

## 論文

## 단섬유 형상기억합금에 의한 복합재료의 강화기구 해석

안득만\* · 김영구\* · 김부섭\*\* · 박익민\*\* · 조경목\*\* · 최일동\*\*\*

Analysis of Strengthening Mechanism of  
Short Fiber Shape Memory CompositesDeuk Man An\*, Young Ku Kim\*, Su Sob Kim\*\*, Ik Min Park\*\*,  
Kyung-Mox Cho\*\* and Il Dong Choi\*\*\*

## ABSTRACT

In this paper a mechanical model of short fiber type shape memory alloy fiber/Al matrix composite was studied. A shape memory alloy fiber, after its shape is memorized and prestrained in the martensic phase, can shrink to its original length upon heating to austenitic finish temperature. Due to shape memory effect, there occurs compressive residual stresses in the matrix. Residual stresses in matrix and fiber are calculated using Eshelby's equivalent inclusion method. It is shown that the compressive residual stress  $\sigma_{11}$  increases with fiber volume fraction or aspect ratio of fiber. We also predict the compressive residual stress quantitatively with the variation of cut-off angle of short fiber.

## 초 록

본 논문에서는 단섬유 형태의 TiNi 형상기억합금 섬유/Al 복합재료의 매트릭스의 기계적 성질의 모델링에 대해서 연구하였다. 일반적인 복합재료는 제조과정에서 고온에서 실온으로 냉각시킬 때 matrix와 fiber의 열팽창계수의 차이 때문에 matrix내에 인장잔류응력을 발생시킨다. 그러나 단섬유형태의 형상기억합금 금속기 복합재료를 이용하면 형상기억효과에 의하여 matrix내에 압축잔류응력을 발생시켜 복합재료의 인장항복응력을 증가시킬수 있다. 복합재료의 모델링에는 Eshelby's equivalent inclusion method를 이용하였으며 prestrain, fiber aspect ratio와 fiber cut-off angle에 대하여 matrix에 발생하는 압축응력과 복합재료의 항복응력의 관계에 대하여 연구하였다.

## 1. 서 론

TiNi 형상기억합금은 고온의 austenite에서 martensite로 냉각되면 내부의 전단 잔류응력에 의해서 쌍정(twinning)이 발생하며 martensite 상 일때 외부하중이 가해지면 쌍정에 의해서 쉽게 변

형된다. 변형된 martensite를 austenite변태가 일어나는 온도까지 올리면 austenite는 쌍정형태의 변형을 수용할 수 없으므로 원래 형태로 돌아가게 된다. 이러한 성질을 가진 형상기억합금을 fiber로 이용하면 기존의 일반적인 복합재료의 단점을 보완하여 뛰어난 기계적 성질을 얻을 수 있다.

\* 부산대학교 공과대학 기계공학부

\*\* 부산대학교 공과대학 금속공학과

\*\*\* 해양대학교 금속공학과

일반적인 복합재료는 제조과정에서 고온에서 실온으로 냉각될 때 matrix의 열팽창계수가 fiber의 열팽창계수보다 크기 때문에 matrix에서의 인장 잔류응력이 발생한다. 형상기억합금을 fiber로 이용하면 형상기억효과에 의하여 복합재료의 사용온도에서 matrix에 압축 잔류응력이 생기고 이로 인하여 복합재료의 인장 항복응력을 더 커지게 된다. 특히 TiNi계 형상기억합금은 큰 형상기억효과, 높은 감쇠능(damping capacity) 그리고 austenite 단계에서의 높은 강성 등의 성질을 가지므로 복합재료의 인장강도 뿐만 아니라 감쇠능의 증가와 고온에서의 강도의 증가도 기대되므로 fiber로서 적합하다. Al matrix에 TiNi계 형상기억합금을 fiber로 사용했을 경우에 대해서 Furuya[2], Yamada[3] 그리고 Taya[4] 등에 의해서 연구되었다. 이 연구들의 결과에 의하면 인장강도가 2배 정도 증가하였고 감쇠능도 증가함을 보였다. Taya[6]의 연구에 따르면 TiNi/epoxy 복합재료에서 형상기억효과에 의해 파괴인성치가 증가함을 보였다. 따라서 형상기억합금은 기존의 fiber재료에 비해 우수한 성질을 가지므로 fiber로서 이용 가능성이 매우 높다고 하겠다.

본 연구에서는 단섬유(short fiber)형태의 형상기억합금 금속기 복합재료의 기계적 모델링에 의하여 fiber aspect ratio, prestrain과 volume fraction에 따른 matrix의 잔류응력과 복합재료의 항복강도증가에 대하여 연구하였다.

## 2. Short fiber 형상기억합금 금속기 복합재료

TiNi 형상기억합금을 short fiber형태로 이용한 Al matrix 복합재료의 기계적 성질의 강화를 도식적으로 설명하면 Fig. 1.와 같다.

(1) 먼저 short fiber형태의 형상기억합금(TiNi)을 이용하여 복합재료를 만든다. 여기서 fiber와 matrix는 완전한 결합(perfectly adhesion)이라고 가정한다. Fig. 1.(a)

(2) 압축성형(compression moulding) 또는 압출(extrusion)에 의하여 short fiber들이 방향성을 가지도록 한다. 형상기억합금의 austenite finish( $A_f$ ) 온도 이상에서 martensite상까지 급냉시키는 열처리를 통해서 fiber의 초기 길이를 형상기억시킨다. Fig. 1.(b)

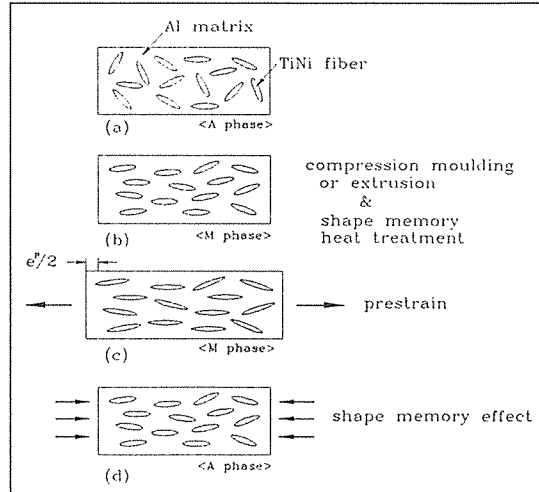


Fig. 1. Processing route of shape memory alloy metal composite[4].

