

## 論文

## 적층 복합재료 얇은 벽 보의 강제진동특성에 관한 연구

송오섭\* · 주정수\*\*

## A Study on the Forced Vibration Characteristics of Laminated Composite Thin-Walled Beams

Oh-Seop Song\* and Joung-Su Ju\*\*

## ABSTRACT

The forced vibration response of laminated composite thin-walled beams of biconvex-type cross-section exposed to various concentrated and/or distributed, time-dependent external excitations is investigated. The thin-walled beam model incorporates a number of nonclassical effects of transverse shear, primary and secondary warping, rotary inertia and anisotropy of constituent materials. The forced vibration response characteristics of a composite thin-walled beam exhibiting the circumferentially asymmetric stiffness (CAS) configuration are exploited in connection with the structural bending-torsion coupling resulting from directional properties of fiber reinforced composite materials and from ply stacking sequence. An exact solution methodology based on the Laplace transform technique and an approximate solution technology based on the extended Galerkin procedure are investigated and the results from these two different methodologies are compared.

## 초 록

복합재료 얇은 벽보에 집중 또는 임의의 형태로 분포된 하중이 시간에 따라 하모닉 형태 또는 비하모닉 형태로 작용할 때의 강제진동 응답특성에 관하여 고찰하였다. 얇은 벽보 구조모델은 복합재료에서 강하게 나타나는 전단변형효과와 1차 및 2차 와핑구속효과, 회전관성효과 및 이방성 재료 특성이 고려되었다. 섬유강화 복합재료의 섬유각 및 적층방법에 따른 굽힘과 비틀림 사이의 구조연성효과를 나타내는 CAS 구조물에 다양한 형태의 외부 동하중이 작용할때의 강제진동 응답특성에 대하여 고찰하였다. 엄밀해를 얻을 수 있는 라플라스 변환법과 빠르고 손쉽게 근사해를 얻을 수 있는 확장된 Galerkin 방법에 대하여 고찰하고 그 결과를 비교하였다.

## 1. 서 론

섬유강화복합재료(fiber-reinforced composites)는 1940년대부터 본격적으로 사용되기 시작하여 급속히 여러분야에서의 사용과 그에 따른 연구가 증가되고 있다. 복합재료는 기존의 금속보다 높은

비강도(specific strength) 및 비탄성계수(specific stiffness)를 가짐으로써 자체 하중절감효과를 얻을 수 있으며 또한 고온에 잘 견디는 특성, 피로에 강하며 우수한 내마모성 및 내부식성등과 같은 우수한 특성들을 필요로 하는 항공, 우주, 기계분야에 널리 쓰이고 있다[1].

\* 충남대학교 기계공학과

\*\* 충남대학교 일반대학원 기계공학과

그러나 복합재료의 이방성(anisotropy)으로 인하여 기존의 등방성(isotropic)재료 구조물에 적용되는 역학이론을 재검립 또는 재구성해야 할 필요성을 낳게 되었다. 특히 복합재료 구조물의 동력학적인 해석분야는 아직도 많은 연구의 여지를 남기고 있는 분야들 중의 하나이다.

또한 구조물의 자체중량 절감효과 및 구조적 효율성이 높은 얇은 벽 보(thin-walled beam)의 사용이 항공, 우주, 기계, 토목, 건축분야에서 증가되어져 왔다. 얇은 벽 보의 보의 길이(L)가 보의 대표단면치수(b) 보다 대단히 크며( $L \geq 10b$ ) 보의 대표단면치수(b)가 보의 벽두께(h)보다 대단히 큰( $b \geq 10h$ ) 구조물을 지칭한다[2]. 얇은 벽 보의 대표적인 사용 예는 항공기날개, 헬기 로우터 블레이드, 건설현장에서 많이 볼 수 있는 H형강 등에서 찾아볼 수 있으며 그 형상적 특성으로 인하여 일반보(solid beam)와 다른 접근을 요한다. 이러한 구조물들은 현재 여러 가지 장점을 갖는 복합재료 구조물로 대체되고 있으나 복합재료 얇은 벽 보의 복합재료 평판이나 일반보(solid beam)에 비해서 연구가 상대적으로 미진한 구조모델이다.

복합재료는 전단변형에 대한 강성이 기존의 금속재료에 비하여 매우 작으므로 전단변형효과가 그 동적거동에 있어서 중요한 영향을 미치게 된다.

와핑구속효과는 보의 길이방향을 따라서 불균일한 torque가 작용하거나 가해진 torque에 의하여 발생하는 와핑이 고정단에서 구속됨에 따라 비틀림에 의한 굽힘이 발생하는 현상이다. 이러한 와핑구속효과는 일반 보(solid beam)에서 보다 얇은 벽 보에서 크게 나타나게 된다. 또한 얇은 벽 보에서 벽의 두께가 상대적으로 두꺼워 질수록 2차 와핑구속효과에 의한 영향이 상대적으로 증가한다. 특히 1차 와핑구속효과를 나타내지 않는 경우(예: Neuber Tube)에도 2차 와핑은 항상 존재하게 된다[3-5].

또한 복합재료 얇은 벽 보를 구성하는 lamina의 섬유각과 적층방법(layerup)에 따라서 다양한 구조적 연성효과가 발생하며 또한 방향에 따른 강성의 변화가 생기므로 구조물의 동적응답 특성에 매우 큰 변화를 가져올 수 있다.

현재까지 복합재료 구조물의 자유진동문제는 많은 연구자들의 연구주제가 되어 왔으나 시간에 따라 변화하는 외부하중에 의한 복합재료 구조물의 강제진동문제에 대한 연구는 그리 많지 않은 편이

다.

본 논문에서는 재료, 구조적으로 상하 굽힘운동과 비틀림운동이 연성되고 이와는 별도로 좌우 굽힘운동과 보의 길이방향운동이 연성되도록 설계된 biconvex 단면의 CAS (Circumferentially Asymmetric stiffness) type 복합재료 얇은 벽 보의 강제진동 문제에 대하여 고찰하였다.

즉 공간적으로 임의적으로 분포되고 시간에 따라 하모닉 또는 비 하모닉으로 변화하는 동적하중을 받는 복합재료 얇은 벽 보의 동적반응에 대한 체계적인 해석을 통하여 기존의 금속재료 구조물과는 매우 다른 동적반응에 관한 설계idea를 제공하고자 한다.

