬유 보강 복합재료(FRP)의 이용이 증가되고 있는데 이것은 FRP의 우수한 비강도, 비강성, 인성, 그리고 내부식성 등의 특징에 기인한다. 그러나 장섬유 복합재료(continuous fiber reinforced composite)는 노동 집약적 작업의 필요성과 복잡한 기하학적 구조의 제작시 어려움으로 인해 제작을 받게 됨에 따라 장섬유 복합재료의 장점을 일부 유지하며 대량 생산과 복잡한 구조의 제작이 가능한 단섬유 복합재료(short fiber reinforced composite)의 성형이 관심의 대상이 되어 왔다.

단섬유 복합재료의 가공 방법은 주로 사출성형(injection molding), 압축성형(compression molding), 전달성형(transfer molding) 등에 의하는데, 최근 재활용이 용이한 열가소성 수지를 주로 사용하는 사출성형에 의한 제작이 관심을 끌고 있다. 그러나 성형시 금형 내의 유동에 의한 단섬유의 배열이 복잡한 방향성을 이루어 이방성(anisotropy)이 발생하며 최종 제품의 미시적 구조나 기하학적 모양뿐만 아니라 역학적 성질이나 열팽창 계수에도 영향을 미치게 된다. 그러므로 금형 내의 섬유 배열을 잘 예측하고, 제어할 수 있다면 더 나은 물성을 갖는 제품의 생산을 가능하게 하므로 유동장의 특성과 배열 기구를 고려한 단섬유의 배열에 대한 연구가 요구된다.

유동장 내의 단섬유의 배열에 대한 연구는 1920년대에 Jeffery[1]의 연구 이래로 1980년대 이후 Givler, Folgar, Advani, Tucker 등에 의하여 많은 연구가 이루어져 왔다[2-5]. 복잡한 형상을 갖는 금형 내부에서의 유동과 섬유 배열을 예측하기 위해서는 주로 수치적 접근이 이루어지고 있다[6-15]. 이제까지의

연구의 대부분은 고분자 용융액의 압축성을 고려하지 않고 비압축성 가정을 이용하여 수치 모사를 하여 왔다. 그러나 대칭성이 없는 형태의 금형이나 캐비티(cavity)가 여러인 금형에서는 고분자 용융액의 압축 효과가 현저하게 나타나기 때문에 정확한 섬유 배열의 예측을 위하여서는 압축성을 고려한 수치 모사가 필수적이다. 순수 고분자 사출성형의 경우에 압축성을 고려한 여러 연구가 이루어져 왔으나[16-18], 섬유 배열을 예측한 해석은 이루어지지 않고 있다.

따라서 본 연구에서는 압축성을 고려한 해석을 수행하여 섬유 배열과 그에 따른 역학적 성질에 미치는 영향을 살펴보고자 한다. 수치 해석은 FEM/FDM 혼용 기법을 사용한 검사 체적(control volume)법을 이용하였고, 압축성을 고려하기 위한 상태 방정식은 Tait 식[16-18]을 이용하였다. 점도 모델은 수정된(modified) Cross 모델을 사용하였고, 2차 배열 텐서를 사용한 배열 변화 방정식을 4차 Runge-Kutta 방법을 이용하여 풀었다.

## 2. 수치해석

수치 해석을 통한 단섬유 배열의 예측은 유동 해석과 불가분의 관계에 있으며, 여기에 배열에 영향을 주는 인자와 기구를 고려하면 최종적인 섬유 배열의 예측이 가능해진다. 유동 해석을 위해서는 연속 방정식, 운동량 방정식, 에너지 방정식과 함께 상태 방정식과 구성 방정식을 풀어야만 한다. 한편 섬유의 배열에 의하여 비등방성 유동이 발생할 수도 있으나 Tucker[19]는 크기 평가(order of magnitude analysis)를 이용하여 두께가 얇은 금형에 대해서는 유동과 섬유 배열을 따로 고려해도 됨을 보였다.

## 2.1. 유동 해석

수치해석에 사용되는 좌표계는 Fig. 1과 같다. 일반적으로 사출 금형은 두께가 매우 얇고, 고분자 유동은 비등온, creeping, inelastic 유동으로 묘사된다. 또한, 고분자 용융액의 열전도도가 매우 작아 평면 방향의 열전도효과는 무시할 수 있다. 이러한 가정에 lubrication, quasi-steady state 가정을 추가하여 크기 평가를 통해 정리된 연속 방정식, 운동량 방정식, 에너지 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} \quad \dots\dots(2)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \quad \dots\dots(3)$$

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \eta \dot{\gamma}^2 \quad \dots\dots(4)$$

여기서  $x, y, z$ 는 좌표계,  $u, v, w$ 는 각 좌표계로의 속도 성분,  $P$ 는 압력,  $T$ 는 온도이고,  $\rho$ 는 밀도,  $C_p$ 는 비열,  $\eta$ 는 점도, 그리고  $\dot{\gamma}$ 는 전단 변형률의 크기이고, 다음과 같이 구하여진다.

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2} \quad \dots\dots(5)$$

경계 조건은 다음과 같다.

$$u=v=w=0, T=T_w \text{ at } z=h \quad \dots\dots(6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0, w=0 \text{ at } z=0 \quad \dots\dots(7)$$

여기서  $h$ 는 두께의 반이다. 식 (2)와 (3)을 적분하면

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} \frac{z}{\eta} \quad \dots\dots(8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} \frac{z}{\eta} \quad \dots\dots(9)$$

식 (8)과 (9)를 다시 적분하면 다음과 같다.

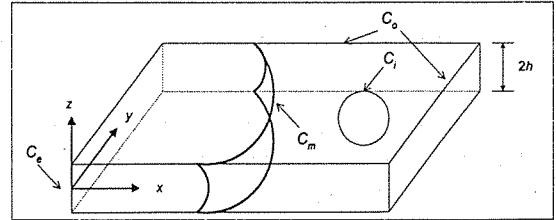


Fig. 1. Schematic presentation of the flow in the mold and its definition of the coordinate system

$$u = -\frac{\partial P}{\partial x} \int_z^h \frac{\tilde{z}}{\eta} d\tilde{z} \quad \dots\dots(10)$$

$$v = -\frac{\partial P}{\partial y} \int_z^h \frac{\tilde{z}}{\eta} d\tilde{z} \quad \dots\dots(11)$$

$x, y$  방향의 단위 길이당 질량 유속(mass flow rate)은 식 (10)과 (11)로부터 구할 수 있다.

$$\dot{m}_x = 2 \int_0^h \rho u dz \equiv -2 \frac{\partial P}{\partial x} \tilde{S} \quad \dots\dots(12)$$

$$\dot{m}_y = 2 \int_0^h \rho v dz \equiv -2 \frac{\partial P}{\partial y} \tilde{S} \quad \dots\dots(13)$$

여기서

$$\tilde{S} \equiv \int_0^h \rho \int_z^h \frac{\tilde{z}}{\eta} d\tilde{z} dz \quad \dots\dots(14)$$

로서 유동전도계수(flow conductance)라 불린다.