(3) 형상기억합금의 martensite상에서 복합재료에 인장으로 prestrain을 가하여 변형시킨다. Fig. 1.(c)

(4) 복합재료를 형상기억합금의  $A_f$  온도 이상까지 가열하면 형상기억합금이 prestrain만큼 수축하려고 한다. 이렇게 함으로써 fiber에는 인장잔류응력이 발생하고 matrix에는 압축잔류응력이 발생하게 된다. Fig. 2.(d)

여기서 matrix에 발생한 압축 잔류응력에 의해서 인장성질이 강화된다. 이러한 강화기구

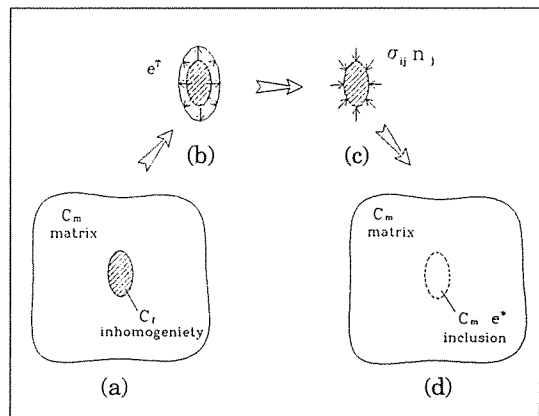


Fig. 2. Eshelby's equivalent inclusion method.

(strengthening mechanism)를 back stress strengthening이라고 한다.

### 3. 해석적 모델

형상기억효과를 고려한 복합재료의 거동을 해석 하는데 있어서 본 연구에서는 Eshelby 형태의 모델을 short fiber 형태의 형상기억합금(shape memory alloy) 금속기 복합재료에 대하여 적용하였다.

#### 3-1. Eshelby형태 모델

Eshelby는 물체 내에 eigenstrain을 가지는 타원체형의 균질물질, 즉 inclusion이 포함되어 있는 경우에 대한 탄성장(elastic field)의 해를 구하였다. 여기서 eigenstrain이라 함은 물체 내의 비탄성변형률로서 열팽창, 상변태, 소성변형률, misfit strain등을 말한다.

Fig. 2.(b)의 이중재료의 개재물(inhomogeneity), 즉 fiber만을 떼어내어서 생각하면 eigenstrain  $e_{ij}^*$  만큼을 변형하게 되면 inhomogeneity 내에서의 stress는 0 이 된다.

여기에  $-\sigma_{ij}^T n_j$  만큼의 힘 ( $\sigma^T = C_m e^T$ )을 주면 eigenstrain을 가지기 전의 형태로 되며 inhomogeneity내에서의 stress는  $-\sigma_{ij}^T$ 이다. 변형량이 없는 Fig. 2.(c)의 상태인 inhomogeneity를 다시 원래의 matrix 자리로 옮겨두고 Fig. 2.(c)에서 주었던 힘  $-\sigma_{ij}^T n_j$ 을 제거시킨다.

Fig.2.(d)에서는 이중 물질인 inhomogeneity를 eigenstrain을 가지는 같은 재료인 inclusion으로 등가화 시켜서 생각하며 Eshelby에 의하여 fiber 내부에서의 변형량은 다음과 같이 쓸 수 있다. 부록[1]

$$e = S \cdot e^* \dots\dots\dots (3.1)$$

Fig. 2.(d)는 같은 재료인 inclusion( $\Omega$ )이 eigenstrain을 가질 때를 나타낸다. S는 무한물체에 한 개의 prolate spheroid가 존재할때의 Eshelby tensor이다.

여기서  $e^*$ 는 inhomogeneity의 eigenstrain  $e^p$ 와 equivalent eigenstrain  $e^{**}$ 의 합이다.

위의 방법에 따라 matrix 내에 타원체의 비균질

물질(inhomogeneity)이 포함되어 있는 경우를 등가의 응력 상태인 전 물체가 matrix와 같은 물질로 이루어져 있고 fiber영역에 미지의 eigenstrain을 가지는 경우로 대체하여 해석하였는데 이를 Eshelby's equivalent inclusion method라 한다.

여기서는 fiber가 모두 같은 크기(size)와 형상(aspect ratio)을 가지는 prolate spheroid라고 생각한다.

#### 3-2. 잔류응력의 계산 방법

복합재료 전체를 D라하고 fiber영역을  $\Omega$ 라고 하며, D- $\Omega$ 는 matrix영역이다.

fiber( $\Omega$ )와 matrix(D- $\Omega$ )의 강성텐서를  $C_f$ ,  $C_m$ 이라 두고 fiber의 형상기억효과(shape memory effect)에 의한 eigenstrain을  $e^T$ 라 한다.

##### 3-2-1 Fiber의 자세에 따른 좌표변환

Fig. 4.(b)에서 fiber는  $\varphi$ ,  $\theta$ 와  $\xi$ 에 의하여 자세가 결정된다.

$x$  좌표에서  $x'$ 좌표로의 회전은 Fig. 5.과 같다.

Fig. 5.(a)에서의 변환은  $x_3$ 축을 중심으로  $\varphi$ 만큼 회전하였다. 그리고 Fig. 5.(b)에서는  $x_2$ 를 중심으로  $\theta$ 만큼 회전하였다.

Fig. 5.(c)에서는  $x_3$ 에 대하여  $\xi$ 만큼 회전하였다.

본 연구에서는 복합재료를 압축성형에 의하여 제조하였을 경우, 즉 평면분포(in-plane distribution)일 때와 완전 3차원 임의 분포(3 di-

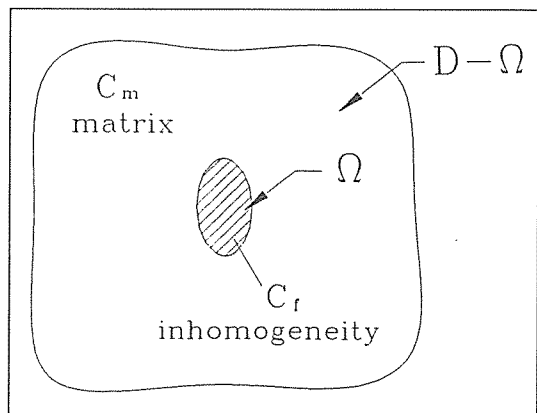


Fig. 3. Inhomogeneity ( $\Omega$ ).

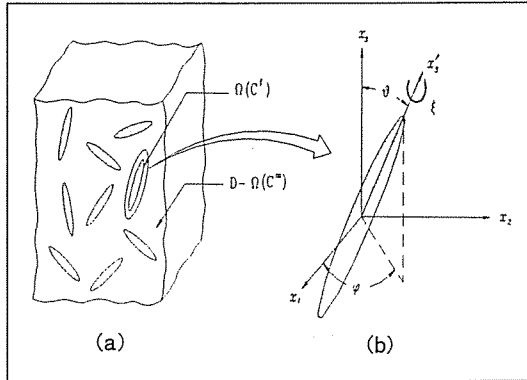


Fig. 4(a). Misoriented short fiber composite system;

(b) Definition of coordinate system used in analytical model

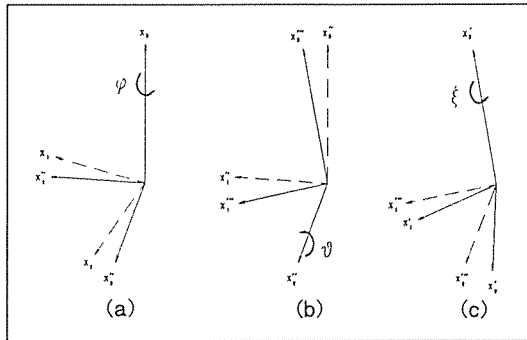


Fig. 5. Coordinate system rotation :

- (a)  $x_1 - x_2$  coordinate  
 (b)  $x_1'' - x_2''$  coordinate  
 (c)  $x_1''' - x_2'''$  coordinate

mensional perfectly random distribution)일 때에 대하여 고려하였다.