본 연구 결과는 복합재료의 굽힘-비틀림 연성효과를 이용하여 공기역학적인 동적하중을 받는 복합재료의 항공기 및 헬기의 날개의 공력탄성적인 설계에 응용될 수 있다. 또한 sonic boom이나 blast loading 과 같은 충격하중을 받는 보 구조물의 동적설계의 data로서 활용될 수 있다.

## 2. 본 론

### 2-1. 변위장

얇은 벽 보의 단면 형상은 단면내에서 변하지 않는다는 corss-section non-deformability 조건을 고려하고 전단변형효과 및 1차, 2차 와핑구속효과를 포함하는 얇은 벽 보의 변위장은 다음과 같다[2,4].

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(z, t) - y\phi(z, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(z, t) + x\phi(z, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(z, t) + \theta_x(z, t)[y(s) + nm] \\ &\quad + \theta_y(z, t)[x(s) + nl] - \phi'(z, t)[F_w(s) + na(s)] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ a-c})$$

여기에서

$$F_w(s) = \int_0^s [r_n(\bar{s}) - \psi] d\bar{s} \quad : \text{1차와핑함수}$$

$$na(s) = n[-y(s)l + x(s)m] \quad : \text{2차와핑함수}$$

$$\psi = \frac{\oint r_n(s) ds}{\oint ds} \quad : \text{torsional function}$$

$$l = \cos(n, x), \quad m = \cos(n, y) \quad : \text{방향cosine}$$

$$r_n(s) = x(s)l + y(s)m$$

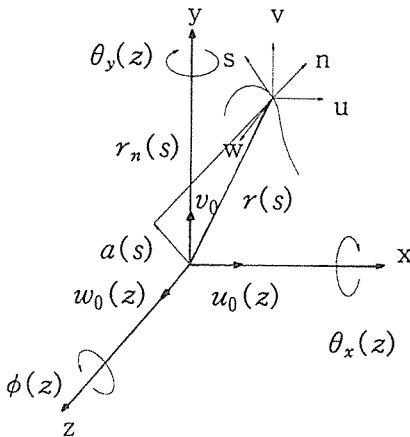


Fig. 1. Displacement field for the biconvex thin-walled beam model.

$$\begin{aligned} \theta_x(z, t) &= \gamma_{yz}(z, t) - v'_0(z, t) \dots\dots\dots (2 \text{ a-g}) \\ \theta_y(z, t) &= \gamma_{xz}(z, t) - u'_0(z, t) \end{aligned}$$

여기에서  $\bar{s}$ 는 dummy 적분변수이며  $u_0, v_0, w_0$ 는 x, y, z방향의 병진변위(translation)이며  $\theta_x, \theta_y, \phi$ 는 x, y, z 축 중심의 보 단면의 회전각(rotation)을 나타낸다(Fig.1).  $\gamma_{yz}$ 와  $\gamma_{xz}$ 는 각각 y-z평면과 x-z 평면에서의 전단변형률을 나타낸다. 식(1-c)의 밑줄 친 첫째, 둘째항은 굽힘관련 2차와평면변위이며 셋째 항은 비틀림관련 2차와평 변위를 나타낸다.

## 2.2. 구성방정식

Generally orthotropic 복합재료의 응력-변형을 관계식은 다음과 같다[1].

$$\begin{pmatrix} \sigma_{ss} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{nn} \\ \sigma_{zn} \\ \sigma_{ns} \\ \sigma_{sz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{ss} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{nn} \\ \gamma_{zn} \\ \gamma_{ns} \\ \gamma_{sz} \end{pmatrix} \dots\dots (3)$$

식(3)에서 cross-section non-deformability조건 으로부터  $\epsilon_{nn} = \gamma_{ns} = 0$ 이 되며 hoop stress  $\sigma_{ss} = 0$ 인 가정하에  $\epsilon_{ss}$ 에 대하여 풀어 stress resultants와 stress couples를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} N_{zz} \\ N_{sz} \\ N_{zz} \\ N_{zz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{zz}^o \\ \gamma_{sz}^o \\ \phi' \\ \epsilon_{zz}^o \end{pmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

$$N_{nz} = A_{44} \gamma_{nz}$$

여기에서  $\epsilon_{zz}^o$ 와  $\epsilon_{zz}^n$ 은 각각 on-contour와 off-contour (secondary warping)에 관한 보의 축방향 변형을 성분이며  $K_{ij} (=K_{ji})$ 는 A, B, D matrices 성분으로 표시되는 modified stiffness 항들이다.

## 2.3. 운동방정식과 경계조건식 유도

복합재료 구조물에서는 섬유각 및 적층방법에 따라 모든 종류의 운동이 서로 연성(Coupling)되어 나타날 수 있으나 본 연구에서는 y-z 평면 내에서의 종방향 굽힘운동과 비틀림 운동이 서로 연성되어 나타나고 이와는 별도로 x-z 평면 내에서의 횡방향 굽힘과 보의 축방향(z-방향) 운동이 서로 연성되는 CAS (Circumferentially Asymmetry Stiffness) 구조물(Fig. 2)에 관하여 다음과 같은 Hamilton원리를 이용하여 종방향굽힘과 비틀림운동이 연성된 운동방정식과 경계조건식을 유도하였다.

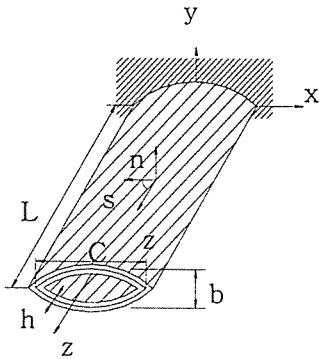
$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta U - \delta T - \delta W_{nc}) dt = 0, \quad \delta v_0 = \delta \theta_x = \delta \phi = 0 \quad \text{at } t = t_0, t_1 \dots\dots\dots (5)$$

여기에서 운동 에너지

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \oint_c \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \rho h \, ds \, dz$$

탄성 에너지

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \oint_c \int_h [\sigma_{zz} \epsilon_{zz} + \sigma_{sz} \gamma_{sz} + \sigma_{nz} \gamma_{nz}] dn \, ds \, dz \dots\dots\dots (6 \text{ a-c})$$



$L=80$  inch,  $C=2R \sin \theta_0$  inch  
 $b=2R(1-\cos \theta_0)$  inch,  $h=0.4$  inch  
 재료 : Graphite/Epoxy,  $\theta(y)=-\theta(-y)$

Fig. 2. Configuration of CAS biconvex crosssection thin walled beam.