식 (1)을 두께 방향으로 경계조건 (6), (7)을 이용하여 적분하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{S} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz \quad \dots\dots(15)$$

식 (15)의 우변을 압력과 온도에 대하여 전개하면

$$G \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{S} \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \tilde{S} \frac{\partial P}{\partial y} \right) = -F \quad \dots\dots(16)$$

$G$ 와  $F$ 는 다음과 같다.

$$G = \int_0^x \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial P} \right)_T dz + \int_x^h \left( \frac{\partial \rho_s}{\partial P} \right)_T dz \quad \dots\dots(17)$$

$$F = \int_0^x \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial T} \right)_P \frac{\partial T}{\partial t} dz + \int_x^h \left( \frac{\partial \rho_s}{\partial T} \right)_P \frac{\partial T}{\partial t} dz +$$

$$(\rho_l - \rho_s) \frac{\partial \chi}{\partial t} \dots\dots\dots (18)$$

여기서 아래첨자  $l$ 과  $s$ 는 각각 액상(liquid phase)과 고상(solid phase)을 나타내고,  $\chi$ 는 그 경계이다. 식 (16)의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{at } C_m \quad & P=0 \\ \text{at } C_i \text{ or } C_n \quad & \frac{\partial P}{\partial n} = 0 \\ \text{at } C_c \quad & P=P_c(t) \end{aligned}$$

여기서  $n$ 은 outward normal vector이다.

상태 방정식으로는 두 가지 상(phase)을 다 잘 묘사 해 주는 Tait 식[16-18]을 이용하였다.

$$v(T, P) = v_0(T) \left[ 1 - 0.0894 \ln \left( 1 + \frac{P}{B(T)} \right) \right] \dots\dots\dots (19)$$

여기서

$$v_0(T) = \begin{cases} b_{1,l} + b_{2,l} \bar{T} & (T > T_l) \\ b_{1,s} + b_{2,s} \bar{T} & (T < T_l) \end{cases} \dots\dots\dots (20)$$

$$B(T) = \begin{cases} b_{3,l} \exp(-b_{4,l} \bar{T}) & (T > T_l) \\ b_{3,s} \exp(-b_{4,s} \bar{T}) & (T < T_l) \end{cases} \dots\dots\dots (21)$$

$$\bar{T} \equiv T - b_5 \dots\dots\dots (22)$$

$$T_l(P) = b_5 + b_6 P \dots\dots\dots (23)$$

이고,  $b_i$ 들은 재료 상수이다.

점도는 5개의 상수를 사용하는 수정된 Cross 모델을 사용하였다.

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + \left[ \frac{\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau^*} \right]^{1-n}} \dots\dots\dots (24)$$

여기서

$$\eta_0 = B \exp \left[ \frac{T_b}{T} \right] \exp(\beta P) \dots\dots\dots (25)$$

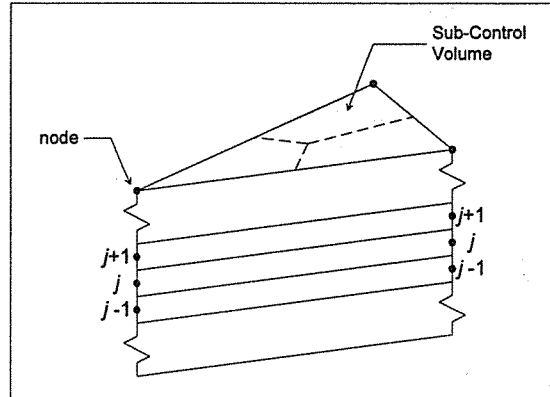


Fig. 2. Diagram of linear triangular finite element, finite difference grids in thickness direction, and sub-control volume

이고,  $B$ ,  $T_b$ ,  $\beta$ ,  $\tau^*$ ,  $n$ 은 재료 상수이다.

수치 해석에 있어서 압력은 Fig. 2와 같은 선형 삼각형 유한 요소(linear triangular finite element)를 사용하여 구하였다. 한 요소 안에서의 압력은 다음과 같은 선형 보간 함수(linear interpolation function)를 이용하였다.

$$L_i^{(t)} = \frac{1}{2A^{(t)}} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \dots\dots\dots (26)$$

여기서

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$\beta_i = y_j - y_k \dots\dots\dots (27)$$

$$\gamma_i = x_k - x_j$$

이고,  $x$ ,  $y$ 는 각 절점(node)의 좌표,  $A^{(t)}$ 은 유한 요소(finite element)의 면적, 위첨자  $t$ 은 요소를, 아래첨자  $i$ ,  $j$ ,  $k$ 는 절점을 가리키며, 순환하는 수(permuting number)이다.

한 요소 안에서의 압력은 식 (26)을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$p^{(t)}(x, y, t) = \sum_{i=1}^3 L_i^{(t)}(x, y) p_i^{(t)}(t) \dots\dots\dots (28)$$

식 (16)은 갤러킨 가중 잔여법(Galerkin weighted residual method)을 통하여 유한 요소 식(finite element equation)으로 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{A^{(t)}}{12} G \sum_{i=1}^3 E_{iN}^{(t)} \frac{P_i - P_i^{(t)}}{\Delta t} + \frac{\tilde{S}^{(t)}}{2A^{(t)}} \sum_{i=1}^3 D_{iN}^{(t)} P_i \\ & = -\frac{A^{(t)}}{3} F^{(t)} \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

여기서  $P'$  은 이전 시간의 압력이고,  $E^{(t)}$ 과  $D^{(t)}$ 은 다음과 같다.

$$E^{(t)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ \text{sym} & & 2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (30)$$

$$D^{(t)} = \begin{bmatrix} \beta_1^2 + \gamma_1^2 & \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 & \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 \\ & \beta_2^2 + \gamma_2^2 & \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 \\ \text{sym} & & \beta_3^2 + \gamma_3^2 \end{bmatrix}$$

모든 요소에서 식 (29)를 이용하여 구하여진 절점의 식(nodal equation)들은 stiffness matrix로 조합(assemblage)하게 된다. 이 식은 비선형 연립방정식이 되고, 반복적 치환 방법(iterative substitution method)을 사용하여 풀었다.

