

論文

복합재료 적층 이방성 토러스 셸의 고유진동해석

전중균* · 이윤복**

Natural Vibrations of
Composite Laminated Anisotropic Toroidal Shells

Chong Keun CHUN* and Yoon Bock RHIE**

ABSTRACT

The natural vibrations of composite laminated anisotropic toroidal shells with circular cross section are analyzed based on a classical theory. Two-node conical shell element are used as a basic element for finite element analysis. The equations of motion are obtained by Hamilton's principle. The system mass and stiffness matrices are obtained and the eigenvalue analysis is performed. The frequencies obtained by this analysis are compared with those by other methods and the validities of the present analysis are confirmed. Following verification, natural vibrations of composite laminated anisotropic toroidal shells are performed.

초 록

원형단면을 갖는 복합재료 적층 이방성 토러스 셸에 대하여 고전이론(두께가 얇은 셸이론)에 근거하여 고유진동 해석을 행하였다. 유한요소 해석을 위하여 기본요소로 2절점 원추형 셸 요소를 택하였다. Hamilton정리를 이용하여 운동방정식을 구하였다. 시스템의 질량 행렬과 강성 행렬을 구하여 고유치 해석을 하였다. 이 요소의 타당성을 입증하기 위해 이 방법을 이용하여 구한 진동수와 다른 방법으로 구한(기존문헌에 소개된) 결과와 비교하였다.

검증 후에 적층 이방성 토러스 셸에 대하여 고유진동해석을 행하였다.

1. 서 론

특이한 기하학적 형상 때문에 토러스 셸은 많은 공학분야에서 응용되고 있다. 예를 들면 Tokamak-type 핵 융합로와 NASA의 우주정거장 프로젝트, 정유화학 공장, 공조 시스템 등에서 이용되고 있다. 그러므로 원만한 설계를 위해서는 이 셸의 진동특성 파악이 우선되어야 한다. 또한 이러한 구조물들은 복합재료의 장점

(강도, 내구성, 단열)을 이용하기 위해 적층형 복합재료로 구성되어 있다.

고전이론을 이용한 균질이고 등방성 축대칭 셸에 대한 유한요소해석을 Grafton과 Strome[1]과 Percy 등[2]이 처음으로 도입하였다. 이 해석을 Padovan[3]이 이방성 축대칭 셸에 대하여 발전시켰다. 적층 이방성 축대칭 셸 해석에 대하여 Panda와 Natarajan[4]이 superparametric 요소를 개발하였다. Kosawada 등

* 경희원, 선문대학교 공과대학 기계공학부

** 서울대학교 지진공학연구센터 연구교수

[5]이 power series를 이용하여 토러스 셸을 해석하였다. 그러나 아직까지 어느 문헌에서도 일관성 있고 타당한 복합재료 토러스 셸에 대한 해석결과를 얻을 수 없는 실정이다.

이 연구에서는 2절점을 가진 원추형 셸 유한요소를 사용하여 적층 이방성 토러스 셸에 대한 진동 특성을 파악하려한다. 이 셸 요소의 타당성을 입증하기 위해 등방성재료를 이용하여 구한 기존 문헌의 고유진동수와 이 연구에 의한 결과를 서로 비교한다. 검증 후에 적층 이방성 토러스 셸에 대하여 고유진동해석을 행한다.

2. 구성방정식

Fig. 1과 같은 토러스 셸을 유한요소방법으로 해석하기 위해서 기본요소로 원추형 셸 요소를 택하도록 한다. 시스템의 운동에너지와 변형에너지를 구하여 Hamilton 정리를 이용하여 운동방정식을 구한다.