외부일의 변분

$$\delta W = \int_0^L (p_y \delta v_0 + m_z \delta \phi) dz$$

### 1) 운동방정식(Equation of motion)

$$\begin{aligned}
 & a_{55} \left[ \frac{\partial^2 v_0(z,t)}{\partial z^2} + \frac{\partial \theta_x(z,t)}{\partial z} \right] + a_{56} \frac{\partial^3 \phi(z,t)}{\partial z^3} \\
 & + p_y(z,t) - b_1 \frac{\partial^2 v_0(z,t)}{\partial t^2} = 0 \\
 & a_{33} \frac{\partial^2 \theta_x(z,t)}{\partial z^2} + a_{37} \frac{\partial^2 \phi(z,t)}{\partial z^2} - a_{55} \left[ \frac{\partial v_0(z,t)}{\partial z} + \theta_x(z,t) \right] \\
 & - a_{56} \frac{\partial^2 \phi(z,t)}{\partial z^2} - (b_4 + b_{14}) \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} = 0 \\
 & -a_{66} \frac{\partial^4 \phi(z,t)}{\partial z^4} - a_{56} \left[ \frac{\partial^3 v_0(z,t)}{\partial z^3} + \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} \right] \\
 & + a_{37} \frac{\partial^2 \theta_x(z,t)}{\partial z^2} + a_{77} \frac{\partial^2 \phi(z,t)}{\partial z^2} + m_z(z,t) \\
 & - (b_4 + b_5) \frac{\partial^2 \phi(z,t)}{\partial t^2} + (b_{10} + b_{18}) \frac{\partial^4 \phi(z,t)}{\partial z^2 \partial t^2} = 0
 \end{aligned} \quad (7 \text{ a-c})$$

여기에서 외부하중  $p_y$  와 외부의 torque 하중  $m_z$  는 일반적으로

$$p_y = F_0 f(z) g(t), \quad m_z = M_0 f(z) g(t) \quad (8)$$

의 형태로 표현할 수 있다.

여기에서  $f(z)$ 는 하중의 공간적 분포를 나타내며 [예 : Dirac delta 함수,  $\delta(z-z_0)$  for 집중하중, Heaviside 함수,  $H(z-z_1)-H(z-z_1)$  for 분포하중]

$g(t)$ 는 하중의 시간적 변화 형태를 나타낸다. [예 :  $e^{i\omega_f t}$  for 하모닉하중,  $e^{-kt}$  for 지수함수적으로 감소하는 비하모닉 하중]

### 2) 경계조건(Boundary conditions)

at  $z=0$

$$v_0 = \theta_x = \phi = \phi' = 0 \quad (9)$$

at  $z=L$

$$\begin{cases}
 a_{55} \left( \frac{\partial v_0}{\partial z} + \theta_x \right) + a_{56} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \\
 a_{33} \frac{\partial \theta_x}{\partial z} + a_{37} \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \\
 -a_{66} \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} - a_{56} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} + \frac{\partial \theta_x}{\partial z} \right) + \\
 a_{37} \frac{\partial \theta_x}{\partial z} + a_{77} \frac{\partial \phi}{\partial z} + (b_{10} + b_{18}) \frac{\partial^3 \phi}{\partial z \partial t^2} = 0 \\
 a_{66} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + a_{56} \left( \frac{\partial v_0}{\partial z} + \theta_x \right) = 0
 \end{cases} \quad (10 \text{ a-d})$$

여기에서  $a_{ij}$ 는 구조물의 여러 stiffness를 뜻하며,  $b_i$ 는 inertia 양을 의미한다.

식 (7,9,10)에서 실선으로 밑줄친 항들은 와핑구속 효과를 고려한 결과로서 나타난 항목들이며 특히  $a_{56}$ 을 포함한 항들은 전단변형과 와핑구속과의 상호연성효과를 나타내고 있다.

또한 점선으로 밑줄친  $a_{37}$ 을 포함하고 있는 항들은 섬유각을 CAS방식으로 배열함으로써 나타난 굽힘-비틀림 연성항들로서 섬유각에 따라  $a_{37}$ 의 크기와 부호가 바뀌게 되며 이에 따라 굽힘-비틀림간 연성효과와 크기 및 방향이 변화하게 된다. 즉, 굽힘하중에 의하여 발생하는 비틀림효과는  $a_{37}$ 의 크기에 비례하며 또한  $a_{37}$ 의 부호의 변화에 따라 굽힘하중에 의해 발생하는 비틀림효과가 시계방향 또는 반시계방향으로 바뀌게 된다.

이러한 효과를 항공기 날개에 응용하여 외부의

굽힘하중에 의한 날개단면의 비틀림각의 방향을 바꿈으로써 공탄성적 성능 향상에 이바지 할 수 있다.

## 2-4. 해석방법

1) Harmonic loading에 의한 강제진동 응답은 다음과 같이 나타내어진다.

$$[v_0(\eta, t), \theta_x(\eta, t), \phi(\eta, t)] = [V(\eta), X(\eta), \Phi(\eta)]e^{i\omega_f t} \quad (11)$$

여기에서  $\omega_f$ 는 하모닉하중의 가진주파수이다.  $\eta(=z/L)$ 는 무차원화 된 보의 축방향 좌표이다.

### ① Extended Galerkin's Method[7]

식(5,6)을 이용한 Hamilton's principle에 의해 유도된 결과식에

$$[V(\eta), X(\eta), \Phi(\eta)] = \sum_{j=1}^N [a_j \psi_j^{(1)}(\eta), b_j \psi_j^{(2)}(\eta), c_j \psi_j^{(3)}(\eta)] \quad (12)$$

를 대입하여 두께방향(n-방향)으로 적분하고 다시 단면의 contour방향(s-방향)으로 적분하며 마지막으로 보의 길이방향(z-방향)으로 적분하면 다음과 같은 matrix 식이 유도된다.

$$[A] \{x\} = \{f\} \quad (13)$$

여기서 A matrix는 구조물의 모든 특성이 내재된  $3N \times 3N$  matrix이며, 변위 coefficient vector  $\{x\}$ 와 loading vector  $\{f\}$ 는  $3N \times 1$  vector가 된다. 식(12)에서 가정된 변위의 변위coefficients vector  $\{x\} = \{a_1, a_2, \dots, a_N, b_1, b_2, \dots, b_N, c_1, c_2, \dots, c_N\}^T$ 으로 주어진다.