식 (4)에 주어진 에너지 방정식은 두께 방향의 열전도 항은 2차 중심 차분을 이용한 implicit Euler 방법을 적용하였고, 평면 방향의 대류 항은 수치적 안정성을 위하여 upwinding 방법을 이용하였다[14-16]. 온도와 압력의 상호 영향을 고려하기 위해 에너지 방정식과 식 (29)를 동시에 풀도록 iteration을 하였다.

유동 선단(melt front)은 Fig. 2에 보인 것과 같은 각 절점에 대한 부점사 체적(sub-control volume)의 합인 검사 체적(control volume)을 정의하여 매시간 적어도 하나의 검사 체적을 채워 가도록 하여 진행시켰다. 이 때 식 (29)를 풀기 위한 게이트에서의 압력(Pe(t))은 일정한 유량이 항상 공급된다는 가정 하에서 결정되었다. 이 검사 체적 방법은 유동 선단을 정확히 예측할 수는 없지만 복잡한 형상의 금형에 대해서도 쉽게 적용할 수 있는 장점을 가지고 있다.

## 2.2. 섬유 배열 해석

유동시 발생하는 섬유의 배열을 예측하기 위해서는 유동장에 따른 배열을 묘사할 수 있는 모델과 배열의 척도가 필요하다. 배열의 척도로는 배열 인자(orientation parameter), 배열 분포 함수(orientation distrib-

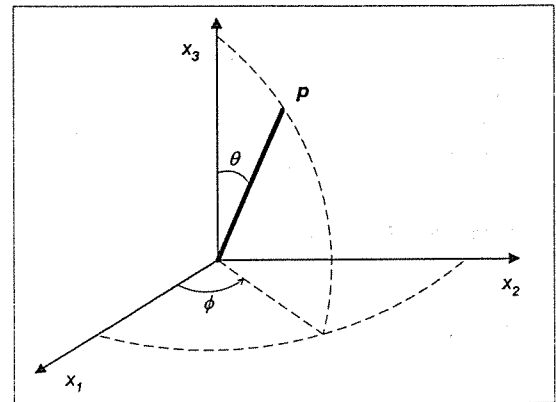


Fig. 3. Position vector of oriented fiber

ution function), 배열 텐서(orientation tensor)등이 있는데, 이 중 배열 텐서는 배열 분포 함수의 정규성(normality)과 대칭성을 가지면서 섬유 배열을 간결히 묘사하여 계산량을 획기적으로 줄일 수 있는 장점을 갖고 있다[4].

2차, 4차 배열 텐서는 다음과 같이 정의된다.

$$a_{ij} = \int p_i p_j \phi(p) dp \dots\dots\dots (31)$$

$$a_{ijkl} = \int p_i p_j p_k p_l \phi(p) dp \dots\dots\dots (32)$$

여기서  $p$ 는 섬유의 배열 방향을 나타내는 벡터이고 (Fig. 3),  $\phi$ 는 배열 분포 함수이다.

유동에 의한 섬유 배열의 모델은 Folgar와 Tucker[3]이 제안한 상호 간섭 계수(interaction coefficient), CI를 포함하는 Advani와 Tucker[4]에 의해 제안된 2차 배열 텐서에 대한 배열 변화 방정식(equation for orientation change)을 사용하였다.

$$\begin{aligned} \frac{Da_{ij}}{Dt} = & -\frac{1}{2} (\omega_{ik} a_{kj} - a_{ik} \omega_{kj}) + \frac{1}{2} \\ & v (\dot{\gamma}_k a_{kj} + a_{ik} \dot{\gamma}_j - 2 \dot{\gamma}_k a_{ijkl}) \dots\dots\dots (33) \\ & + 2C_I \dot{\gamma} (\delta_{ij} - 3a_{ij}) \end{aligned}$$

여기서  $v = (r_c^2 - 1)/(r_c^2 + 1)$ 이고,  $r_c$ 는 섬유의 외형비(aspect ratio)이다.

위 식에 나타나는 4차 배열 텐서를 처리하기 위하여

Cintra와 Tucker[20]에 의하여 제안된 직교이방성 최종 근사(orthotropic closure approximation)를 사용하였다. 식 (33)은 4차 Runge-Kutta 방법을 이용하여 풀었고, 수치적 안정성을 위하여 대류 항에 upwinding 방법을 사용하였다[14].

### 2.3. 역학적 성질의 예측

역학적 성질 및 열팽창 계수의 예측은 우선 전체 복합재료와 같은 부피 분율을 갖고 모재가 단 하나의 섬유만을 둘러싸고 있는 형태의 단위 셀(unit cell)을 정의함으로써 시작한다. 이러한 단위 셀은 가로등방성(transverse isotropy)을 갖게 되고, 그 때의 역학적 성질은 Halpin-Tsai 식에 의하여 예측할 수 있다[21].

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1 + \zeta \xi v_f}{1 - \xi v_f} \quad (34)$$

여기서

$$\xi = \frac{(M_f/M_m) - 1}{(M_f/M_m) + \zeta} \quad (35)$$

$M$ 은 각각 길이 방향의 탄성률인  $E_1$ , 가로 방향의 탄성률  $E_2$ , 길이 방향의 전단 탄성률  $G_{12}$ , 가로 방향의 전단 탄성률  $G_{23}$ 을 가리키고, 아래첨자  $f$ 와  $m$ 은 각각 섬유와 모재를 가리킨다.  $v_f$ 는 섬유의 부피 분율이다. 각각에 따른  $\zeta$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \zeta_{E_1} &= 2 \frac{L}{D} \\ \zeta_{E_2} &= 2 \quad (36) \\ \zeta_{G_{12}} &= 1 \\ \zeta_{G_{23}} &= \frac{K_m/G_m}{K_m/G_m + 2} \end{aligned}$$

$L$ ,  $D$ 는 각각 섬유의 길이와 지름을 나타내고,  $K_m$ 과  $G_m$ 은 모재의 bulk modulus와 shear modulus이다.