평면분포 일때는  $\theta = 0, \xi = 0$ 이다.

$x = (x_1, x_2, x_3)$ 와  $x' = (x_1', x_2', x_3')$ 의 관계는 식(3.2)와 같다.

$$x = T_\phi x' \quad (3.2)$$

여기서  $T_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 이다.

여기서 모든 fiber 와 matrix 로 구성된 영역에서의 평균적인 2차텐서(stress  $\langle \sigma \rangle$ 와 strain  $\langle e \rangle$ )를 계산한다. 여기서  $\langle \rangle$ 는 상태량의 부피 평균을 나타낸다.

2차텐서 A의 좌표변환은 식(3.5)와 같다.

$$A x = y \quad A' x' = y' \quad (3.3)$$

$$A C x' = C y' \quad (3.4)$$

$C^T A C x' = y'$ 이므로

$$A' = C^T A C \quad (3.5)$$

따라서 2차 텐서의 변환은 index notation으로 나타내면 식(3.6)이다.

$$a_{ij}' = C_{ik} C_{mj} a_{km} \quad (3.6)$$

계산의 간편함을 위해 변형률과 응력은 다음과 같이 나타낸다.

$$\sigma = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}$$

$$e = \{e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{23}, e_{13}, e_{12}\} \quad (3.7)$$

$x$ 좌표와 fat  $x'$ 좌표에서의 응력과 변형률의 변환은 아래의 식(3.8)과 같다.

$$e = Z \cdot e' \quad e' = X \cdot e \quad (3.8)$$

여기서 Z와 X는 부록에 수록하였다. 부록[2]그리고 완전 3차원 임의 분포일때를 고려하면

$$x = T_\phi \cdot T_\theta \cdot T_\xi x' \\ = Y \cdot x' \quad (3.9)$$

식(3.9)의 Y는 식(3.10)과 같다.

$$Y = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta\cos\xi - \sin\phi\sin\xi & -\cos\phi\cos\theta\sin\xi - \sin\phi\cos\xi & \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta\cos\xi + \cos\phi\sin\xi & -\sin\phi\cos\theta\sin\xi + \cos\phi\cos\xi & \sin\phi\sin\theta \\ -\sin\theta\cos\xi & \sin\theta\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

2차텐서 A의 좌표변환은  $A' = Y^T A Y$ 이므로

$$a_{ij} = y_{\alpha} y_{\beta} a_{\alpha\beta}' \dots\dots\dots (3.11)$$

A의 요소  $a_{ij}$ 는 식(3.11)과 같다.

식(3.8)과 같은 모양으로 응력과 변형률의 변환을 나타낼 수 있다.

$$e = Z \cdot e' \quad e' = X \cdot e \dots\dots\dots (3.8)$$

### 3.2.2 fiber의 분포

Fig. 4.(b)에서 fiber의 자세는  $\varphi, \theta$ 와  $\xi$ 의 함수이다.

따라서, 밀도분포함수  $\rho = \rho(\theta, \phi, \xi)$ 를 도입한다.

물리적으로 밀도분포함수  $\rho(\theta, \phi, \xi)$ 는 단위구(unit sphere)를 가로지르는  $\theta, \varphi$ 와  $\xi$ 의 자세를 가지는 fiber의 밀도를 나타낸다.

압축성형에 의한 fiber가 평면 분포라고 생각하면  $\theta = 0, \xi = 0$ 이고 다음의 식(3.12)을 만족한다.

$$\int_{-\beta}^{\beta} \rho(\phi) d\phi = 1 \dots\dots\dots (3.12)$$

따라서,  $\rho = \rho(\phi)$ 로 간단하게 나타낼 수 있다.

$\rho(\phi)$ 를 두가지 형태의 함수로 생각하였다.

Fig. 6.(a)는  $\rho(\phi) = \rho_0$  즉, uniform한 분포이며, Fig. 6.(b)는  $\rho(\phi) = \rho_0 \cos(a\phi)$ 로 cosine-type으로 분포된 것을 나타낸다. 각 경우마다 cut-off angle  $\beta$ 에 의하여 밀도 분포가 결정된다.

$$\text{Uniform} : \rho_0 = \frac{1}{2\beta}$$

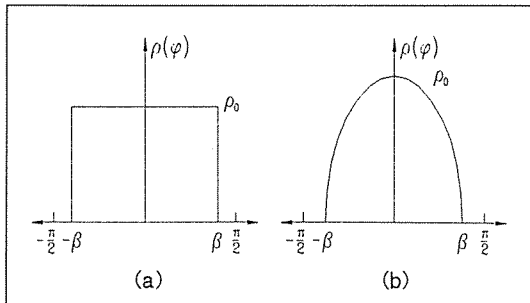


Fig. 6. (a) Uniform and (b) cosine-type density distribution function of fiber misorientation.

$$\text{Cosine-type} : \rho_0 = \frac{\pi}{4\beta} \text{ 그리고 } a = \frac{\pi}{2\beta} \text{ 그리고}$$

3차원 완전임의분포의 밀도분포함수는 식(3.13)이다.

$$\rho = (\phi, \theta, \xi) = \rho_0 \dots\dots\dots (3.13)$$

### 3.2.3 잔류응력의 계산식

matrix에서의 잔류응력(residual stress)의 평균은 식(3.14)와 같다.

$$\langle \sigma \rangle_m = C_m \cdot \bar{e} \dots\dots\dots (3.14)$$

여기서  $\bar{e}$ 는 matrix내의 평균변형률이다.

$e'$ 와  $e^{*E}$ 의 관계는 식(3.15)와 같으며,

$$e' = S \cdot e^{*E} \dots\dots\dots (3.15)$$

여기서 S는 Eshelby tensor [1]로서 matrix의 poisson's ratio와 fiber의 기하학적 형상의 함수이다. 부록[1]

하나의 fiber에서의 stress는 Eshelby's equivalent inclusion method에 의하여 다음과 같이 주어진다. Fig. 7.

$$\sigma = C_f \cdot (\bar{e}' + e' - e^{*T}) = C_m \cdot (\bar{e}' + e - e^{*E}) \dots\dots\dots (3.16)$$

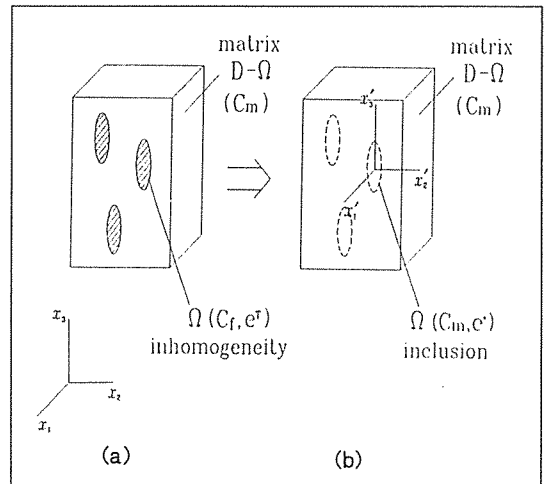


Fig. 7. Analytic model based on Eshelby's E-equivalent formulation for residual stresses.