위의 matrix식(13)에서  $\{x\}$ 에 대하여 풀어 식(12)에 대입한 후 다시 식(11)에 대입하면 최종강제진동 응답을 얻을 수 있다.

식(12)에서의  $\psi_j(\eta)$ 는 원래의 Galerkin method와 달리 모든 경계조건을 만족시킬 필요는 없으나 해의 빠른 convergence를 위하여 가능한 한 많은

경계조건을 만족시킬 수 있는 함수를 선택하는 것이 중요하다.

### ②Laplace Transform method[6]

식(7-10)에 식(11)을 대입한 후, 보의 span에 관하여 Laplace transform한 후,  $\bar{V}(s), \bar{X}(s), \bar{\Phi}(s)$ 를 구한 후 보의 root에서의 경계조건을 대입한다. 이들을 inverse Laplace transform 시키고 보의 끝단에서의 경계조건을 대입하면 다음과 같은 matrix equation이 얻어진다.

$$[A] \{x\} = \{f\} \quad (14)$$

윗식(14)에서 Laplace 변환에서 나타난 unknowns vector인  $\{x\}$ 에 대하여 풀면 엄밀해인  $V(\eta), X(\eta), \Phi(\eta)$ 를 얻을 수 있으며 이를 식(11)에 대입하여 최종 해를 얻을 수 있다.

2) non-harmonic loading에 의한 동적응답은 expansion theorem에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[v_0(z, t), \theta_x(z, t), \phi(z, t)] = \sum_{r=1}^N [v_{0r}(z), \theta_{xr}(z), \phi_r(z)] q_r(t) \quad (15)$$

여기에서  $v_{0r}, \theta_{xr}, \phi_r$ 은 자유진동해석을 통하여 얻어진 r 번째 모드 형상이다. 또한 자유진동해석을 통하여 유도된 orthogonality condition은 다음과 같다.

$$\int_0^L [b_1 v_{0s} v_{0r} + (b_4 + b_{14}) \theta_{xs} \theta_{xr} + (b_4 + b_5) \phi_s \phi_r + (b_{10} + b_{18}) \phi_s' \phi_r'] dz = 0 \quad (16)$$

식(15)에서 가정된 해와 orthogonality condition 식(16)을 이용하여 non-harmonic loading이 작용할 때의 동적 반응을 다음 식을 통하여 얻을 수 있다.

$$\ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = N_r g_r(t) \quad (7)$$

여기에서  $g_r(t)$ 는 시간에 관하여 임의로 변화하

는 하중특성을 나타내며 convolution integral을 통하여  $q_r(t)$ 를 구하였다.

### 2.3. 수치해 결과 및 고찰

수치해석에 사용된 구조모델과 하중의 형태는 다음과 같다.

동적하중은 시간에 관하여 harmonic 형태와 하중이 시간에 따라 지수함수적으로 감소하는 non-harmonic 형태로 주어지는 경우를 해석하였고, 공간적으로는 한 점에 하중이 작용하는 집중하중 half-sine 형태로 보의 일부에 분포하중의 형태로 작용하는 경우에 대하여 고찰하였다 (Fig. 3).

Fig. 4에서 섬유각의 변화에 따른 각 stiffness  $a_{ij}$ 의 크기 및 부호의 변화를 나타내었다.

그림에서 보듯이 굽힘강성 ( $a_{33}$ )과 와핑강성 ( $a_{66}$ )은 섬유각  $90^\circ$ 일 때 최대가 되며 굽힘-비틀림 연성강성 ( $a_{37}$ )과 전단변형-와핑연성강성 ( $a_{56}$ )은 섬유각  $0^\circ$ 에서 0이 되며 섬유각  $90^\circ$ 를 경계로 그 부호가 바뀌는 것을 알 수 있다.

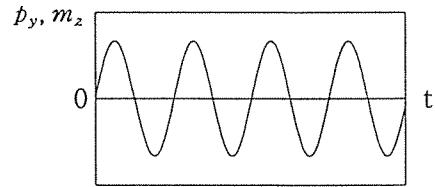
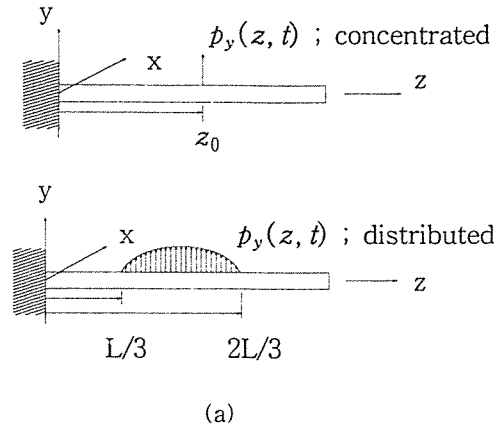
#### 1) 근사해(Extended Galerkin's Method)와 엄밀해(Laplace Transform Method) 비교

Extended Galerkin's Method에 대한 검증을 위하여 굽힘 고유진동수와 굽힘 동적 응답에 대하여 엄밀해를 얻을 수 있는 Laplace Transform 방법과 비교하였으며 Table 1, 2에 나타난 바와 같이 Extended Galerkin's Method는 Laplace 변환법에 비하여 매우 짧은 계산시간으로( $N=7$ 일 때 수렴) 엄밀해와 완전히 또는 거의 일치하는 해를 얻을 수 있었다.

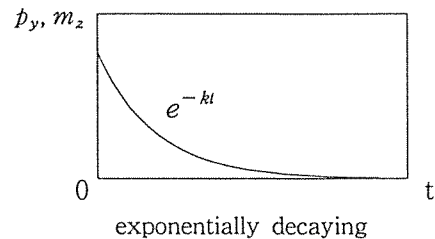
#### 2) 결과 및 고찰

외부 동적하중이 주어지는 경우의 동적응답을 구하기 위한 첫단계로서 각각 다른 섬유각( $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ )에 대하여 1차, 2차, 3차고유진동수를 구하였으며 여기에서는 섬유각이 증가할수록 굽힘강성도가 크게 증가하여 각각의 고유진동수가 큰 폭으로 증가하는 것을 볼 수 있으며 Table 3에 그 결과를 나타내었다.