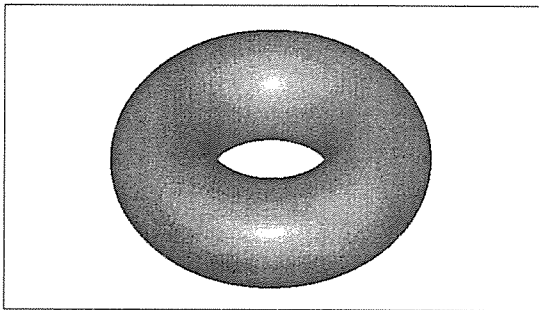


Fig. 1. Toroidal Shell

여기서는 일반적인 방법에 대해서 설명하고 자세한 내삽함수(interpolation function)와 유한요소 행렬 등은 다음절에서 다룬다. Fig. 2와 같은 원추형 셸 요소를 기본요소로 삼는다. (s, θ, z)를 면에 평행하고 직각인 좌표로 택하고 원추의 각도를 α, 시간을 t라 한다. (s, θ, z)좌표계에 따라 (u_s, u_θ, u_z)를 중립축의 변위라 한다. 이 변위들이 행렬 **u**를 이루는데

$$\mathbf{u}(s, \theta, t) = [u_s, u_\theta, u_z]^T \dots \dots \dots (1)$$

고전이론에서는 이 좌표계에 근거한 중립축 변위와 중립면의 변형률 (ε_{ss}, ε_{θθ}, γ_{sθ}), 곡률 변화 (κ_{ss}, κ_{θθ},

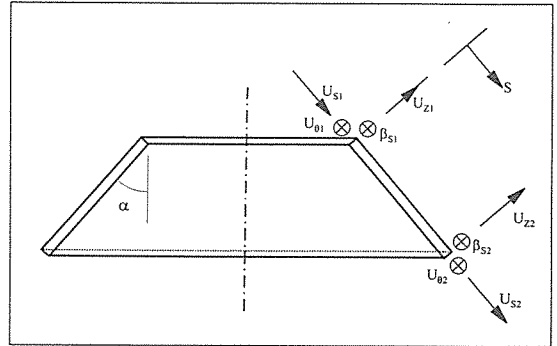


Fig. 2. Nodal Degrees of Freedom for Elements

κ_{sθ})는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{ss} &= u_{s,s}; \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{\gamma} (u_{\theta,\theta} + u_s \sin\alpha + u_z \cos\alpha); \\ \gamma_{s\theta} &= u_{\theta,s} - \frac{1}{\gamma} (u_\theta \sin\alpha - u_{s,\theta}) \\ \chi_{ss} &= -u_{z,ss}; \chi_{\theta\theta} = -\frac{\sin(\alpha)}{\gamma} u_{z,s} - \frac{1}{\gamma^2} [u_{z,\theta\theta} - \cos(\alpha) u_{\theta,\theta}] \dots \dots \dots (2) \\ \chi_{s\theta} &= -\frac{2}{\gamma} [u_{z,s\theta} - \cos(\alpha) u_{\theta,\theta}] + \frac{2 \sin(\alpha)}{\gamma^2} [u_{z,\theta} - \cos(\alpha) u_\theta] \end{aligned}$$

이 변형률들은 다음과 같은 간편한 행렬형태로 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\epsilon} = [L_1 + L_2 + L_3] \mathbf{u} \dots \dots \dots (3)$$

여기서

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_{ss} \ \epsilon_{\theta\theta} \ \gamma_{s\theta} \ \chi_{ss} \ \chi_{\theta\theta} \ \chi_{s\theta}]^T \dots \dots \dots (4)$$

L₁, L₂, L₃ 는 θ에 대한 0, 1, 2차 미분형태를 나타낸다. L₁, L₂, L₃ 의 요소들은 부록에 수록되어 있다. Hamilton정리를 요약하면

$$\delta \Pi = \delta \int_{t_0}^{t_1} \{T - V\} dt = 0 \dots \dots \dots (5)$$

여기서 T와 V는 각각 운동에너지와 변형에너지를

나타낸다. 즉,

$$T = \frac{1}{2} \int_{vol} \dot{\mathbf{u}}^T \rho \dot{\mathbf{u}}_{dvol}; V = \frac{1}{2} \int_{vol} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{dvol} \dots\dots\dots(6)$$