여기서  $e'$ 는 fiber 하나에 의한 변형률이 산란된 것이며,  $\bar{e}'$ 는 식(3.14)에서 정의되었다.

$e^{T'}$ 는 fiber의 eigenstrain이고 여기서는 형상기억효과에 의하여 발생한다. 문자의 오른쪽 상단의 쉼표 표시는  $x'$ 좌표에 대하여 기술된 것을 의미한다.

식(3.15)를 식(3.16)에 대입하면

$$C_m e^{*E'} = -(C_f - C_m)\bar{e}' + C_f e^T + (C_m - C_f)S e^{*E} \quad (3.17)$$

식(3.17)와 같이 나타낼수 있고 이 식을 정리하면

$$\{C_m - S(C_m - C_f)\} e^{*E'} = \{(C_f - C_m)\bar{e}' + C_f e^T\} \quad (3.18)$$

다시 정리하면

$$e^{*E'} = \{(C_f - C_m)S + C_m\}^{-1} \cdot \{-(C_f - C_m)\bar{e}' + C_f e^T\} \quad (3.19)$$

이므로 식(3.15)를 이용하면 식(3.20)이 만들어진다.

$$e - e^{*E'} = (S - I) \cdot \{(C_f - C_m)S + C_m\}^{-1} \cdot \{-(C_f - C_m)\bar{e}' + C_f e^T\} \quad (3.20)$$

식(3.20)에서  $I$ 는  $6 \times 6$ 의 단위행렬이다. 외부에서 작용하는 하중이 없을 때 내부의 잔류응력은 자체 평형방정식(self equilibrium equation)을 만족하여야 한다.

$$V_D \int_D \sigma dV = 0 \quad (3.21)$$

fiber와 matrix에 대하여 분리하면 식(3.22)와 같다.

$$V_{D-\Omega} \int_{D-\Omega} \sigma_m dV + V_\Omega \int_\Omega \sigma_f dV = 0 \quad (3.22)$$

(3.22)의 두 항을  $C_m$ 으로 나누면

$$V_{D-\Omega} \int_{D-\Omega} \bar{e} dV + V_\Omega \int_\Omega (\bar{e} + e - e^{*E}) dV = 0 \quad (3.23)$$

이며 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{e} + \frac{1}{V_D} \int_\Omega (e - e^{*E}) dV = 0 \quad (3.24)$$

식(3.24)에서  $V_D$ 는 복합재료 전체의 부피이다.

평면분포(in-plane distribution)일때의 fiber에 대한 변형률의 적분은 아래의 방법을 따른다.

$$\frac{1}{V_D} \int_\Omega (e - e^{*E}) dV = \frac{1}{V_D} \int_\beta^\beta (e - e^{*E}) \rho(\phi) V d\phi \quad (3.25)$$

식(3.25)에서  $V$ 는 fiber 하나의 부피이며,  $\Omega$ 는 모든 fiber들로 구성된 영역이다.

$V_D$ 는 식(3.26)에 의하여 정의 된다.

$$V_D = \frac{1}{f} \int_\beta^\beta \rho(\phi) V d\phi \quad (3.26)$$

여기서  $f$ 는 부피분율(volume fraction)을 나타낸다.

식(3.26)을 식(3.25)에 대입하면 식(3.27)이 된다.

$$\frac{1}{V_D} \int_\Omega (e - e^{*E}) dV = \frac{f \int_\beta^\beta (e - e^{*E}) \rho(\phi) V d\phi}{\int_\beta^\beta \rho(\phi) V d\phi} \quad (3.27)$$

여기서 밀도분포함수(density distribution function)  $\rho(\phi)$ 는 식(3.28)을 만족한다.

$$\int_\beta^\beta \rho(\phi) d\phi = 1 \quad (3.28)$$

식(3.27)은 간단하게 식(3.29)으로 나타내어진다.

$$\frac{1}{V_D} \int_\Omega (e - e^{*E}) dV = f \int_\beta^\beta (e - e^{*E}) \rho(\phi) d\phi \quad (3.29)$$

그리고  $e - e^{*E}$ 는 global 좌표계에 대한 변형률

이므로 국부좌표계(local coordinate)는 global 좌표계로 변환하여야 한다.

$$e - e^{*E} = Z \cdot (e' - e^{*E}) \dots\dots\dots (3.30)$$

좌표변환에 의하여 식(3.31) 이 얻어진다.

$$e - e^{*E} = Z \cdot A \cdot X \cdot \bar{e} + Z \cdot B \dots\dots\dots (3.31)$$

여기서 A와 B는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A &= -(S - I) \cdot [(C_f - C_m) \cdot S + C_m]^{-1} \cdot (C_f - C_m) \\ B &= (S - I) \cdot [(C_f - C_m) \cdot S + C_m]^{-1} \cdot C_f \cdot e^T \end{aligned} \dots\dots\dots (3.32)$$

앞의 식(3.29)와 같은 방법으로 적분을 한다.

$$\bar{e} + \frac{1}{V_D} \int_{\Omega} (e - e^{*E}) dV = 0 \dots\dots\dots (3.24)$$

여기서

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_D} \int_{\Omega} (e - e^{*E}) dV &= \\ f \int_{\beta}^{\beta} (Z \cdot A \cdot X \cdot \bar{e} + Z \cdot B) \rho(\phi) d\phi &\dots\dots\dots (3.33) \end{aligned}$$

식(3.33)를 식(3.24)에 대입하면

$$\begin{aligned} \left( I + f \int_{\beta}^{\beta} Z \cdot A \cdot X \rho(\phi) d\phi \right) \bar{e} \\ = -f \int_{\beta}^{\beta} \rho(\phi) Z \cdot B d\phi \dots\dots\dots (3.34) \end{aligned}$$

이때  $\bar{e}$ 에 대하여 나타내면

$$\begin{aligned} \bar{e} = -f \left( I + f \int_{\beta}^{\beta} Z \cdot A \cdot X \rho(\phi) d\phi \right)^{-1} \\ \cdot \int_{\beta}^{\beta} Z \cdot B \rho(\phi) d\phi \dots\dots\dots (3.35) \end{aligned}$$

이때  $e^T$ 가 주어진 경우에는 아래의 식(3.29)와 같이 나타낼수 있다[8].

$$\bar{e} = -\frac{f}{\psi'} \left[ I + \frac{f}{\psi'} P \right]^{-1} \cdot Q \cdot B \dots\dots\dots (3.36)$$