Poisson ratio는 혼합제 법칙(rule of mixture)을 사용하였다[22].

$$v_{12} = v_f v_f + v_m(1 - v_f) \quad (37)$$

$v_{21}$ 과  $v_{23}$ 은 탄성계수의 제한조건으로부터 다음과 같

이 구할 수 있다[22].

$$v_{21} = v_{12} \frac{E_2}{E_1} \quad (38)$$

$$v_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1 \quad (39)$$

위와 같이 구해진 engineering constant들은 단위 셀의 축약된 stiffness matrix의 성분  $C_{mn}$ 과 다음과 같은 관계가 있다.

$$C_{11} = \frac{(1 - v_{23})E_1}{1 - v_{23} - 2v_{12}v_{21}} \quad (40)$$

$$C_{22} = \frac{E_2}{2(1 - v_{23} - 2v_{12}v_{21})} + G_{23} \quad (41)$$

$$C_{44} = G_{23} \quad (42)$$

$$C_{66} = G_{12} \quad (43)$$

$$C_{12} = \frac{v_{21}E_1}{1 - v_{23} - 2v_{12}v_{21}} \quad (44)$$

$$C_{23} = \frac{E_2}{2(1 - v_{23} - 2v_{12}v_{21})} + G_{23} \quad (45)$$

단위 셀의 열팽창 계수는 Schneider[23]에 의해 주어진 관계에 의해서 구할 수 있다.

$$\alpha_1 = \alpha_f + \frac{\alpha_m - \alpha_f}{[v_f E_f / (1 - v_f) E_m + 1]} \quad (46)$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_m - (\alpha_f - \alpha_m) \times$$

$$\left( \frac{2(1 + v_m)(v_m^2 - 1)C}{(1 + 1.1v_f)(1.1v_f - 1) - v_m + 2v_m^2 C} - \frac{v_m E_f / E_m}{1/C + E_f / E_m} \right) \quad (47)$$

여기서  $C = 1.1v_f / (1 - 1.1v_f)$  이다.

한편 임의의 섬유 배열을 가진 복합재료의 성질을 예측하기 위해서는 단위 셀의 성질을 섬유 배열에 따라 평균화하는 배열 평균화(orientation averaging) 작업이 필요하다.

$$\langle M \rangle = \oint M(p) \psi(p) dp \quad (48)$$

여기서  $\langle M \rangle$ 은 평균화된 성질이다. 2차 텐서인 열팽

창 계수와 4차 텐서인 stiffness matrix의 경우에는 배열 텐서를 이용하여 다음과 같이 배열 평균화를 수행할 수 있다[4].

$$\langle \alpha \rangle_{ij} = A_1 \alpha_{ij} + A_2 \delta_{ij} \dots (49)$$

$$\begin{aligned} \langle C \rangle_{ijkl} = & B_1 (a_{ijkl}) + B_2 (a_{ij} \delta_{kl} + a_{kl} \delta_{ij}) \\ & + B_3 (a_{ik} \delta_{jl} + a_{il} \delta_{jk} + a_{jl} \delta_{ik} + a_{jk} \delta_{il}) \dots (50) \\ & + B_4 (\delta_{ij} \delta_{kl}) + B_5 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned}$$

$A_1, A_2, B_1$  부터  $B_5$ 는 invariant들으로써 단위 셀로부터 얻어진 성질과 다음과 같은 관계가 있다.

$$A_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \dots (51)$$

$$A_2 = \alpha_2 \dots (52)$$

$$B_1 = C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 4C_{66} \dots (53)$$

$$B_2 = C_{12} - C_{23} \dots (54)$$

$$B_3 = C_{66} + \frac{1}{2} (C_{23} - C_{22}) \dots (55)$$

$$B_4 = C_{23} \dots (56)$$

$$B_5 = \frac{1}{2} (C_{22} - C_{23}) \dots (57)$$

앞에서와 마찬가지로 4차 배열 텐서는 직교이방성 최종 근사를 이용하여 얻어졌다. 한 요소 안에서 위와 같은 방법으로 얻어진 역학적 성질과 열팽창 계수를 한 층의 두께를 가중치로 하여 평균화하여 최종적으로 구하였다.

### 3. 결과 및 고찰

수치 해석에 사용된 금형의 기하학적 형상과 메쉬는 Fig. 4와 같다. 수지는 polystyrene, 강화 섬유는 glass fiber의 데이터를 사용하였다. 수정된 Cross 모델을 위한 상수들은 Table 1과 같다[17]. 에너지 방정식을 풀기 위한 열전도와 열용량은 Kuo와 Kamal[24]의 데이터를 이용하였다. 이와 함께 프로세싱 조건을 Table 2에 나타내었다. Tait 식을 위한 상수들은 Table 3과 같다[17]. 금형의 두께는 0.2cm로 일

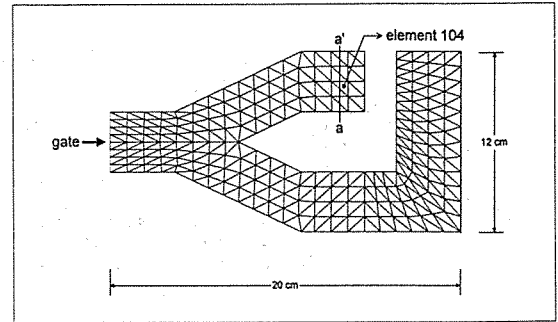


Fig. 4. Mold geometry and finite element mesh configuration

Table 1. Constants of the polystyrene for the modified cross model

$n$	0.274
$\tau(\text{dyne/cm}^2)$	$2.31 \times 10^5$
$B(\text{poise})$	$3.04 \times 10^{-8}$
$T_b(K)$	13300
$\beta(\text{cm}^2/\text{dyne})$	$3.5 \times 10^{-9}$

Table 2. Material constants and processing conditions

$C_p(\text{erg/gK})$	$2.34 \times 10^7$
$k(\text{erg/cmKs})$	$0.976 \times 10^4$
$T_{\text{gate}}(K)$	473
$T_{\text{wall}}(K)$	303
$Q_{\text{gate}}(\text{cm}^3/\text{s})$	35.0

Table 3. Constants of the polystyrene for specific volume calculation

$b_{1,s}(\text{cm}^3/\text{g})$	0.988	$b_{1,s}(\text{cm}^3/\text{g})$	0.988
$b_{2,s}(\text{cm}^3/\text{gK})$	$6.10 \times 10^{-4}$	$b_{2,s}(\text{cm}^3/\text{gK})$	$1.49 \times 10^{-4}$
$b_{3,s}(\text{dyne/cm}^2)$	$115.0 \times 10^7$	$b_{3,s}(\text{dyne/cm}^2)$	$238.0 \times 10^7$
$b_{4,s}(K^{-1})$	$3.66 \times 10^{-3}$	$b_{4,s}(K^{-1})$	$2.10 \times 10^{-3}$
$b_5(K)$	385.0	$b_6(K\text{cm}^2/\text{dyne})$	$7.8 \times 10^{-7}$

정하게 하였고, 게이트에서의 초기 섬유 배열은 마구잡이 배열(random orientation)을 가정하였다. 금형이 완전히 다채워지는 충전 시간(fill time)은 0.91초로 예측되었다.