여기서 은 시간에 대한 미분을 나타낸다. ρ 와 \mathbf{C} 는 쉘의 밀도와 강성도를 나타낸다. 즉,

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \rho_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \rho_1 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(7)$$

여기서 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ 는 3×3 부행렬(sub matrix)이고, 각각 신장(extensional), 조합(coupling), 굽힘(flexural) 강성도를 나타낸다. $\rho, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ 와 \mathbf{D} 의 요소는 다음과 같다.

$$\rho_1 = \int_H \rho^{(k)} dz \dots\dots\dots(8)$$

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_z Q_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz; (i, j=1, 2, 6) \dots\dots(9)$$

여기서 $\rho^{(k)}, Q_{ij}^{(k)}$ 는 각각 적층 판에서 k -층의 질량과 평면강성도를 나타낸다.

3. 유한요소해석

원추형 요소의 내삽함수관계는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} u_s(s, \theta, t) \\ u_\theta(s, \theta, t) \\ u_z(s, \theta, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1(s) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathbf{n}_1(s) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mathbf{h}_1(s) & \mathbf{h}_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_s(\theta, t) \\ \mathbf{u}_\theta(\theta, t) \\ \mathbf{u}_z(\theta, t) \\ \beta_s(\theta, t) \end{bmatrix}$$

or

$$\mathbf{u}(s, \theta, t) = \mathbf{nu}_o(\theta, t) \dots\dots\dots(10)$$

여기서 $\mathbf{n}_1(s)$ 과 $(\mathbf{h}_1(s), \mathbf{h}_2(s))$ 는 각각 Lagrangian과 Hermitian 다항식을 나타낸다. \mathbf{u}_o 행렬은 다음의 절점변위로 나타낸다.

$$\mathbf{u}_o^T = [u_s(\theta, t) \ u_\theta(\theta, t) \ u_z(\theta, t) \ \beta_s(\theta, t)] \\ = [u_{s1} \ u_{s2} \ u_{\theta 1} \ u_{\theta 2} \ u_{z1} \ u_{z2} \ \beta_{s1} \ \beta_{s2}] \dots\dots\dots(11)$$

이 절점변위들은 Fig. 2 와 같다.

식(10)을 식(3)에 대입하면 다음과 같은 변형을 변환행렬을 얻는다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}_1 \mathbf{u}_o + \mathbf{b}_2 \mathbf{u}_{o,\theta} + \mathbf{b}_3 \mathbf{u}_{o,\theta\theta} \dots\dots\dots(12)$$

여기서 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ 의 요소들은 부록에 수록되어 있다. 식(10)과 식(12)을 식(7)과 함께 에너지 식(6)에 대입하면 요소의 질량행렬과 강성도 행렬을 유도할 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_o^T \bar{\mathbf{m}} \dot{\mathbf{u}}_o \dots\dots\dots(13)$$

$$V = \frac{1}{2} [\mathbf{u}_o^T \bar{\mathbf{k}}_{11} \mathbf{u}_o + \mathbf{u}_o^T \bar{\mathbf{k}}_{12} \mathbf{u}_{o,\theta} + \mathbf{u}_o^T \bar{\mathbf{k}}_{13} \mathbf{u}_{o,\theta\theta} \\ + \mathbf{u}_o^T \bar{\mathbf{k}}_{21} \mathbf{u}_o + \mathbf{u}_o^T \bar{\mathbf{k}}_{22} \mathbf{u}_{o,\theta} + \mathbf{u}_o^T \bar{\mathbf{k}}_{23} \mathbf{u}_{o,\theta\theta} \dots\dots(14) \\ + \mathbf{u}_{o,\theta\theta}^T \bar{\mathbf{k}}_{31} \mathbf{u}_o + \mathbf{u}_{o,\theta\theta}^T \bar{\mathbf{k}}_{32} \mathbf{u}_{o,\theta} + \mathbf{u}_{o,\theta\theta}^T \bar{\mathbf{k}}_{33} \mathbf{u}_{o,\theta\theta}]$$