여기서  $f$ 는 부피분율이며,  $\psi'$ 와 P와 Q는 부록 [3] 참조. 3차원 완전 임의 분포에서 fiber내부의 상태량의 계산은 식(3.37)에 따른다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_D} \int_{\Omega} F(\theta, \phi) dV &= \\ f \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} < F(\theta, \phi) > \rho_0 \sin\theta d\theta d\phi d\xi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho_0 \sin\theta d\theta d\phi d\xi} \end{aligned} \dots\dots\dots (3.37)$$

그러므로 식(3.24)의 계산은 다음과 같다.

$$\bar{e} + \frac{1}{V_D} \int_{\Omega} (e - e^{*E}) dV = 0 \dots\dots\dots (3.24)$$

여기서

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_D} \int_{\Omega} (e - e^{*E}) dV &= \\ f \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} < e - e^{*E} > \rho_0 \sin\theta d\theta d\phi d\xi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho_0 \sin\theta d\theta d\phi d\xi} \\ = f \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (Z \cdot A \cdot X \cdot \bar{e} + Z \cdot B) \rho_0 \sin\theta d\theta d\phi d\xi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho_0 \sin\theta d\theta d\phi d\xi} \end{aligned} \dots\dots\dots (3.38)$$

따라서 식(3.38)를 식(3.24)에 대입하면  $\bar{e}$ 는 식 (3.39)와 같다.

$$\begin{aligned} \bar{e} = \\ - \left( I + \frac{f \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} Z \cdot A \cdot X \rho_0 d\theta d\phi d\xi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho_0 \sin\theta d\theta d\phi d\xi} \right)^{-1} \\ \cdot \frac{f \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} Z \cdot B \rho_0 d\theta d\phi d\xi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho_0 \sin\theta d\theta d\phi d\xi} \dots\dots (3.39) \end{aligned}$$

#### 4. 형상기억합금에의 적용

먼저 복합재료에 prestrain  $e^P$ 을 준다. Fig. 8.

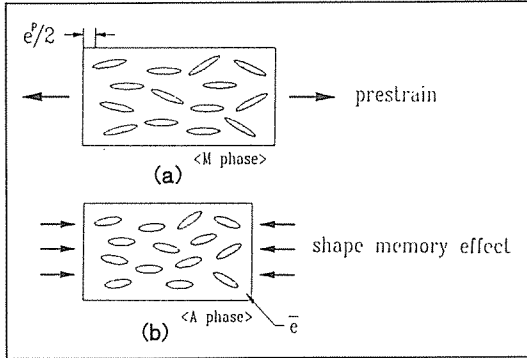


Fig. 8 Shape memory effect.

(a)의 prestrain을 작용시키면 복합재료 전체에 대하여  $e^p$ 가 작용한다. 이때 fiber는 같은 재료인 inclusion으로 작용한다.

소성변형이므로 체적일정조건의 가정을 사용하면

$$e^p = \left\{ e^p, -\frac{e^p}{2}, -\frac{e^p}{2}, 0, 0, 0 \right\}$$

와 같이 되고 prestrain  $e^p$ 를 가해주면 fiber에는  $e^p = X \cdot e^p$ 만큼의 소성변형이 발생한다.

prestrain을 가해진 후에 형상기억합금의 austenite 변태 ( $A_f$ ) 온도 이상으로 가열하면 형상 기억효과에 의하여 fiber는  $-e^p$ 만큼의 eigen-strain을 가지고, 이에 의하여 matrix에는  $\bar{e}$ 만큼의 strain이 발생한다.

fiber가 평면 분포 일때의 stress계산은 3절의 식 (3.28)을 이용하여  $\bar{e}$ 를 계산하는 식은 식(4.2)와 같다.

$$\bar{e} = -f \left( I + f \int_{\beta}^{\beta} Z \cdot A \cdot X \rho(\phi) d\phi \right)^{-1} \cdot \int_{\beta}^{\beta} Z \cdot (S - I) \cdot [(C_f - C_m) \cdot S + C_m]^{-1} \cdot C_f \cdot X \cdot e^p \rho(\phi) d\phi \quad (4.2)$$

식(4.3)을 이용하여  $\sigma_m$ 을 계산한다.

$$\langle \sigma_m \rangle = C_m \bar{e} \quad (4.3)$$

이때의 fiber에서의 응력은 식(4.4)를 이용하여

계산한다.

$$(1-f) \langle \sigma_m \rangle + f \langle \sigma_f \rangle = 0 \quad (4.4)$$

3차원 완전 임의 분포일때의  $\bar{e}$ 는 식(4.5)에 의하여 계산한다.

$$\bar{e} = - \left( I + \frac{f \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} Z \cdot A \cdot X \rho_0 \sin \theta d\theta d\phi d\xi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho_0 \sin \theta d\theta d\phi d\xi} \right)^{-1} \cdot \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} Z \cdot (S - I) \cdot [(C_f - C_m) \cdot S + C_m]^{-1} \cdot C_f \cdot X \cdot e^p \rho_0 \sin \theta d\theta d\phi d\xi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho_0 \sin \theta d\theta d\phi d\xi} \quad (4.5)$$

그러나 matrix에서의 소성을 고려하면 matrix에서의 유효응력(effective stress)은 matrix의 압축 항복응력보다 작다. 그러므로 matrix에서의 소성을 고려하기 위하여  $e^p$ 를 미지수로 대입하여  $\bar{e}$ 를 구한후에  $\bar{\sigma} = C\bar{e}$ 에 의하여 응력을 계산한다.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22})^2 + (\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{33})^2 + (\bar{\sigma}_{33} - \bar{\sigma}_{11})^2} = \sigma_{my} \quad (4.6)$$

식(4.6)을 만족하는  $e^p$ 를 구하여 다시  $\bar{e}$ 의 값을 구한다. Fig. 17은 fiber aspect ratio에 따른 matrix에서의 항복이 일어나는 prestrain의 크기를 나타내는 그래프이다.

## 5. 결과 및 고찰

본 연구에서는 두가지의 복합재료에 대하여 적용해 보았다.

본 연구에서는 prestrain이 3%인 경우에 대하여 composite[1]과 composite[2]에 대하여 fiber가 2차원 평면분포와 3차원 완전 임의분포에 대하여 적용하였다.

matrix에서의 압축잔류응력  $\bar{e}$ 의 계산은 식(4.2)을 Gauss 적분법으로 계산하였다.



Table 1. Mechanical properties of matrix and fiber composite(1)

	1100Al matrix	TiNi fiber(Ti-50.2% at Ni) (Austenite phase)
Young's modulus(Kgf/mm <sup>2</sup> )	7034	8359
Poisson's ratio	0.34	0.43
Yield strength(Kgf/mm <sup>2</sup> )	3.364	50.97

Table 2. Mechanical properties of matrix and fiber composite(2)

	AC4A matrix	TiNi fiber(Ti-44% at Ni) (Austenite phase)
Young's modulus(Kgf/mm <sup>2</sup> )	7300	6292
Poisson's ratio	0.34	0.43
Yield strength(Kgf/mm <sup>2</sup> )	11.3	80

$$\bar{\epsilon} = -f \left( I + f \int_{\beta}^{\beta} Z \cdot A \cdot X \rho(\phi) d\phi \right)^{-1} \cdot \int_{\beta}^{\beta} Z \cdot (S - I) \cdot [(C_f - C_m) \cdot S + C_m]^{-1} \cdot C_f \cdot X \cdot e^p \rho(\phi) d\phi \quad (4.2)$$

Fig. 9., Fig. 10., Fig. 11., Fig. 12.은 2차원 평면분포로 각각 composite[1], composite[2]에 대한 Uniform 분포와 Cosine-type 분포로 cut-off angle  $\beta = \frac{\pi}{2}$ 와  $\beta = \frac{\pi}{3}$  일 때의 volume fraction에 따른 matrix에서의 normalized stress의 크기를 나타낸다.