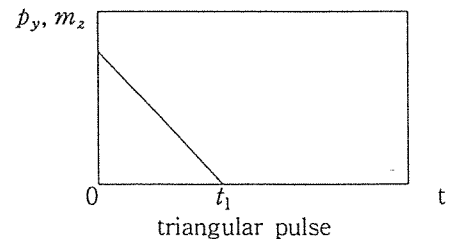
Table 4에서는 2차 와핑구속효과가 여러 섬유각 조건에서 고유진동수에 미치는 영향을 나타내었



harmonic



exponentially decaying



triangular pulse

(b)

Fig. 3. Configuration of loading.

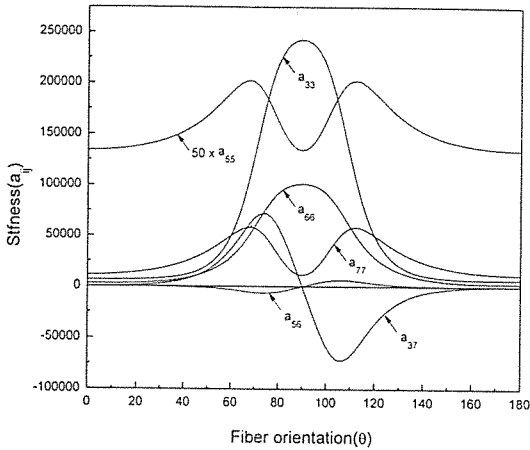


Fig. 4. Variation of stiffness quantities for different fiber orientation.

Table 1. Comparison of first three bending natural frequencies

Fiber orientation ( $\theta$ )	Extended Galerkin's Method			Laplace Transform Method		
	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
0°	40.3	250.6	693.9	40.3	250.6	693.8
90°	239.3	1280	3014	239.3	1280	3014

(unit : rad/s)

Table 2. Comparison of non-dimensional dynamic responses in deflection at free-end

Fiber orientation ( $\theta$ )	Excitation frequency $\omega_f$ (rad/sec)	Extended Galerkin's Method	Laplace Transform Method
0°	50	0.00278918	0.00278918
	100	0.000375133	0.000375139
90°	50	0.0000413359	0.0000413359
	100	0.0000483027	0.0000483027

$$(\bar{F}_0 = \frac{F_0 L}{a_{55}} = 5 \times 10^{-9}, \eta_0 = 0.5)$$

다. 섬유각 45°, 60°부근에서 2차 와핑에 의한 효과가 가장크게 나타났다.

Table 5에서는 전단변형효과가 굽힘 고유진동수

Table 3. Natural frequencies for fiber orientations

Fiber orientation ( $\theta$ )	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$
0°	40.3	250.6	625.6
30°	43.5	270.1	746.7
45°	52.4	324.4	892.0
60°	77.5	472.7	1270
75°	136	773	1333
90°	239	1280	3014

(unit : rad/s)

Table 4. Effect of secondary warping effect on the natural frequencies for various fiber orientations

$\theta$	$\omega_1$		$\omega_2$		$\omega_3$	
	a	b	a	b	a	b
0°	40.3	40.0 (0.7%)	250.6	249.0 (0.6%)	625.6	625.0 (0.1%)
30°	43.5	42.6 (2.0%)	270.1	265.0 (1.9%)	746.7	733.1 (1.8%)
45°	52.4	50.3 (4.0%)	324.4	311.7 (3.9%)	892.0	857.4 (3.9%)
60°	77.5	74.4 (4.0%)	472.7	454.5 (3.8%)	1270	1125 (3.5%)
75°	136	131 (2.1%)	773	761 (1.6%)	1333	1329 (0.3%)
90°	239	238 (0.5%)	640	638 (0.3%)	1280	1275 (0.4%)

$\theta$  : Fiber orientation

a : with secondary warping restraint effect

b : without secondary warping restraint effect

( ) : % difference

Table 5. Effect of transverse shear on the bending natural frequencies

$\theta$	$\omega_1$		$\omega_2$		$\omega_3$	
	a	b	a	b	a	b
0°	40.3	40.3 (0%)	250.6	252.1 (0.6%)	693.9	703.8 (1.4%)
90°	239	247 (3.4%)	1280	1545 (21%)	3014	4313 (43%)

$\theta$  : Fiber orientation

a : with transverse shear

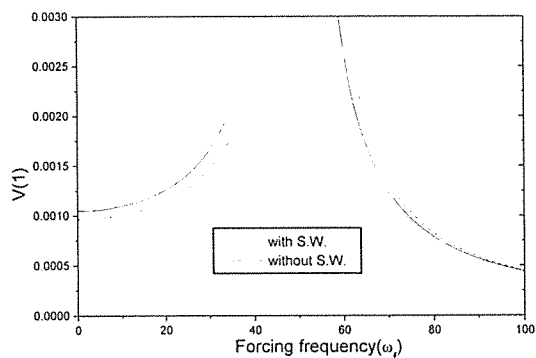
b : without transverse shear

( ) : % difference

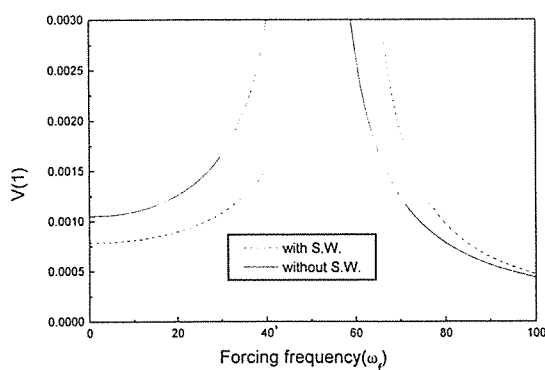
에 미치는 영향에 대하여 나타내었다. 고차 모우드로 갈수록 그 효과가 크게 나타나며 섬유각  $90^\circ$ 의 경우가 섬유각  $0^\circ$ 의 경우보다 전단변형에 의한 효과가 대단히 크게 나타났다. 전단변형효과에 의한 3차 고유진동수의 차이는 섬유각  $90^\circ$ 의 경우 43%에 달하였다.

Fig. 5에서는 2차 외평구속효과에 의한 동적응답 경향의 변화를 벽두께가 0.4"인 경우(Fig.5a)와 0.8"인 경우(Fig.5b)에 대하여 나타내었다. 그림에서 알 수 있듯이 벽두께가 커질수록 2차 외평에 의한 영향이 매우 커지는 것을 알 수 있다.