여기서

$$\bar{\mathbf{m}} = \int \int \mathbf{n}^T \rho \mathbf{n} r ds d\theta \dots\dots\dots(15)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{11} = \int \int \mathbf{b}_1^T \mathbf{C} \mathbf{b}_1 r ds d\theta; \bar{\mathbf{k}}_{12} = \bar{\mathbf{k}}_{21}^T = \int \int \mathbf{b}_1^T \mathbf{C} \mathbf{b}_2 r ds d\theta \\ \bar{\mathbf{k}}_{22} = \int \int \mathbf{b}_2^T \mathbf{C} \mathbf{b}_2 r ds d\theta; \bar{\mathbf{k}}_{13} = \bar{\mathbf{k}}_{31}^T = \int \int \mathbf{b}_1^T \mathbf{C} \mathbf{b}_3 r ds d\theta \dots\dots(16) \\ \bar{\mathbf{k}}_{33} = \int \int \mathbf{b}_3^T \mathbf{C} \mathbf{b}_3 r ds d\theta; \bar{\mathbf{k}}_{23} = \bar{\mathbf{k}}_{32}^T = \int \int \mathbf{b}_2^T \mathbf{C} \mathbf{b}_3 r ds d\theta$$

식(15), (16)의 $\bar{\mathbf{m}}, \bar{\mathbf{k}}_{11}, \bar{\mathbf{k}}_{22}, \bar{\mathbf{k}}_{33}$ 는 대칭이고 그 이외의 것은 대칭이 아니다. 국부(local)좌표계에서 전체(global)좌표계로의 변환은 다음의 행렬로 처리한다.

$$\begin{bmatrix} u_s \\ u_\theta \\ u_z \\ \beta_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cdot & \sin(\alpha) & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ -\sin(\alpha) & \cdot & \cos(\alpha) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_s \end{bmatrix} \text{ or } \mathbf{u}_o = \mathbf{tq} \dots\dots\dots(17)$$

전체(global)좌표계로 변환한 다음 모든 요소를 합한 전체 시스템에 대한 에너지 식은 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{Q}} \dots\dots\dots(18)$$

$$V = \frac{1}{2} [Q^T K_{11} Q + Q^T K_{12} Q_{, \theta} + Q^T K_{13} Q_{, \theta \theta} + Q_{, \theta}^T K_{21} Q + Q_{, \theta}^T K_{22} Q_{, \theta} + Q_{, \theta}^T K_{23} Q_{, \theta \theta} + Q_{, \theta \theta}^T K_{31} Q + Q_{, \theta \theta}^T K_{32} Q_{, \theta} + Q_{, \theta \theta}^T K_{33} Q_{, \theta \theta}] \dots (19)$$

이 에너지를 변분법(variational calculus)을 이용하여 전개하면 다음과 같은 운동방정식을 얻는다.

$$K_1 Q + K_2 Q_{, \theta} + K_3 Q_{, \theta \theta} + K_4 Q_{, \theta \theta \theta} + K_5 Q_{, \theta \theta \theta \theta} + M \ddot{Q} = 0 \dots (20)$$

여기서

$$K_1 = K_{11}; K_2 = K_{12} - K_{21}; K_3 = K_{13} + K_{31} - K_{22} \dots (21)$$

$$K_4 = K_{32} - K_{23}; K_5 = K_{33}$$

K_1, K_3, K_5 는 대칭이고, K_2, K_4 는 비대칭이다. 식 (20)을 풀기 전에 먼저 상응하는 경계조건을 적용시켜야 한다.