Fig. 5에서 7은  $C_f$ 값은 0.01일 때 두께방향의 세가지 평면에서의 섬유 배열을 나타내었으며 비압축성 가정을 이용한 경우와 압축성을 고려한 경우에 계산된 배열 텐서를 이용하여 구하여진 배열 타원(orientation ellipse)을 도시한 것이다. 배열 타원은 3차원 배열 텐서로부터 얻어진 세 개의 고유값(eigenvalue)을 크기로 하고 그에 따른 고유벡터(eigenvector)를 주 방향

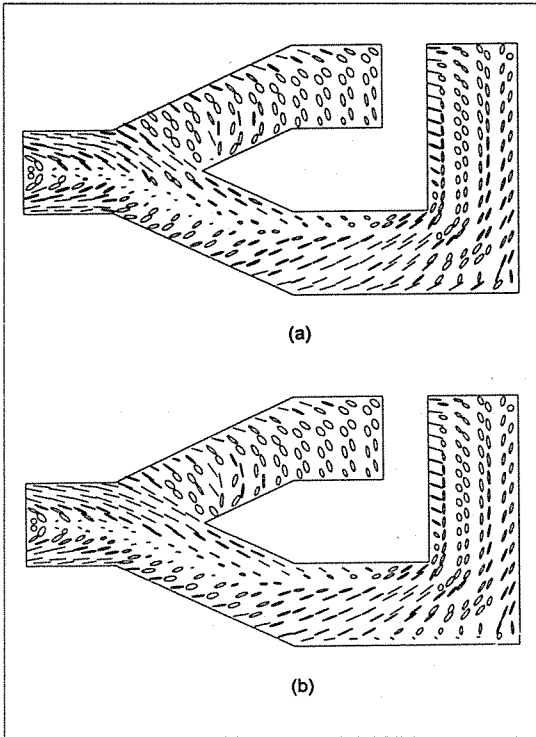


Fig. 5. Predicted orientation ellipse at  $z/h = 0.0$  when  $C_f = 0.01$   
(a) compressible case  
(b) incompressible case

으로 하여 얻어진 배열 타원체(orientation ellipsoid)를 평면 방향으로 투영하여 얻어졌다. 두 가지 경우 모두 중심 면에서는 게이트의 오른쪽 위로 유동의 인장 효과에 따라 섬유가 그 방향에 수직으로 배열되는 것을 보여준다. 하지만 점점 뒷 벽면에 가까워짐에 따라 벽에 의한 전단 효과가 강하게 작용하여 유동 방향에 평행한 배열을 보이게 된다. 즉, 두께에 따라 벽면 근처의 배열이 발달된 skin층, 배열이 발달하지 않은 중심 부분의 core층, 그리고, 배열이 서서히 발달해 가는 중간층으로 나뉘어 지는 섬유 배열 구조를 가지게 된다. 이러한 배열 구조는 실험적으로도 확인된 바 있다[11].

한편, 금형의 비대칭성 때문에 불가피하게 고분자 용액의 압축성이 발생하게 된다. 압축성의 효과는 섬유의 배열을 좀더 무더지게 하는 것이고 이것을 Fig. 5와 6에서 확인할 수 있다. Fig. 8은 Fig. 4에 보여진 element 104에서의 배열 텐서의 최대 고유값(maximum eigenvalue)이다. 최대 고유값은 섬유가 가장 지배적으로 배열되어 있는 방향으로의 배열의 크기를

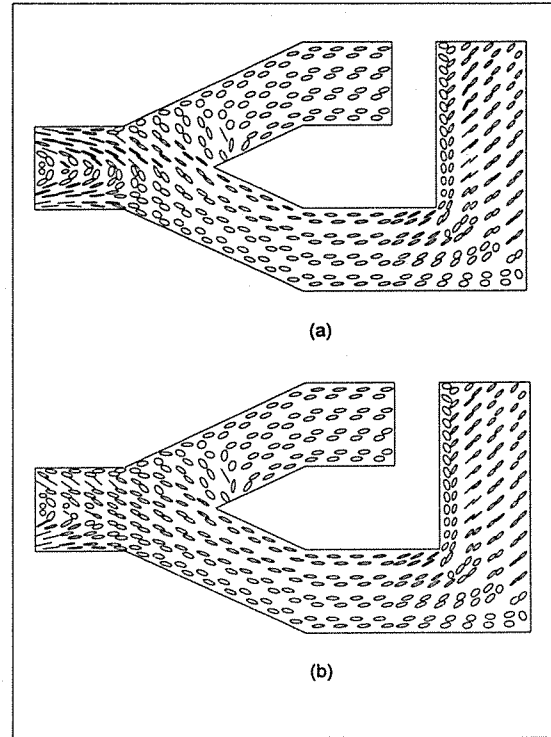


Fig. 6. Predicted orientation ellipse at  $z/h = 0.3$  when  $C_f = 0.01$   
(a) compressible case  
(b) incompressible case

Table 4. Mechanical properties and thermal expansion coefficient of matrix and fiber

	matrix (PS)	fiber (E-glass)
$E$ (MPa)	3200	73000
$\nu$	0.33	0.25
$\alpha$ ( $K^{-1}$ )	$7 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-6}$

의미한다. 압축성에 의해 발생하는 속도 구배가 최대 고유값을 낮추는 것을 알 수 있다. 압축성을 고려한 경우에 최대 고유값이 4.32% 감소하였다. 그러나 이 현상은 섬유 배열이 덜 발달된 core층이나 중간층에서는 현저하게 나타나지만 섬유 배열이 발달된 skin층에서는 압축에 의한 효과가 잘 나타나지 않는다.

식 (33)에서 알 수 있듯이 배열 텐서의 값에 변화를 주는 가장 큰 요인은 속도 구배(velocity gradient)이다. 전단 변형을 속도 텐서와 와도(vorticity) 텐서는 모두 속도 구배의 함수이다. Fig. 9에 이것이 잘 나타나 있다. 압축성을 고려하지 않은 해석의 경우에는 속



