

論文

두 탄성장에 대한 M-적분을 이용한 직교이방성 복합적층판의 수직균열해석

변창식* · 김유준** · 임세영**

Analysis of Normal Crack in a Cross-ply Composite Laminate via the Two-state M-integral

Chang-sik Byean*, Yu-jun Kim** and Se-young Im**

ABSTRACT

Based upon the two-state M-integral, we determine a singular stress field for a crack normal to the ply-interface of a cross-ply composite laminate under in-plane extension. The results obtained from the two-state M-integral are compared with those from the hybrid finite element analysis. This method turns out to be straightforward and efficient compared with the hybrid finite element method.

초 록

두 탄성장에 대한 M-적분 방법을 이용하여 면내 인장을 받는 층간 계면에 수직인 균열의 특이 응력장을 결정한다. 그 결과를 기존의 혼성 유한요소 해석으로 부터 얻어진 결과와 비교한다. 본 논문은, 경계층 영역의 특이 응력장을 결정할 때, 새로운 두 탄성장에 대한 M-적분 방법이 기존의 혼성 유한요소법과 비교하여 매우 직접적이고 효율적임을 보여준다.

1. 서 론

구조물이나 그 요소로 사용되는 섬유강화 복합 적층재(fiber reinforced composite laminate)는 많은 공학적 장점에도 불구하고 자유단(free edge)이나 적층계면(ply interface)과 같은 피할 수 없는 기하학적 및 재료의 불연속성에 의한 결함(defect)의 수반으로 그 사용범위가 상당히 제한되어 있다. 섬유강화 복합적층재에서 발생하는 이런 결함들은 잘 알려진 적층분리균열(delamination crack)이나 횡단균열(transverse crack)과 같은 형태로 존재하여 최종적으로 구조물의 파손(failure)이나 강성의

저하와 같이 구조물의 신뢰도(integrity)를 감소시킨다. 따라서, 복합적층재에 존재하는 결함에 관련된 공학적 규명의 노력이 지난 20여년에 걸쳐 꾸준히 많은 연구자들로 부터 이루어져 왔으며, 본 논문은 이러한 연구의 일환이다.

비등방성 복합적층재의 전형적 결함인 자유단과 적층분리균열 및 횡단균열에 대한 경계층 영역(boundary layer)의 응력특이성(stress singularity)과 응력분포(stress distribution)의 규명은 파괴역학적 관점에서 매우 중요한 연구이며 이에 대한 이론적 및 수치적 방법들의 집중적인 개발이 지난 20여년에 걸쳐서 지금까지 연구되어 오고 있다. 그

* LG산전 빌딩시스템 연구소

** 한국과학기술원 기계공학과

대표적인 예는 자유단 문제와 관련된 Wang과 Choi [1], Zweirs, Ting과 Spiker [2] 및 Ting과 Chou [3] 등이 있으며 적층분리균열에 대한 Wang [4]과 Wang과 Choi [5]의 연구들이 있다. 특히, 본 연구는 Ting과 Hoang [6]에 의해 보고된 비등방성 복합적층체에 존재하는 수직(normal) 횡단균열의 응력특이성 규명과 Im [7]에 의한 복합적층판의 수직 횡단균열 주변의 점근적인(asymptotic) 응력분포 표현식을 기본으로 한다.

본 연구의 목적은 지금까지 복합적층판에 존재하는 경계층 영역의 특이 응력장을 규명하기 위해서 사용된 수치적 방법인 경계배치법(Wang과 Choi [5] 및 Im [7] 참조)과 혼성 유한요소법(Wang과 Yuan [8] 및 Im과 Kim [9] 참조) 등의 복잡한 방법 대신에 두 탄성장에 대한 M-적분(Chen과 Shield [10] 참조)을 이용하여 보다 손쉽게 그 특이 응력장을 규명할 수 있는 가능성을 제시하는데 있다. 따라서, 본 연구는 두 탄성장에 대한 M-적분방법을 경계층 영역의 특이 응력장 규명에 적용할 수 있는 유용성을 보이기 위해서, 이 방법을 이용한 직교이방성 복합적층판에 존재하는 층간계면에 수직한 균열의 특이 응력장의 계산을 수행하고 그 신뢰성을 확인하기 위해서 알려진 혼성유한요소법을 사용하여 얻어진 Im과 Kim [9]의 결과와 비교 검토한다.