4. 고유치해석(Eigenvalue Analysis)

고전이론을 만족하는 변위 벡터를

$$Q = Q_0 e^{i(n\theta + \omega t)} \dots (22)$$

여기서 n 은 원주방향 모드 수이고, ω 는 고유진동수, Q_0 는 모달형상(modal pattern)을 나타낸다. Fig. 3에 n 에 따른 일반적인 원주방향 모드형태를 나타내었다. 이 변위 벡터를 운동 방정식에 대입하면 다음과 같은 고유치 방정식이 나온다.

$$[[K_1 - n^2 K_3 + n^4 K_5] + i [n K_2 - n^3 K_4]] Q_0 = \omega^2 M Q_0 \dots (23)$$

식(23) 좌변의 실수부분은 대칭이고 허수부분은 역대칭(skew-symmetric)이다. 그러므로 이 시스템은 실수 고유치만 존재한다. 위의 고유치 식에 원주모드 수 n 이 할당되면 원하는 진동수와 모드형태를 결정할 수 있다. 우리들의 관심사는 주어진 원주모드 수 n 에 대한 제일 작은 몇 개의 고유치와 그에 상응하는 모드 형태

들이므로 부분반복(subspace iteration)법을 이용한다.

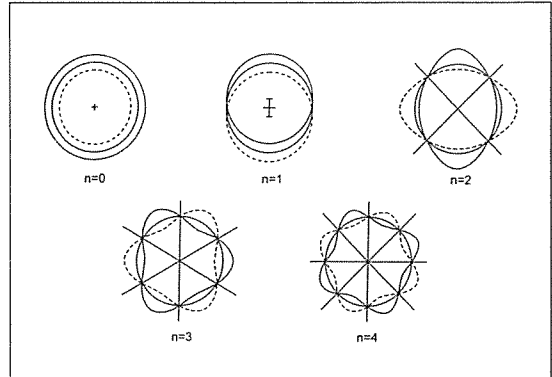


Fig. 3. Circumferential Modal Pattern

5. 토러스 쉘의 진동해석

앞 절에서 개발한 유한요소를 일반적인 토러스 쉘에 적용하였다. 먼저 검증을 위해 Kosawada[5]의 논문의 결과와 비교하였다. 그들은 등방성 재료로 된 토러스 쉘에 대하여 대칭, 비대칭 모드를 검색하였다. 그들의 논문(p. 2046, Fig. 5)에 나타난 수치와 비교한 결과가 Table 1에 나타나 있다. 그들은 멱급수(power series)를 이용하여 무려 140개의 항을 이용하였고, 이 연구에서는, 등방성 재료에 대한 대칭성을 이용하여 단 40개의 요소를 이용하여 만족할 만한 결과를 얻었다. 그들의 α^2 와 이 연구에서의 ω 가 일치하도록 인자들을 맞추었다. 그들은 그들의 연구를 등방성 재료에만 국한시켰다.

Table 1. Comparison of Nondimensional Frequency α ($\beta = 3.0 \times 10^4, n = 2, k = 0.1$)

| Mode | Symmetric | | | Antisymmetric | | |
|------|-----------------|------------|---------|-----------------|------------|---------|
| | Kosawada et. al | This study | % error | Kosawada et. al | This study | % error |
| 1st | 1.04681 | 1.03592 | -1.04 | 1.08042 | 1.08219 | 0.16 |
| 2nd | 3.36710 | 3.36617 | -0.03 | 3.15342 | 3.15436 | 0.03 |
| 3rd | 3.69048 | 3.61547 | -2.03 | 3.68870 | 3.69108 | 0.06 |

이방성을 관찰하기 위해 Fig. 4와 같은 4개의 층으로 된 $\pm 30^\circ$ angle-ply 토러스 쉘을 해석하였다. 사용된 재료의 물성치는 다음과 같다.