Fig. 6에서는 전단변형효과가 굽힘동적응답에 미치는 영향을 나타내었다. 그림에서 보듯이 하모닉 하중의 가진주파수가 3차 고유진동수 부근에



(a)



(b)

Fig. 5. Effect of secondary warping(S.W.) restraint on the dynamic response at the beam tip ( $\theta=45^\circ$ ,  $\omega_f=0-100$  rad/s).

(a) wall thickness( $h$ )=0.4 inch

(b) wall thickness( $h$ )=0.8 inch

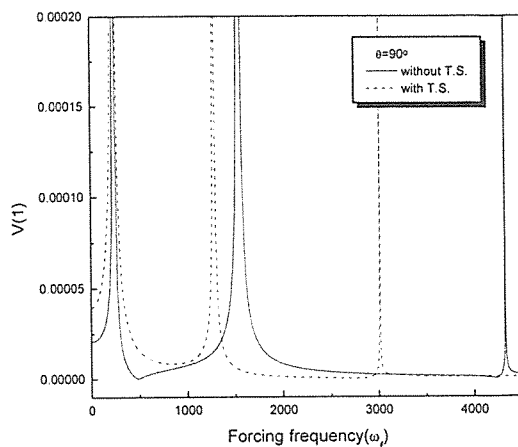


Fig. 6. Effect of transverse shear(T.S.) on the dynamic response in bending at the beam tip.

있을 때, 전단변형효과를 고려한 경우와 고려하지 않은 경우의 동적응답은 매우 큰 격차를 보이고 있다. 즉 전단변형효과를 고려하지 않은 경우 실제의 결과와 매우 큰 차이를 갖는 응답이 예측될 수 있다.

Fig. 7과 8에서는 여섯 가지 다른 섬유각 ( $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $90^\circ$ )을 갖은 보 구조물에 har-

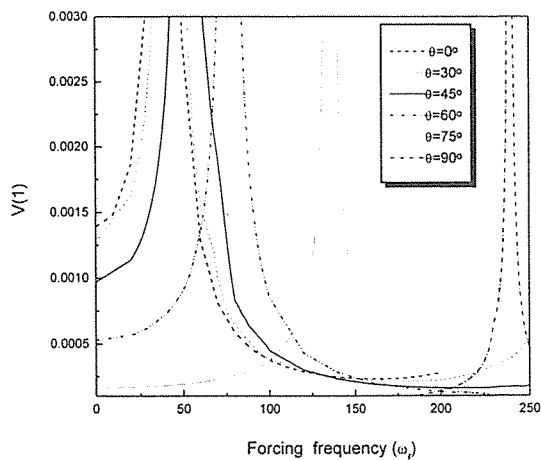


Fig. 7. Vibration amplitude of deflection in y-direction at the free-end vs. forcing frequency.



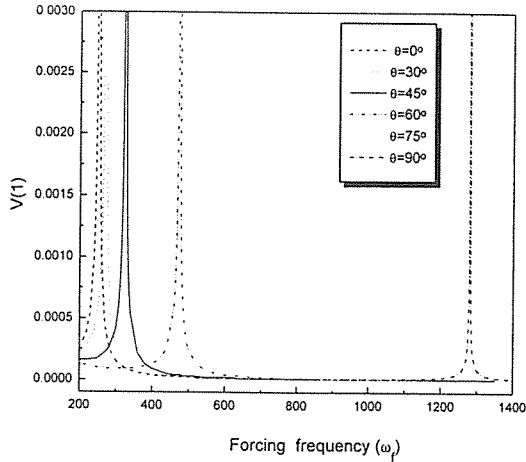


Fig. 8. Vibration amplitude of deflection in y-direction at the free-end vs. forcing frequency.

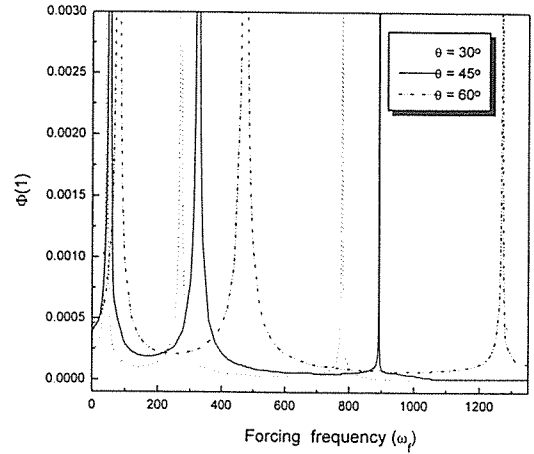


Fig. 9. Vibration amplitude of torsion angle at the free-end vs. forcing frequency.

monic 집중하중을 가하였을 때, 가진 주파수 변화에 따른 보의 끝단에서의 처짐 동적 응답의 크기의 변화를 나타내었다. 여기에서 가진 주파수가 각각의 섬유각의 경우의 고유 진동수와 일치하면 동적 응답의 크기가 매우 커지는 것을 알 수 있다. 또한 보 구조물의 자체중량, 형상, 크기 등이 전혀 변화되지 않고 섬유각 만이 변화됨으로써 동적응답 특성에 커다란 변화가 있음을 알 수 있다. 즉 구조물의 중량 및 크기, 형상은 같으나 섬유각이 변화함에 따라 구조적으로 완전히 다른 특성을 갖게 되는 것을 알 수 있다.

Fig. 9에서 굽힘-비틀림 연성효과가 나타나는 섬유각(30°, 45°, 60°)을 갖은 보 구조물에 굽힘 하중만이 작용하는 상태에서 보의 적층방법에 따라 발생한 굽힘-비틀림 연성효과 ( $a_{37}, a_{56}$ )에 의해서 비틀림 동적 반응이 발생한 것을 알 수 있다. 이 경우에도 각각의 고유진동수와 같은 가진주파수에서 비틀림 진동 진폭이 매우 커지는 것을 알 수 있다.