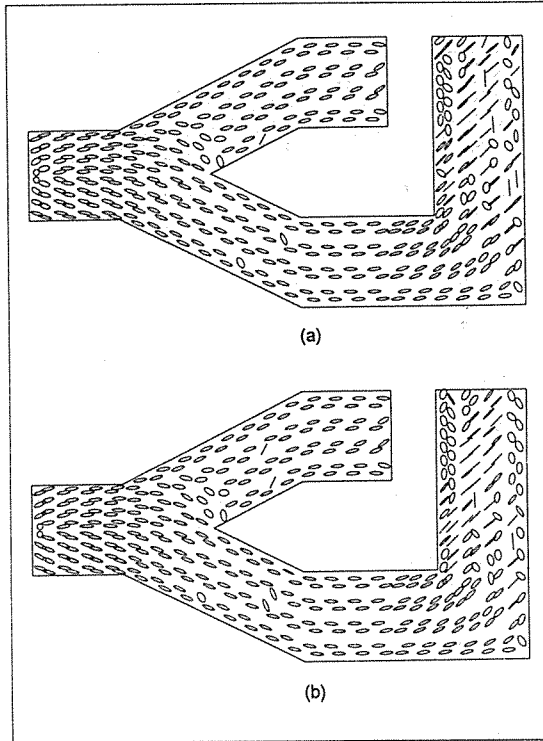


Fig. 7. Predicted orientation ellipse at  $z/h = 0.8$  when  $C_f = 0.01$ .  
(a) compressible case  
(b) incompressible case

도 구배가 거의 없으나 압축성을 고려한 경우에는 속도 구배가 상당한 것을 볼 수 있다. 그러나, 압축성의 효과가 크지 않은 부분에는 두 경우의 차이가 크지 않다.

$C_f$  값을 0.1로 크게 한 경우에는 전반적인 경향은 위와 같으나 배열이 덜 발달하여 뭉뚱한 분포를 가지는 것을 관찰할 수 있었다. 압축성에 인한 최대 고유값의 감소는 1.25%로  $C_f$  값이 0.01인 경우보다 작게 나타났다. 이것은 큰  $C_f$  값으로 인하여 섬유 배열이 이미 마구잡이 배열에 가깝기 때문에 압축성의 효과가 크게 나타나지 않기 때문이다. 한편,  $C_f$  값을 0.001로 더 작게 한 경우에는 위와 같은 전반적인 경향을 보이면서 배열의 발달 정도가 매우 크게 나타났다. 이 경우, 배열 텐서 계산시 orthotropic closure는 불안정한 결과를 보이기 때문에 [20] hybrid closure [5]를 사용하였다. 최대 고유값의 감소는 5.14%로 나타났다.

한편, 역학적 성질 및 열팽창 계수의 예측에 쓰인 데이터는 Table 4와 같다. 섬유의 부피분율( $v_f$ )은 21%

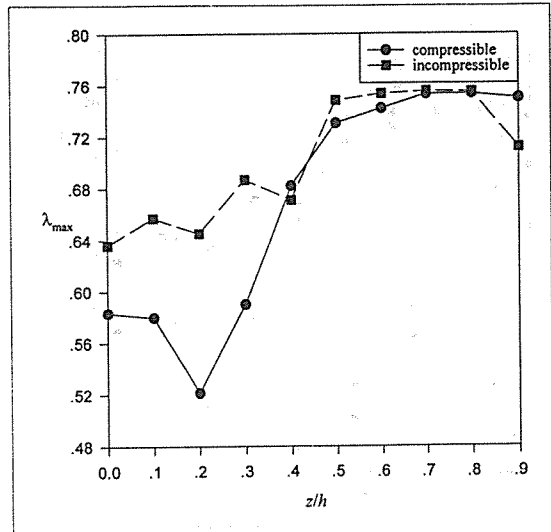


Fig. 8. Predicted maximum eigenvalues of orientation tensor at element 104 in thickness direction at the end of filling when  $C_f = 0.01$

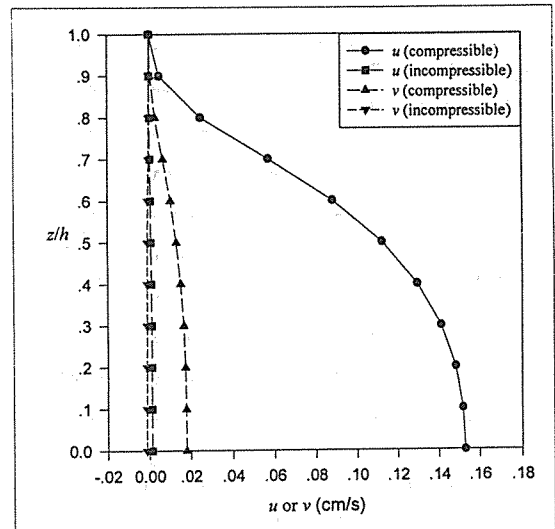


Fig. 9. Gapwise velocity profile at  $t = 0.76$ sec in element 104

이고, ( $L/D$ )는 100으로 하였다.

고분자 용융액의 압축 효과가 있을 것으로 예상되는 단면 a-a'에서의 예측된 축 방향 탄성 계수( $E_1$ )를 Fig. 10에 나타내었다. 전반적으로 금형의 옆 벽면에서의 탄성 계수가 가운데 부분보다 높게 예측되었다. 이것은 금형의 옆 벽면에 의한 전단 효과로 인하여 섬유가 축 방향에 나란하게 배열되는 경향을 보이기 때문이다. 축

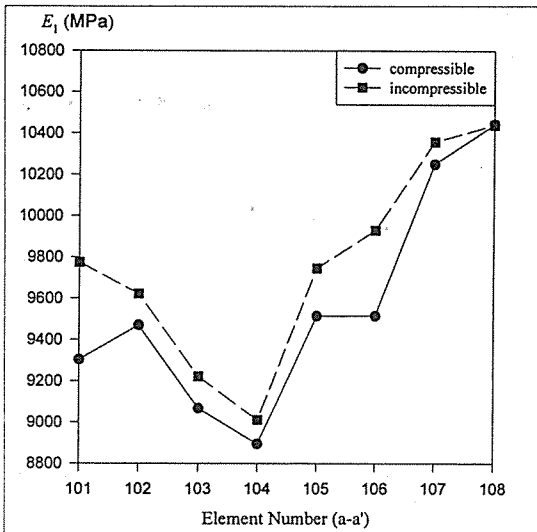


Fig. 10. Predicted axial modulus,  $E_1$  across the line a-a' when  $C_i = 0.01$

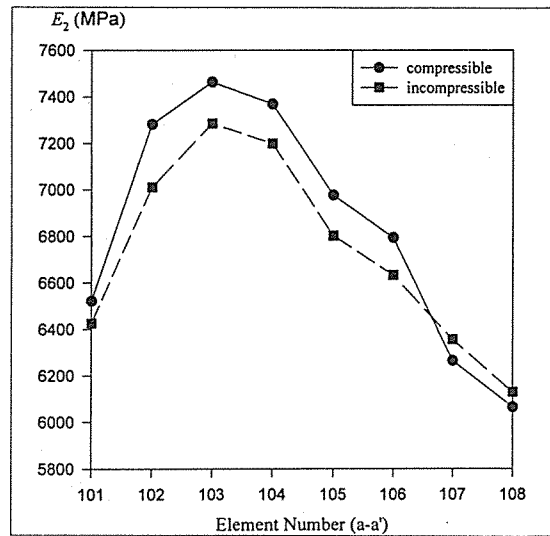


Fig. 11. Predicted transverse modulus,  $E_2$  across the line a-a' when  $C_i = 0.01$