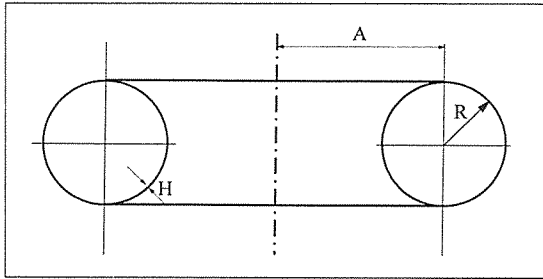


Fig. 4. Toroidal shell Geometry

$$\frac{E_L}{E_T} = 20; \frac{G_{LT}}{E_T} = 0.5 \dots\dots\dots(24)$$

$$\nu_{LT} = 0.25; \nu_{TT} = 0.25$$

여기서 L과 T는 섬유방향과 평행, 수직인 방향을 각각 나타낸다. 4-layer, $\pm 30^\circ$ angle-ply로 된 적층 판의 신장, 조합, 굽힘 강성도(A_{ij} , B_{ij} , D_{ij})를 Table 2에 나타내었다. 판의 전체두께 H는 1로 하였다.

Table 2. A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} Coefficients for Four-Layer Regular Antisymmetric $\pm 30^\circ$ Laminate(H=1)

| | | | | | | |
|------------------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|
| $ij \rightarrow$ | 11 | 12 | 26 | 66 | 16 | 26 |
| A_{ij} | 11.817 | 3.732 | 2.287 | 3.981 | . | . |
| B_{ij} | . | . | . | . | -0.767 | -0.265 |
| D_{ij} | 0.985 | 0.311 | 0.191 | 0.332 | . | . |

토러스 쉘의 고유진동수는 기하학적인 인자, 즉, 반경/두께, 원주방향 모드 수 n , A/R 에 관계된다. Fig. 5에 4-layer, $\pm 30^\circ$ angle-ply로 된 토러스 쉘에 대하여 무차원화 된 진동수 Ω 를 소개하였다.

$$\Omega = \frac{\omega R}{\sqrt{E_T \rho}} \dots\dots\dots(25)$$

여기서 ρ 는 단위 부피당 질량을 나타낸다. 진동수 결과를 $1.5 \leq A/R \leq 10.0$ 에 대하여 나타내었다. 여기서 A는 주반경, R은 단면반경을 나타낸다. 또한 이 그래프는 원주방향 모드 수 $n = 0, 1, 2, 3$ 에 대하여 나타내었다. Fig. 5(a)는 $R/H = 10$ 인 두께가 두꺼운 쉘에 대하여, Fig. 5(b)는 $R/H = 100$ 인 두께가 얇은 쉘에 대하여 나타내고 있다.

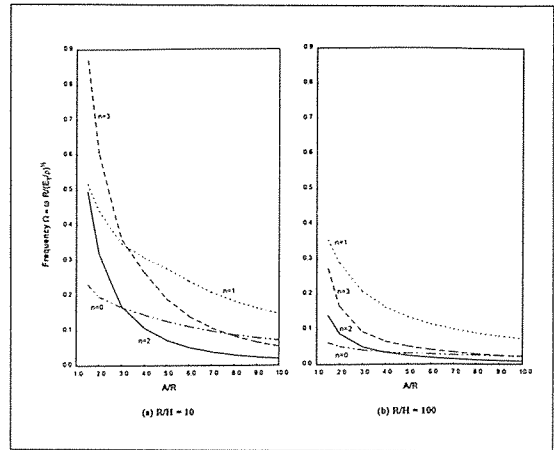


Fig. 5. Frequency Spectra for Antisymmetric Four-Layer $\pm 30^\circ$ Angle-Ply Toroidal Shell Circumferential Modes $n = 0, 1, 2, 3$