Fig. 13.는 2차원 평면 Cosine-type 분포로 cut-off angle  $\beta = \frac{\pi}{3}$ , volume fraction 0.2일 때 fiber aspect ratio,  $\alpha$ 에 대한 matrix에서의 stress의 변화이다.

Fig. 14.는 fiber의 aspect ratio가 5, volume fraction 이 0.2일 때의 cut-off angle  $\beta$ 의 변화에 따른 그래프이다.

Fig. 15.은 완전 3차원 임의 분포이며 fiber aspect ratio가 5일 때 volume fraction에 대한 matrix의 stress의 변화를 나타낸 그래프이다.

여기서  $\sigma_p$ 는 matrix에서의 소성을 고려한 것이

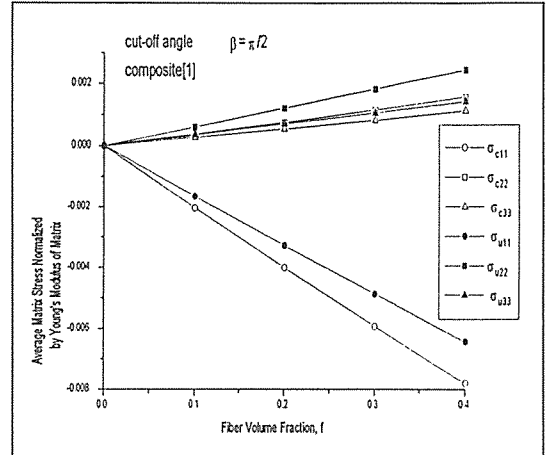


Fig. 9. Variation of normalized average stress in matrix due to shape memory effect.

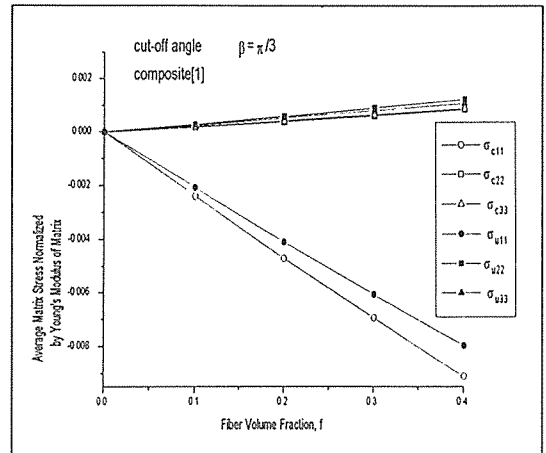


Fig. 10. Variation of normalized average stress in matrix due to shape memory effect.

다.

Fig. 16.은 완전 3차원 임의 분포일때의 volume fraction 0.2일 때의 fiber aspect ratio,  $\alpha$ 에 대한 matrix의 stress를 나타낸 그래프이다.

Fig. 17.은 volume fraction 0.05일 때 fiber aspect ratio에 따른 matrix에서의 항복이 시작되는 prestrain  $e^p$  를 나타낸 그래프이다.

Fig. 18.는 volume fraction 0.05이고 3% pres-

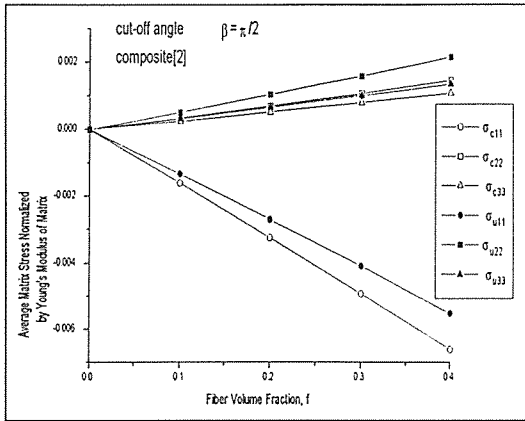


Fig. 11. Variation of normalized average stress in matrix due to shape memory effect.

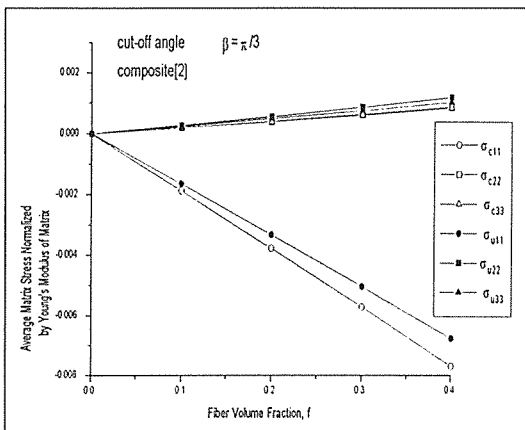


Fig. 12. Variation of normalized average stress in matrix due to shape memory effect.

train일 때 fiber aspect ratio에 대한 잔류응력을 고려한 Modified Law of Mixture [ 9]에 의한 항복응력을 나타낸 그래프이다.

## 6. 결 론

short fiber형태의 형상기억합금 금속기 복합재료에 대한 기계적 모델링을 두가지 복합재료에 대하여 적용하여 형상기억효과에 의한 matrix에서의

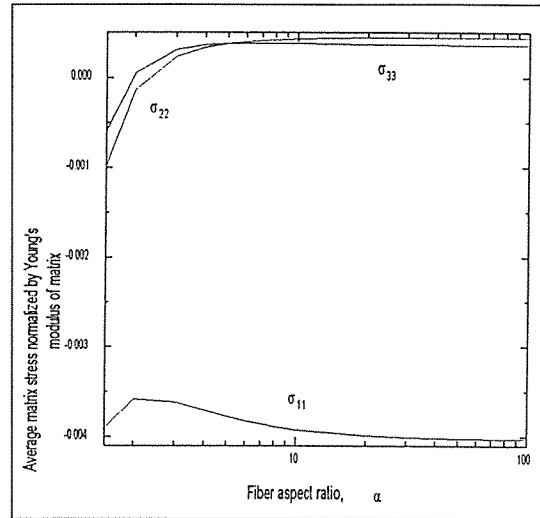


Fig. 13. Variation of the normalized residual stress in the matrix with the fiber aspect ratio.