방향의 탄성 계수가 압축성으로 인하여 약 2.11%의 감소를 보였다. Fig. 11에는 a-a'에서 가로 방향의 예측된 탄성 계수( $E_2$ )를 나타내었다. 축 방향의 탄성 계수와는 반대로 가운데에서 높은 값을 보였다. 압축성을 고려한 경우의 탄성 계수가 그렇지 않은 경우에 비해 1.59%의 증가를 보였다. 이러한 경향은 섬유 배열의 마구잡이화를 초래하는 고분자 용융액의 압축 효과가 섬유를 가로 방향으로 더 많이 배열시키기 때문이다. 즉, 고분자 용융액의 압축성이 섬유 배열을 마구잡이화하는 효과에 의해서 축 방향의 탄성 계수와 가로 방향의 탄성 계수의 차이가 줄어드는 결과를 얻을 수 있다.

열팽창 계수의 경우에는 강화 섬유가 모재보다 더 작은 값을 가지기 때문에 탄성 계수와는 반대의 경향을 나타내었다. Fig. 12는 축 방향의 열팽창 계수( $\alpha_{11}$ )를 a-a' 단면을 따라 나타낸 것이다. 탄성 계수와는 반대로 압축성을 고려한 경우가 그렇지 않은 경우보다 더 큰 열팽창 계수를 보였다. 축 방향의 열팽창 계수는 2.81% 증가하였다. 단면 a-a'에 따른 가로 방향의 열팽창 계수( $\alpha_{22}$ )는 Fig. 13에 나타내었다. 역시 탄성 계수와는 반대로 압축성을 고려한 경우가 그렇지 않은 경우보다 더 작은 열팽창 계수가 예측되었다. 가로 방향의 열팽창 계수의 감소는 1.51% 정도를 나타내었다. 가로 방향의 열팽창 계수가 축 방향의 열팽창 계수보다 더 크기 때문에 가로 방향으로의 더 큰 열 변형이 발생하리라는 것을 예측할 수 있다. 그러므로, 압축을

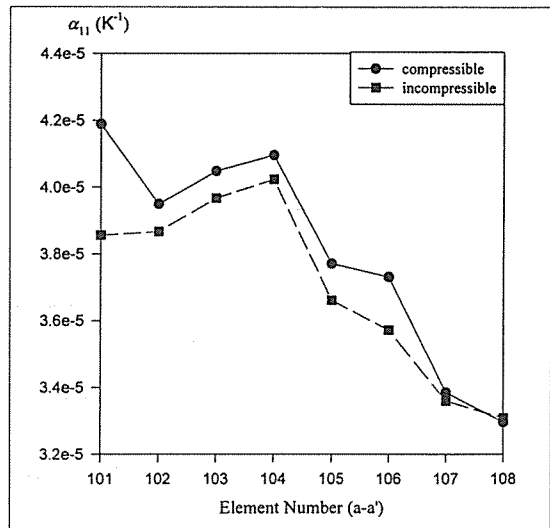


Fig. 12. Predicted axial thermal expansion coefficient,  $\alpha_{11}$  across the line a-a' when  $C_i = 0.01$

많이 받게 되는 부분은 그렇지 않은 부분에 비하여 두 방향의 열팽창 계수의 차이가 더 작기 때문에 수축이 더 작게 내지는 균일하게 발생할 것으로 기대할 수 있다.

$C_i$  값이 0.1로 더 큰 경우에는 전반적인 경향은 위와 같았으나, 그 변화의 폭이 줄어들었음을 관찰할 수 있었다. 축 방향의 탄성 계수의 경우 0.50% 감소하였고,

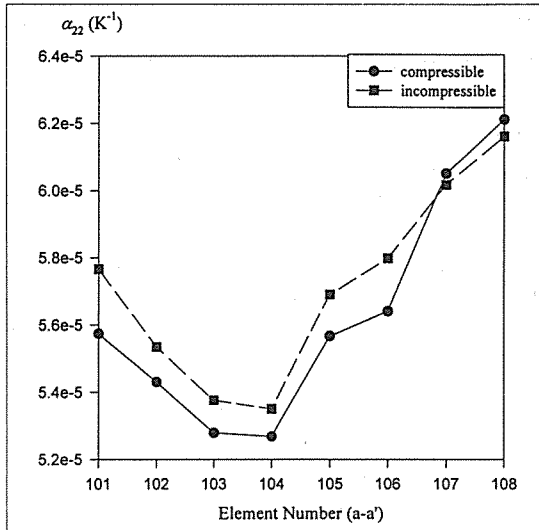


Fig. 13. Predicted transverse thermal expansion coefficient,  $\alpha_{22}$  across the line a-a' when  $C_7 = 0.01$

가로 방향의 탄성 계수의 경우 1.51% 증가하였다. 이는 큰  $C_7$ 값으로 인하여 섬유 배열이 덜 발달하게 되어 압축성으로 인한 배열의 마구잡이화 효과가 줄어들기 때문이다. 열팽창 계수도 마찬가지로 경향을 나타내었다.  $C_7$ 값을 0.001로 더 작게 한 경우에는 전반적인 경향은 역시 위와 같았으나 변화의 폭이 더욱 커짐을 관찰할 수 있었다. 축 방향의 탄성 계수는 3.36% 감소하였고, 가로 방향의 탄성 계수는 3.33% 증가하였다.  $C_7$ 값이 작으면 섬유 배열이 잘 발달하게 되므로 배열을 마구잡이화하는 압축성의 효과가 크게 나타남을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

본 연구를 통해 복잡한 형상의 금형에서 불가피한 고분자 용융액의 압축 현상이 섬유의 배열과 역학적 성질, 열팽창 계수에 미치는 영향을 살펴보았다. 압축 현상에 의한 섬유 배열의 변화가 전반적인 제품의 물성에 많은 영향을 미치는 것을 알 수 있었고, 다음과 같은 결론을 내릴 수 있었다.

- 1) 금형의 형상이 비대칭적이거나 여러 개의 캐비티를 갖는 금형의 경우 고분자 용융액의 압축성이 발생한다.
- 2) 유동에 의한 섬유 배열은 두께 방향에 따라 인장

효과에 의해 배열되는 중심 부분의 core층, 전단 효과에 따라 배열되는 벽면 근처의 skin층, 그리고, 그 사이에서 배열이 변해가는 중간층으로 나눌 수 있다.