Fig. 10과 11에서는 45°의 섬유각을 갖는 굽힘-비틀림 연성효과를 갖는 보 구조물에 집중하중이 작용할 때(비틀림 하중은 작용하지 않음), 가진 주파수를 보의 고유 진동수 부근에서 변화시켰을 때 보의 축방향에 따른 처짐과 비틀림 동적 응답 크기의 형상을 나타내었다. 가진 주파수가 보의 각각 1,

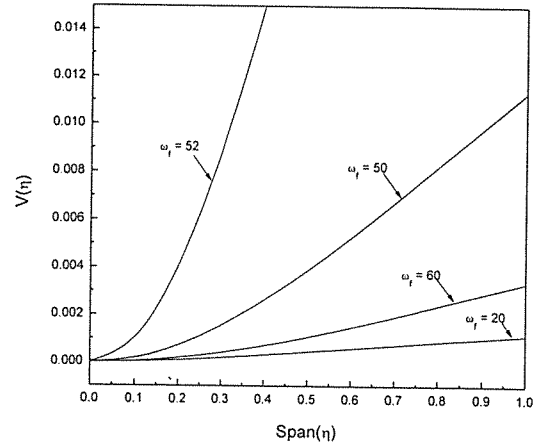


Fig. 10. Dynamic responses of deflection along the span for concentrated force( $\theta=45^\circ$ ).

2차의 고유 진동수에 접근함에 따라 각각의 모드에 따른 1, 2차의 모드 형상(mode shape)으로 동적 응답 형상이 접근하며 진폭이 대단히 커지는 것을 알 수 있다.

Fig. 12, 13에서는 45°의 섬유각을 갖는 구조물에 Fig. 3(b)와 같은 harmonic 분포하중이 작용할 때, 가진 주파수를 보의 고유 진동수 부근에서 변

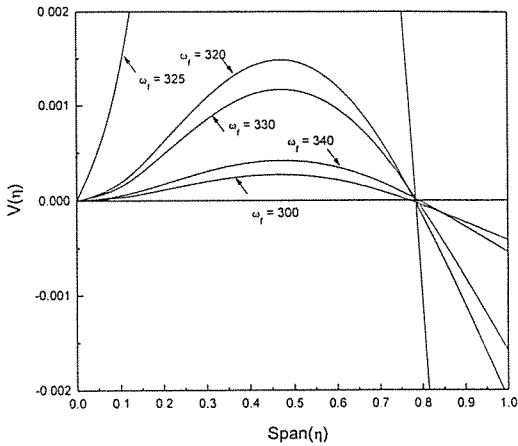


Fig. 11. Dynamic responses of deflection along the span for concentrated force( $\theta=45^\circ$ ).

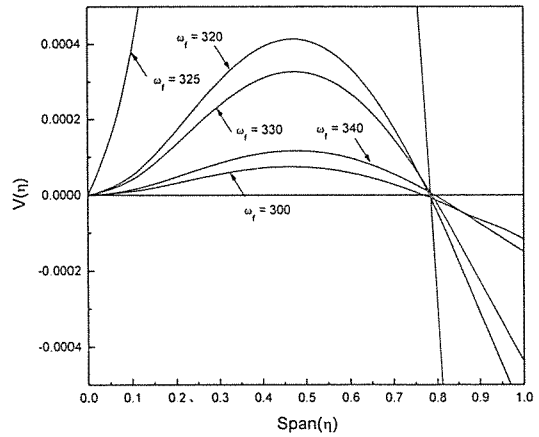


Fig. 13. Dynamic responses of deflection along the span for distributed force( $\theta=45^\circ$ ).

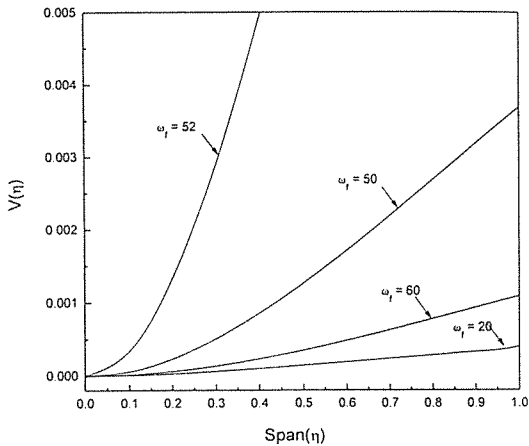


Fig. 12. Dynamic responses of deflection along the span for distributed force( $\theta=45^\circ$ ).

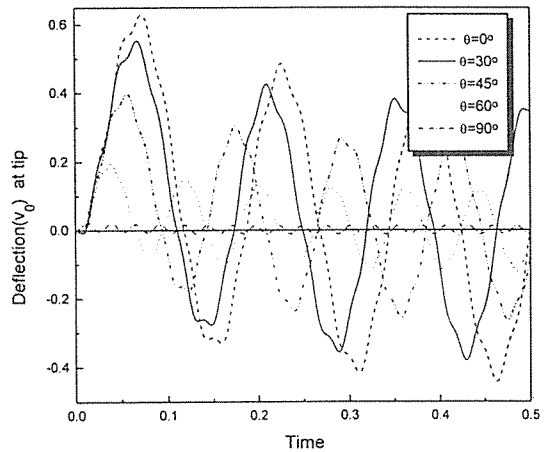


Fig. 14. Dynamic responses of deflection vs. time for non-harmonic exponentially decaying force( $l=10$ ).

화시켰을 때 처짐과 비틀림 동적 응답 크기의 형상을 나타내었다. 이 경우도 집중하중이 작용할 때와 마찬가지로 가진 주파수가 보의 각각 1, 2차의 고유 진동수에 접근함에 따라 각각의 모드에 따른 1, 2차의 모드 형상으로 동적 응답 형상이 접근하며 진폭이 대단히 커지는 것을 알 수 있다.

Fig. 14에서는 시간에 따라 감소하는 비조화 집

중하중이 작용할 때,  $g(t)=e^{-\lambda t}$ , 섬유각의 변화에 의한 자유단의 처짐 동적 반응을 시간에 대하여 나타내었다. 이 경우에는 섬유각이 증가함에 따라 강성계수가 증가하여 반응의 주기와 크기가 감소하는 것을 볼 수 있다. 여기에서 시간의 함수로 주어진 동적 반응을 Fourier Transform시키면 각각의 고유진동수에서 peak 치를 갖는 주파수 영역에서의

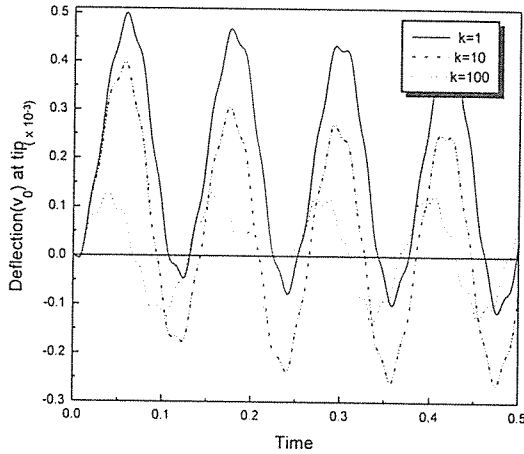


Fig. 15. Dynamic responses of deflection vs. time for non-harmonic exponentially decaying force( $\theta=45^\circ$ ).