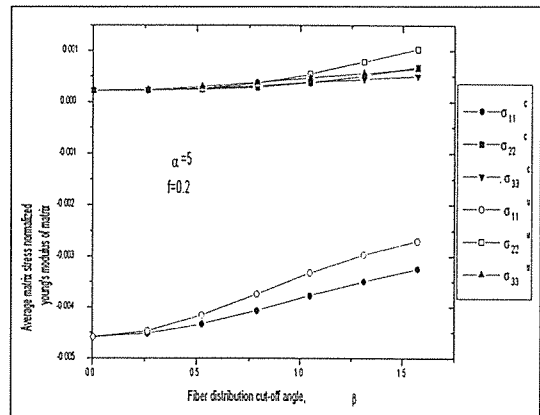


Fig. 14. Variation of normalized average residual stress in matrix with density distribution cut-off angle.

잔류응력을 계산하였다. 위의 계산 결과에 의하여 다음과 같은 결론을 얻게 되었다.

(1) fiber의 volume fraction과 aspect ratio가 커지거나 cut-off angle  $\beta$ 가 작아지면 형상기억효과에 의한 matrix내의  $\sigma_{11}$ 방향의 압축 잔류응력이 증가하고 그 크기를 정성적으로 알 수 있었다.

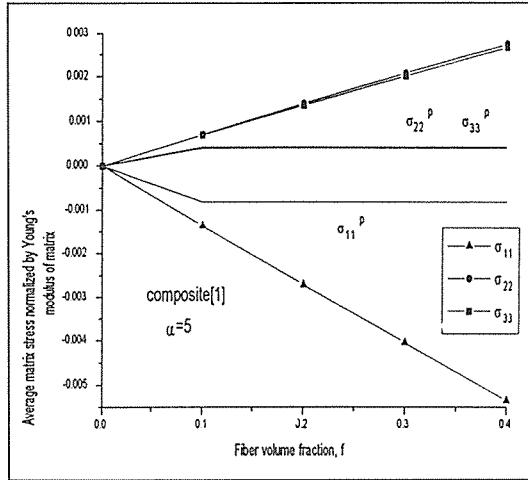


Fig. 15. Variation of the normalized residual stress in the matrix with the fiber volume fraction.

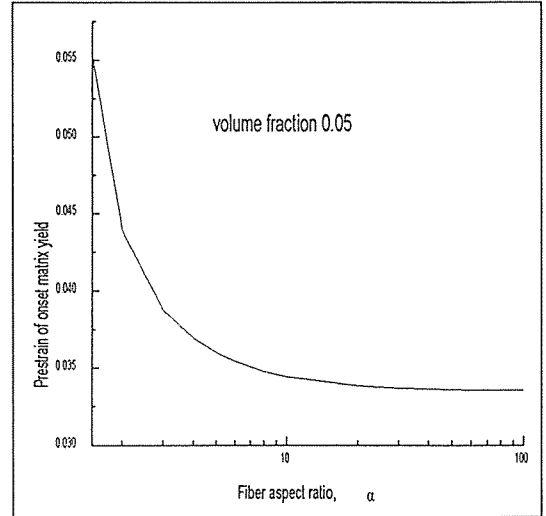


Fig. 17. Prestrain onset matrix yielding.

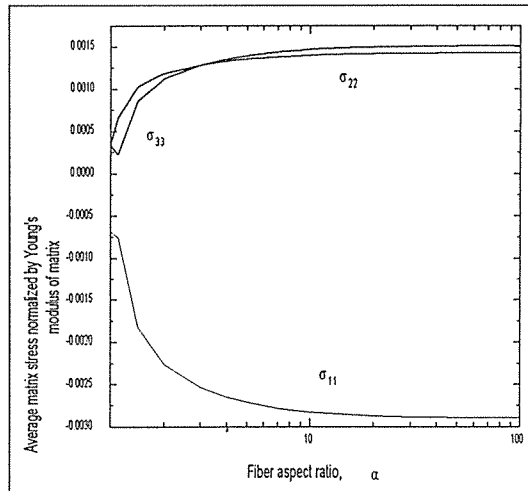


Fig. 16. Variation of the normalized residual stress in the matrix with the fiber aspect ratio.

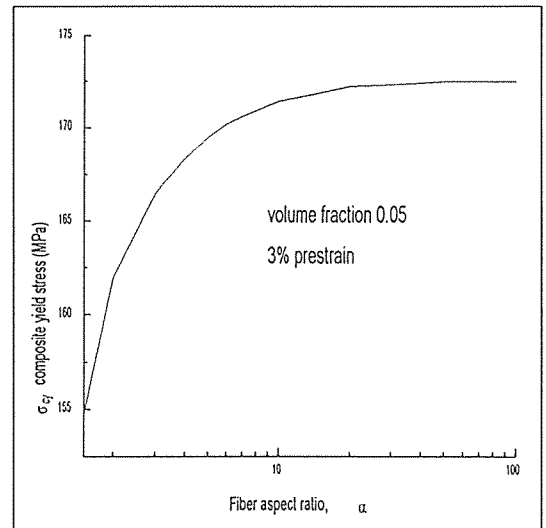


Fig. 18. Yielding stress from modified law of mixture.

(2) 형상기억효과에 의해 matrix에서 실제 발생하는 응력은 prestrain 3%인 경우 volume fraction 0.1 이상일 때 압축항복을 고려하면 matrix에 발생하는 압축응력은 거의 변하지 않음을 알 수 있다. 즉, matrix에서의 압축항복 때문에 형상기억효

과에 의한 back stress strengthen의 크기가 제한됨을 알 수 있었다.

## 후 기

본 연구는 교육부의 신소재연구분야 연구비지원

으로 수행된 연구결과로서 관계자 여러분께 깊은 감사를 드립니다.

### 참 고 문 헌

- [1] J. D. Eshelby, "The Determination of the Elastic Field of Ellipsoidal Inclusion and Related Problems", Proc. Roy. Soc., Vol. A241, pp. 376-396, 1957.
- [2] Y. Furuya, A. Sasaki and M. Taya, "On Enhanced Mechanical Properties of TiNi Shape Memory fiber/Al Matrix Composite," Materials Trans JIM, Vol. 34 No. 3, pp.224-227, 1993.
- [3] Y. Yamada, M. Taya and R. Watanabe, "Strengthening of Metal Matrix Composite by Shape Memory Effect," Materials Trans JIM, Vol. 34 No. 3, pp.254-260, 1993.
- [4] M. Taya, Y. Furuya, Y. Yamada, R. Watanabe, S Shibata and T. Mori, "Strengthening mechanisms of TiNi shape memory fiber/Al matrix composite," Proc. Smart Materials ed. by V.K. Varadan, SPIE pp.373-383, 1993.
- [5] M. Taya, K. E. Lulay and D. J. Lloyd, "Strengthening of a Particulate Metal Matrix Composite by Quenching", Acta metall. mater. Vol. 39, No. 1, pp.73-87, 1991.
- [6] M. Taya, A. Shimamoto and Y. Furuya, "Design of Smart Composites Based on Shape Memory Effect.", Proceedings of ICCM-10, Whistler, B.C., Canada, August 1995.
- [7] M. Taya, M. L. Dunn, "Elastic-plastic thermal stresses and deformation of short-fibre composites", Journal of Material Science, Vol. 29, pp.2053-2062, 1994.
- [8] M. Taya and M. Dunn, B Derby and J. Walker, "Thermal residual stress in a two-dimensional in-plane misoriented short fiber composite", Appl. Mech., Vol. 43, No. 5, pp.s 294-s303, 1990.
- [9] 김대수, "형상기억합금 FIBER 금속기 복합 재료의 강화와 거동 해석", 부산대학교 공과대학 공학석사 학위논문, 1996.