3) 섬유의 배열은 유동뿐만 아니라 압축 현상에 의해서도 영향을 받는다. 그 결과는 주로 섬유 배열의 발달 정도를 낮추는 것으로 나타난다.

4) 압축에 의한 섬유 배열의 변화는 섬유 발달 정도가 적은 중심부와 배열이 약간씩 발달해 가는 중간 영역에서 크다. 배열이 완전히 발달한 skin 부분은 크게 영향을 받지 않는다.

5) 고분자 용융액의 압축성에 의해 상당한 속도 구배가 발생하고, 이것이 압축에 의한 섬유 배열 변화의 가장 큰 요인이다.

6) 상호 간섭 계수,  $C_7$ 값이 증가하면 배열의 발달 정도가 감소하고,  $C_7$ 값이 감소하면 배열의 발달 정도가 증가한다. 압축성으로 인한 배열의 마구잡이화는  $C_7$ 값이 작은 경우 더 두드러지게 나타난다.

7) 압축에 의해 영향을 받은 섬유 배열은 축 방향과 가로 방향의 탄성 계수나 열팽창 계수의 차이를 감소시킨다. 즉, 최종 제품의 이방성을 감소시키는 역할을 한다.

8)  $C_7$ 값이 작을수록 이방성의 감소가 크게 나타난다.

#### 감사의 글

본 연구는 일주학술문화재단의 교수연구비 지원에 의해서 수행되었으며 이에 깊은 감사를 드립니다.

#### 참고문헌

1. Jeffery, G.B., "The Motion of Ellipsoidal Particles Immersed in a Viscous Fluid," Proc. Roy. Soc. Ser. A, Vol. 102, 1923, pp. 161-179.
2. Givler, R.C., Crochet, M.J., and Pipes, R.B., "Numerical Prediction of Fiber Orientation in Dilute Suspension," J. Compos. Mater., Vol. 17, 1983, pp. 330-343.
3. Folgar, F., and Tucker III, C.L., "Orientation Behavior of Fibers in Concentrated Suspensions," J. Reinf. Plast. Compos., Vol. 3, 1984, pp. 98-119.
4. Advani, S.G., and Tucker III, C.L., "The Use

- of Tensors to Describe and Predict Fiber Orientation in Short Fiber Composites," *J. Rheol.*, Vol. 31, 1987, pp. 751-784.
5. Advani, S.G., and Tucker III, C.L., "Closure Approximation for Three Dimensional Structure Tensors," *J. Rheol.*, Vol. 34, 1990, pp. 367-386.
  6. Jackson, W.C., Advani, S.G., and Tucker III, C.L., "Predicting the Orientation of Short Fibers in Thin Compression Moldings," *J. Compos. Mater.*, Vol. 20, 1986, pp. 539-557.
  7. Altan, M.C., Subbiah, S., Geri, S.I., and Pipes, R.B., "Numerical Prediction of Three-Dimensional Fiber Orientation in Hele-Shaw Flows," *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 30, 1990, pp. 848-859.
  8. Advani, S.G., and Tucker III, C.L., "A Numerical Simulation of Short Fiber Orientation in Compression Molding," *Polym. Compos.*, Vol. 11, 1990, pp. 164-177.
  9. Henry De Frahan, H., Verleye, V., Dupret, F., and Crochet, M.J., "Numerical Prediction in Injection Molded Parts of Short-Fiber-Reinforced Thermoplastics," *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 32, 1992, pp. 254-266.
  10. Bay, R.S., and Tucker III, C.L., "Fiber Orientation in Simple Injection Moldings. Part I : Theory and Numerical Method," *Polym. Compos.*, Vol. 13, 1992, pp. 317-331.
  11. Bay, R.S., and Tucker III, C.L., "Fiber Orientation in Simple Injection Moldings. Part II : Experimental Results," *Polym. Compos.*, Vol. 13, 1992, pp. 332-341.
  12. Ranganathan, S., and Advani, S.G., "A Simultaneous Solution for Flow and Fiber Orientation in Axisymmetric Diverging Radial Flow," *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, Vol. 47, 1993, pp. 107-136.
  13. Ko, J. and Youn, J.R., "Prediction of Fiber Orientation in the Thickness Plane During Flow Molding of Short Fiber Composites," *Polym. Compos.*, Vol. 16, 1995, pp. 114-124.
  14. 고진, 이석원, 윤재륜, "단섬유 복합재료의 사출 성형을 위한 평면 방향의 섬유 배열 해석," *한국복합재료학회지*, 제8권 제4호, 1995, pp. 34-45.
  15. Chung, S.T., and Kwon, T.H., "Numerical Simulation of Fiber Orientation in Injection Molding of Short-Fiber-Reinforced Thermoplastics," *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 35, 1995, pp. 604-618.
  16. Chiang, H.H., Hieber, C.A., and Wang, K.K., "A Unified Simulation of the Filling and Postfilling Stages in Injection Molding. Part I : Formulation," *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 31, 1991, pp. 116-124.
  17. Chiang, H.H., Hieber, C.A., and Wang, K.K., "A Unified Simulation of the Filling and Postfilling Stages in Injection Molding. Part II : Experimental Verification," *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 31, 1991, pp. 125-139.
  18. Chen, B.S., and Liu, W.H., "Numerical Simulation of the Post-Filling Stage in Injection Molding with a Two-Phase Model," *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 34, 1994, pp. 835-846.
  19. Tucker III, C.L., "Flow Regimes for Fiber Suspensions in Narrow Gaps," *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, Vol. 39, 1991, pp. 239-268.
  20. Cintra Jr., J.S., and Tucker III, C.L., "Orthotropic Closure Approximation for Flow-Induced Fiber Orientation," *J. Rheol.*, Vol. 39, 1995, pp. 1095-1122.
  21. Halpin, J.C., and Kardos, J.L., "The Halpin-Tsai Equations : A Review," *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 16, 1976, pp. 344-352.
  22. Jones, R.M., *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill, London, 1975, pp. 37-94.
  23. Schneider, W., "W rmeausdehnungskoeffizienten und W rmespannungen von Glasfaser/Kunststoff-Verbunden aus Unidirektionalen Schichten," *Kunststoffe*, Vol. 61, 1971, pp. 273-277.
  24. Kuo, Y., and Kamal, M. R., "The Fluid Mechanics and Heat Transfer of Injection Mold Filling of Thermoplastic Materials," *AIChE J.*, Vol. 22, 1976, pp. 661-669.