본 논문의 구성은 다음 2장에서 해석하고자 하는 문제, 즉 면내인장을 받는 수직균열을 갖는 직교이방성 복합적층체의 기하학적인 형상 모델링과 비등방성 탄성론을 통한 지배방정식을 만족하는 해를 얻는 과정을 간단히 기술하고, 이 해를 고유함수(eigenfunction) 전개법을 사용하여 근접장(near-field) 조건을 만족시키는 점근해(asymptotic solution)를 얻는 과정이 언급된다. 이어서, 3장에서는 얻어진 점근해를 완성하기 위해 필요한 수치적 방법으로 앞에서 언급한 두 탄성장에 대한 M-적분의 소개와 그 적용 가능성에 관해서 기술한다. 얻어진 수치해석 결과를 통해서 두 탄성장에 대한 M-적분방법의 유용성을 검증하는 고찰이 4장에서 이루어진다. 또한, 본 연구의 최종 결론은 마지막 5장에서 요약된다.

2. 문제의 정의 및 기본 방정식

2-1. 문제의 정의

면내인장하중을 받는 $[90/0]_s$ 직교이방성 복합적층판에 존재하는 수직균열의 전형적인 모습을 Fig. 1을 통하여 묘사하고 있다. 강화섬유가 인장하중방향으로 놓여 있는 층을 0° 층으로, 하중과 직각을 이루는 층을 90° 층으로 정의한다. 수직균열은 복합적층판의 길이방향을 따라 일정한 간격으로 발생하였다는 가정하에 수학적 및 수치적 해석을 위해 Fig. 1에서 보여주는 단위셀만을 고려한다. 비등방성 탄성론에 근거한 균열선단 부근 탄성해의 수식화를 위해 Fig. 1에서 보여 주듯이 균열선단에 직교 좌표계를 설정한다. 원점은 균열선단에, x_1 축은 두 층의 경계면을 따라 적층판의 길이 방향으로, x_2 축은 적층판의 두께 방향으로, x_3 축은 적층판의 폭 방향으로 둔다.

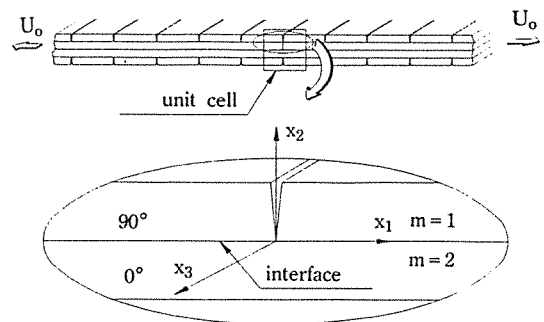


Fig. 1. 면내 인장하중하에 수직균열을 갖고 있는 직교이방성 복합적층판의 형상

2-2. 비등방성 탄성론에 근거한 Stroh 방정식

널리 알려진 바와 같이 면내 하중을 받는 직교이방성 복합적층판은 재료성질의 대칭성 때문에 평면변형을 상태에 있으며, 그 지배 방정식은 u_i , σ_{ij} , ε_{ij} 을 각각 변위, 응력 및 변형율이라 할때 다음과 같이 나타낼 수 있다.

평형 방정식 :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad \dots\dots\dots (1.a)$$

변위-변형을 관계식 :

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad \dots\dots\dots (1.b)$$

구성 방정식 :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij} \quad \dots\dots\dots (1.c)$$

여기서 c_{ijkl} 는 4차 강성텐서(4th order stiffness tensor)이며 첨자 $‘, j’$ 는 x_j 에 대한 편미분이다. 식(1, a, b, c) 이용하여 Elliptic 형태의 편미분 지배 방정식을 각 층에 대하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$c_{i1k1} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1^2} + (c_{i1k2} + c_{i2k1}) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{i2k2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_2^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

Stroh[11]에 따르면 이 편미분 방정식의 해는 다음과 같이 나타낼 수 있다고 알려져 있다.

$$u_i(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^4 v_{ik} f(z_k), \quad z_k = x_1 + \mu_k x_2 \quad \dots\dots (3)$$

여기서, μ_k 와 v_{ik} 는 식 (3)을 편미분 방정식(2)에 대입하여 얻어지는 선형 대수 방정식의 고유치와 고유벡터를 의미한다(그 자세한 유도 과정 및 표현은 Im과 Kim[9]참조).