## 부 록

### 부록 [1]; Eshelby's tensor, $S_{ijkl}$

장구(prolate spheroid), 즉  $a_1 > a_2 = a_3$  에서의 Eshelby's tensor는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= S_{1111} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[ 1 - 2\nu + \frac{(3\alpha^2 - 1)}{(\alpha^2 - 1)} - \left\{ 1 - 2\nu + \frac{3\alpha^2}{(\alpha^2 - 1)} \right\} g \right] \\
 S_{22} &= S_{2222} = S_{3333} = \frac{3\alpha^2}{8(1-\nu)(\alpha^2 - 1)} + \frac{1}{4(1-\nu)} \left\{ 1 - 2\nu - \frac{9}{4(\alpha^2 - 1)} \right\} \\
 S_{12} &= S_{2222} = S_{1133} = \frac{\alpha^2}{8(1-\nu)(\alpha^2 - 1)} - \frac{1}{4}(1-\nu) \left\{ 1 - 2\nu + \frac{3}{4(\alpha^2 - 1)} \right\} \\
 S_{23} &= S_{2233} = S_{3322} = \frac{\alpha^2}{8(1-\nu)(\alpha^2 - 1)} - \frac{1}{4(1-\nu)} \left\{ 1 - 2\nu + \frac{3}{4(\alpha^2 - 1)} \right\} g \\
 S_{21} &= S_{2211} = S_{3311} = -\frac{\alpha^2}{2(1-\nu)(\alpha^2 - 1)} + \frac{1}{4(1-\nu)} \left\{ 3\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} - (1 - 2\nu) \right\} g \\
 S_{44} &= 2S_{2323} = \frac{\alpha^2}{4(1-\nu)(\alpha^2 - 1)} + \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ 1 - 2\nu - \frac{3}{4(\alpha^2 - 1)} \right\} g \\
 S_{55} &= 2S_{1313} = 2S_{1212} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ 1 - 2\nu - \frac{(\alpha^2 + 1)}{(\alpha^2 - 1)} \right\} - \frac{1}{4(1-\nu)} \left\{ 1 - 2\nu - \frac{3(\alpha^2 + 1)}{(\alpha^2 - 1)} \right\} g
 \end{aligned}$$

여기서

$$g = \frac{\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{3/2}} \left[ \alpha(\alpha^2 - 1)^{1/2} - \cosh^{-1} \alpha \right] \quad \alpha = \frac{a_1}{a_3} > 1$$

### 부록 [2];

Compression moulding으로 제조한 composite의 경우는 Fig. 4.(b)의 fiber의 자세가  $\theta = \frac{\pi}{2}$ 로 일정하게 주어지며, 평면적 균일 분포(in-plane uniform distribution) 이다.

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & 0 & 0 & 0 & Z_{16} \\ Z_{12} & Z_{11} & 0 & 0 & 0 & -Z_{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_{44} & Z_{45} & Z_{44} \\ 0 & 0 & 0 & -Z_{45} & -Z_{44} & 0 \\ -\frac{Z_{16}}{2} & -\frac{Z_{16}}{2} & 0 & 0 & 0 & Z_{66} \end{bmatrix}$$

여기서,  $Z_{11} = \cos^2 \phi$

$$Z_{12} = \sin^2 \phi$$

$$Z_{16} = -2 \cos \phi \sin \phi$$

$$Z_{44} = \cos \phi$$

$$Z_{45} = \sin \phi$$

$$Z_{66} = \cos 2 \phi$$

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 & 0 & 0 & X_{16} \\ X_{12} & X_{11} & 0 & 0 & 0 & -X_{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_{44} & Z_{45} & X_{44} \\ 0 & 0 & 0 & -X_{45} & -X_{44} & 0 \\ \frac{-X_{16}}{2} & \frac{-X_{16}}{2} & 0 & 0 & 0 & X_{66} \end{bmatrix}$$

여기서,  $X_{11} = \cos^2 \phi$

$$X_{12} = \sin^2 \phi$$

$$X_{16} = 2 \cos \phi \sin \phi$$

$$X_{44} = \cos \phi$$

$$X_{45} = -\sin \phi$$

$$X_{66} = \cos 2 \phi$$

부록[3];

uniform in-plane distribution 인 경우

$$Q = \int_{-\beta}^{\beta} Z \, d\phi$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

여기서  $Q_{11} = \beta + \frac{1}{2} \sin 2 \beta$

$$Q_{12} = \beta - \frac{1}{2} \sin 2 \beta$$

$$Q_{33} = 2 \beta$$

$$Q_{44} = 4 \sin \beta$$

$$Q_{66} = 2\beta + \sin 2\beta$$

$$P = \int_{-\beta}^{\beta} Z \cdot A \cdot X d\phi$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{12} & P_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{66} \end{bmatrix}$$

$$P_{11} = A_{11}S_1 + \frac{(A_{21} + A_{12})}{4}C_3 + A_{22}S_2 + \frac{A_{55}}{2}C_3$$

$$P_{12} = \frac{1}{4}(A_{11} + A_{22} - 2A_{55})C_3 + A_{21}S_2 + A_{12}S_1$$

$$P_{13} = A_{12}C_2 + A_{23}C_1$$

$$P_{21} = \frac{1}{4}(A_{11} + A_{22} - 2A_{55})C_3 + A_{21}S_1 + A_{12}S_2$$

$$P_{22} = A_{11}C_1 + A_{22}C_2 + \frac{1}{4}(A_{21} + A_{12})C_3 + \frac{1}{2}A_{55}C_3$$

$$P_{23} = A_{12}C_1 + A_{23}C_2$$

$$P_{31} = A_{21}C_2 + A_{23}C_1$$

$$P_{32} = A_{21}C_1 + A_{23}C_2$$

$$P_{33} = 2A_{22}S_3$$

$$P_{44} = 4(A_{44}C_2 + A_{55}C_1)$$

$$P_{55} = 4(A_{44}C_1 + A_{55}C_2)$$

$$P_{66} = \frac{1}{2}(A_{11} - A_{21} - A_{12} + A_{22})C_3 + 4A_{55}S_1$$

$$\text{여기서 } S_1 = \frac{1}{16}(12\beta + 8\sin 2\beta + \sin 4\beta)$$

$$C_3 = \frac{1}{4}(\beta - \frac{\sin 4\beta}{4})$$

$$S_2 = \frac{1}{16}(12\beta - 8\sin 2\beta + \sin 4\beta)$$

$$C_1 = (\beta - \frac{\sin 4\beta}{2})$$

$$C_2 = (\beta + \frac{\sin 4\beta}{2})$$