6. 결과 및 고찰

고전이론(두께가 얇은 쉘 이론)에 근거한 원추형 쉘 요소를 이용하여 적층 이방성 토러스 쉘의 고유진동해석을 하였다. Kosawada 등[5]이 멱급수(power series)를 이용하여 140개의 항을 계산하여 얻은 결과와 단 40개의 요소를 사용하여 얻은 결과가 Table 1에서 보듯이 거의 일치하였다. 적은 계산으로 같은 결과를 낼수 있다는 것에 유한요소 해석에 매료를 느낀다. 또한 그들은 균질, 등방성 재료에만 국한시킨 반면, 이 연구에서는 요즈음 수요가 급증하고 있는 이방성 복합재료로 된 토러스 쉘의 해석을 손쉽게 할 수 있다는 것이 큰 장점이다.

참 고 문 헌

1. P.E. Grafton and D.R. Strome, "Analysis of axisymmetric shells by the direct stiffness method," American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1(10), 1963, pp.2342-2347.
2. J.H. Percy, T.H.H. Pian, S. Klein and D.R. Navaratna, "Application of matrix displacement method to linear elastic analysis of shells of revolution," American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 3(11), 1965, pp.2138-2145.

3. J. Padovan, "Quasi-analytical finite element procedures for axisymmetric anisotropic shells and solids," *Computers and Structures*, 4, 1974, pp.467-483.

4. S.C. Panda and R. Natarajan, "Analysis of laminated composite shell structures by finite ele-

ment method," *Computers and Structures*, 14, 1981, pp.225-230.

5. T. Kosawada, K. Suzuki and S. Takahashi, "Free Vibrations of Toroidal Shells," *Bulletin of Japanese Society of Mechanical Engineers*, 28, No. 243, 1985, pp.2041-2047.

부 록

$$s(\alpha) \equiv \frac{\sin(\alpha)}{r} ; c(\alpha) \equiv \frac{\cos(\alpha)}{r} ; \cdot = 0$$

$$\mathbf{n}_1 = [1 - \zeta \quad \zeta]$$

$$\mathbf{h}_1 = [2\zeta^3 - 3\zeta^2 + 1 \quad -2\zeta^3 + 3\zeta^2]$$

$$\mathbf{h}_2 = l [\zeta^3 - 2\zeta^2 + \zeta \quad \zeta^3 - \zeta^2] \quad \text{where} \quad \zeta = s/l$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} (\cdot)_{,s} & \cdot & \cdot \\ s(\alpha) & \cdot & c(\alpha) \\ \cdot & (\cdot)_{,s} - s(\alpha) & \cdot \\ \cdot & \cdot & -(\cdot)_{,ss} \\ \cdot & \cdot & -s(\alpha)(\cdot)_{,s} \\ \cdot & 2c(\alpha)(\cdot)_{,s} - 2s(\alpha)c(\alpha) & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & C(\alpha) & \cdot \\ \cdot & \cdot & -2(\cdot)_{,s} + 2s(\alpha) \end{bmatrix} ; \mathbf{L}_3 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{1,s} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{n}_1 s(\alpha) & \cdot & \mathbf{h}_1 c(\alpha) & \mathbf{h}_2 c(\alpha) \\ \cdot & \mathbf{n}_{1,s} - \mathbf{n}_1 s(\alpha) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\mathbf{h}_{1,ss} & -\mathbf{h}_{2,ss} \\ \cdot & \cdot & \mathbf{h}_{1,s} s(\alpha) & \mathbf{h}_{2,s} s(\alpha) \\ \cdot & 2c(\alpha)\mathbf{n}_{1,s} - 2\mathbf{n}_1 s(\alpha)c(\alpha) & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathbf{n}_1 & \cdot & \cdot \\ \mathbf{n}_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c(\alpha)\mathbf{n}_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2\mathbf{h}_1 s(\alpha) & 2\mathbf{h}_2 s(\alpha) \\ \cdot & \cdot & -2\mathbf{h}_{1,s} & -2\mathbf{h}_{2,s} \end{bmatrix} ; \mathbf{b}_3 = -\frac{1}{r^2} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$