2-3. 응력장과 변위장의 점근해

경계층 영역의 응력장과 변위장의 점근적 표현을 위해서 Ting과 Hoang[6] 및 Im[7]에 의해 주어진 다음과 같은 멱급수 형태(power type)의 고유함수 $f(z_k)$ 를 도입한다.

$$f(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn} \frac{z_k^{\delta_n+1}}{(\delta_n+1)}, \quad (k=1\sim 4) \quad \dots\dots\dots (4)$$

여기서, δ_n 은 다음에서 설명할 근접장 조건(near-field condition)으로부터 나오는 고유치이고, C_{kn} 는 각 고유치 δ_n 에 따른 고유벡터이다. 식(4)을 식(3)에 대입하면 변위장에 관한 다음과 같은 점근해를 구할 수 있으며 응력장의 점근해 역시 다음과 같이 나타남을 알 수 있다.

$$u_j = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 [C_{kn} v_{jk} z_k^{\delta_n+1} + C_{(k+2)n} \bar{v}_{jk} \bar{z}_k^{\delta_n+1}] / (\delta_n+1) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^2 [C_{kn} \tau_{ijk} z_k^{\delta_n} + C_{(k+2)n} \bar{\tau}_{ijk} \bar{z}_k^{\delta_n}] \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\tau_{ijk} = (c_{ijl1} + \mu_k c_{ijl2}) v_{ik}, \quad (i, j, l=1, 2)$$

이와 같은 구조를 갖는 점근해의 고유치 δ_n 과 고유벡터 C_{kn} 을 구하기 위하여 다음과 같은 근접장 조건을 적용한다(Fig.1 참조).

Interface continuity condition,

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)}, \quad \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}, \quad u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, \quad u_2^{(1)} = u_2^{(2)} \quad \text{at } x_1 > 0 \text{ and } x_2 = 0 \quad \dots\dots (7.a)$$

Traction free condition along the crack surface,

$$\sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{12}^{(1)} = 0 \quad \text{at } x_1 = 0 \text{ and } x_2 > 0 \quad \dots\dots (7.b)$$

Symmetry condition along the crack ligament,

$$\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_1} = 0 \quad \text{at } x_1 = 0 \text{ and } x_2 < 0 \quad \dots\dots\dots (7.c)$$

여기서, 윗 첨자 $‘(\alpha)’$, $\alpha=1, 2$ 는 Fig.1에서 각 층을 나타낸다. 점근해에 대한 이와 같은 8개의 근접장조건의 적용은 복소상수 $C_{kn}^{(1)}$ 와 $C_{kn}^{(2)}$ 에 대한 8×8 형태의 선형제차방정식(linear homogeneous equation)을 유도한다.

$$\Delta_{ij}(\delta_n) D_{jn} = 0, \quad (i, j=1\sim 8)$$

$$D_{kn} = C_{kn}^{(1)}, \quad D_{(k+4)n} = C_{kn}^{(2)}, \quad (k=1\sim 4) \quad \dots\dots (8)$$

결국 윗 식(8)로부터 고유치 δ_n 은 다음과 같은 조건을 통하여 결정되며,

$$\det[\Delta_{ij}(\delta_n)] = |\Delta_{ij}(\delta_n)| = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

구해진 고유치 δ_n 에 대해 고유벡터 복소상수 $C_{kn}^{(m)}$ 가 적당한 정규화(normalization)를 통해 식 (8)로부터 구해진다. 고유치 δ_n 이 복소수인 경우 공액 복소수(complex conjugate) $\bar{\delta}_n$ 또한 특성방정식(9)의 해가 되며, 응력과 변위가 실수가 되어야 함을 고려하면, $C_{kn}^{(m)}$ 을 다음과 같이 적절히 설정할 수 있다(Im과 Kim[7] 참조).

$$C_{kn}^{(m)} = \frac{1}{2} (\gamma_{1n} - i \gamma_{2n}) b_{kn}^{(m)} \quad \text{for complex } \delta_n \quad \text{Im}[\delta_n] > 0 \quad \dots\dots (10.a)$$

$$C_{kn}^{(m)} = \frac{1}{2} \gamma_{3n} b_{kn}^{(m)} \quad \text{for real } \delta_n \quad \dots\dots\dots (10. b)$$

여기서 γ_{1n} 와 γ_{2n} , γ_{3n} 는 실수 형태의 미지상수이며 적절한 수치적 방법을 통하여 경계조건(far-field condition)을 만족 시키도록 결정한다. 최종적으로 응력과 변위의 접근해는 식(10. a, b)을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

δ_n 이 복소수일때

$$\sigma_{ij}^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \gamma_{1n} \operatorname{Re}[\phi_{ijn}^{(m)}] + \gamma_{2n} \operatorname{Im}[\phi_{ijn}^{(m)}] \} \quad \dots\dots\dots (11. a)$$

$$u_j^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \gamma_{1n} \operatorname{Re}[\varphi_{jn}^{(m)}] + \gamma_{2n} \operatorname{Im}[\varphi_{jn}^{(m)}] \} \quad \dots\dots\dots (11. b)$$

$$\phi_{ijn}^{(m)} = \sum_{k=1}^2 [b_{kn}^{(m)} \tau_{ijk}^{(m)} z_k^{(m)} \delta_n + b_{(k+2)n}^{(m)} \bar{\tau}_{ijk}^{(m)} \bar{z}_{ik}^{(m)} \delta_n]$$

$$\varphi_{jn}^{(m)} = \sum_{k=1}^2 [\{ b_{kn}^{(m)} v_{jk}^{(m)} z_k^{(m)} (\delta_n + 1) + b_{(k+2)n}^{(m)} \bar{v}_{jk}^{(m)} \bar{z}_k^{(m)} (\delta_n + 1) \} / (\delta_n + 1)]$$