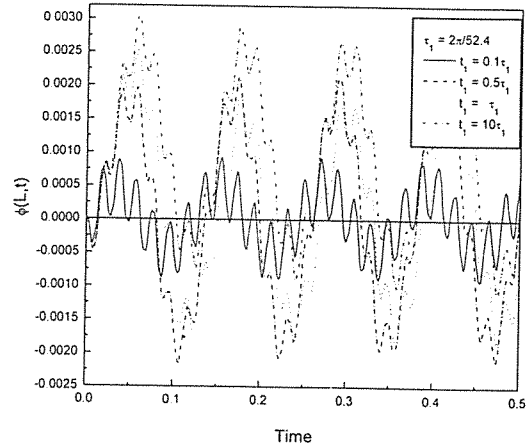


Fig. 17. Dynamic responses of torsion angle vs. time for non-harmonic triangular pulse( $\theta=45^\circ$ ).

동적 반응을 얻을 수 있다.

Fig. 15에서는  $45^\circ$ 의 섬유각을 갖는 구조물에서 비조화 집중하중,  $g(t) = e^{-kt}$ 의  $k$ 값이 변화함에 따른 처짐 동적반응을 시간에 대하여 나타내었다. 이 경우에는  $k$ 값이 증가함에 따라 진동 주기는 변하지 않으나 진폭이 작아지며 더 빠르게 정상상태의 진동을 하는 것을 알 수 있다.

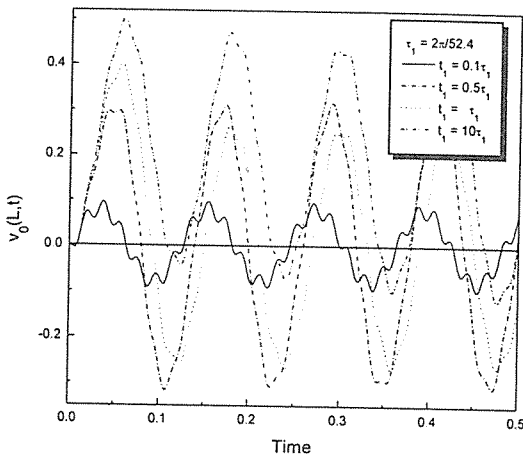


Fig. 16. Dynamic responses of deflection vs. time for non-harmonic triangular pulse( $\theta=45^\circ$ ).

Fig. 16, 17에서는  $45^\circ$ 의 섬유각을 갖는 구조물에서 triangular pulse

$$g(t) = \begin{cases} F_0(1 - \frac{t}{t_1}) & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$$

형태의 비조화 집중하중이 작용할 때,  $t_1$  값이 구조물의 고유주기 보다 작을 때와 클 때의 동적응답의 변화를 나타내었다. 여기에서  $t_1$ 이 작아질수록 동적응답의 주기는 변화하지 않으나 진폭이 작아지는 것을 볼 수 있다.

### 3. 결 론

복합재료 구조물의 섬유각 및 적층에 따른 구조연성효과 및 전단 변형효과, 회전 관성효과 그리고 얇은 벽보의 제1차, 제2차 와핑 구속효과를 고려한 구조모델을 정립하였다. 전단변형효과가 동적응답 특성에 커다란 영향을 끼칠 수 있으며 상대적으로 벽두께가 두꺼운 얇은 벽보의 경우 2차와핑구속에 의한 효과가 무시될 수 없음을 보였다. 섬유각과 적층방법을 달리함에 따라 구조물의 고유진동수

및 동적응답에 대단히 큰 변화가 있었으며 구조물의 중량, 형상 및 크기를 변화시키지 않고도 복합재료의 이방성에 따른 각 거동간의 연성효과를 적절히 이용하여 구조물의 사용조건에 맞도록 설계할 수 있는 구조적 tailoring이 가능함을 보였다.

본 연구를 통하여 시간에 관하여 하모닉 또는 sonic boom이나 blast loading등과 같은 충격적인 비조화 하중들이 구조물의 한 점이나 공간에 임의로 분포하여 작용하는 경우에 그 동적응답을 빠른 시간내에 손쉽게 구할 수 있는 Extended Galerkin Method를 정립하였다.

## 후 기

본연구는 1995년도 교육부 학술 연구조성비(기계공학 ME 95-D-17)에 의하여 연구되었으며 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

- [1] Librescu, L. "Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogeneous Shell-type Structures," Noordhoff International Publishers, The Netherlands, 1975.
- [2] Vlasov, V.Z. "Thin-Walled Elastic Beams" Israel Program for Scientific Translations, 1961.
- [3] Bank, L.C. and Kao, C.H., "Dynamic Response of Composite Beams," Recent Advances

in the Macro-and Micro-Mechanics of Composite Material Structures, AD Vol. 13, (D. Hui and J.R. Vinson, Eds.). The Winter Annual Meeting of the ASME, Chicago, Illinois, Nov.-Dec. 1988, ASME.

[4] Ohseop Song, "Modeling and Response Analysis of Thin-Walled Beam Structures Constructed of Advanced Composite Materials," Ph.D thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1990.

[5] Rehfield, L.W., "Design Analysis Methodology for Composite Rotor Blades," Proceedings of the Seventh DoD/NASA Conference on Fibrous Composites in Structural Design, AFWAL-TR-85-3094, June, pp.v(a)-1~~~v(a)-15, 1983.

[6] Song, O. and Librescu, L. "Bending Vibration of Cantilevered Structures Modelled as Thin-Walled Beams and Subjected to Time-Dependent Excitations," Journal of Acoustic Society of America, Vol. 58, 1995.

[7] Librescu, L. and Song, O., "Behavior of Thin-Walled Beams Made of Advanced Composite Materials and Incorporating Non-Classical Effects." Mechanics Pan-America 1991, Applied Mechanics Preview Vol. 44, No. 11, Part 2, R.A. Kittle and D.T. Mook, ed., pp.174-180, November 1991.