δ_n 이 실수일때

$$\sigma_{ij}^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{3n} \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^2 \{ b_{kn}^{(m)} \tau_{ijk}^{(m)} z_k^{(m)} \delta_n \} \right] \quad \dots\dots\dots (11. c)$$

$$u_j^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{3n} \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^2 \{ b_{kn}^{(m)} v_{jk}^{(m)} z_k^{(m)} (\delta_n + 1) \} / (\delta_n + 1) \right] \quad \dots\dots\dots (11. d)$$

결국, 적절히 절사(truncation)된 응력장과 변위장에 대한 접근해의 최종 표현식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sigma_{ij}^{(m)} = \sum_{n=1}^N \beta_n^{(m)} f_{ij}^{(m)n}(x_1, x_2, \delta_n) \quad \dots\dots\dots (12. a)$$

$$u_j^{(m)} = \sum_{n=1}^N \beta_n^{(m)} g_j^{(m)n}(x_1, x_2, \delta_n) \quad \dots\dots\dots (12. b)$$

여기서, N은 절사된 고유치의 총 수이며, $\beta_n^{(m)}$ 은 각 층에서의 미지수 γ_{1n} , γ_{2n} , γ_{3n} 를 나타낸다.

지금까지의 이 분야의 연구는 경계조건을 만족하는 미지상수 γ_{in} 의 결정을 위한 수치적 방법으로 앞에서 언급된 경계배치법이나 특이 혼성유한요소법등을 사용하였다. 하지만, 기존의 이 방법들은 사용이 용이한 상용 유한요소 구조해석 프로그램의

사용을 제한하며, 직접 복잡한 프로그램화 작업을 통해서 구현할 수 밖에 없는 단점이 있다. 따라서, 본 연구는 기존의 상용 유한요소프로그램을 이용하여 손쉽게 특이 응력장을 결정할 수 있는 방법을 제안하고자, 다음 장에서 두 탄성장에 대한 M-적분 방법의 유용성을 소개한다.

3. 두개의 탄성장에 연계된 M-적분에 의한 해석

수직균열선단의 특이 응력장(singular stress field)을 해석하기 위한 수치적 방법으로 좌표계의 원점으로 부터 반경방향으로 재료가 균일하면 보존되는 M-적분(Knowls와 Stenberg[12] 참조)을 이용한 두개의 탄성장 문제의 해석법을 사용한다. 본 연구의 타당성을 검토하기 위해서 사용된 혼성 유한요소 해석과정(Im과 Kim[9] 참조)은 부록에서 간단히 언급한다.

이 방법은 Chen과 Shield[10]가 제안한 상호매개적분(mutual integral)을 근거로 탄성체내의 계면균열에 대한 모드분리(mode decomposition)기법으로 J-적분을 이용하는 방법과 유사하다(Jeon, Cha와 Im[13] 참조). 독립된 두 탄성장 중 구하고자 하는 해를 상태 A로, 보조장을 상태 B로 표시하고, 두개의 응력장이 중첩됨으로서 얻어지는 또 하나의 평형상태를 상태 C로 표시하면, 상태 C에 대한 M-적분은 다음과 같이 표시된다.

$$M^{(C)} = M^{(A)} + M^{(B)} + M^{(A, B)} \quad \dots\dots\dots (13. a)$$

$$M^{(A, B)} = \int_c [W^{(A, B)} n_i x_i - t_i^{(A)} \frac{\partial u_i^{(B)}}{\partial x_j} x_j - t_i^{(B)} \frac{\partial u_i^{(A)}}{\partial x_j} x_j] ds \quad \dots\dots\dots (13. b)$$

$$W^{(A, B)} = \sigma_{ij}^{(A)} \varepsilon_{ij}^{(B)}, \quad (i, j = 1, 2)$$

여기서 n_i 는 적분경로 "c"상의 단위 외향 법선성분을 나타낸다. 매개적분 $M^{(A, B)}$ 를 계산하기 위한 적분경로 내부의 형상과 재료가 상태 A와 B가 동일하기만 하면 적분경로 외부의 재료, 형상, 하중에 관계없이 보조장 B에 대해 어떠한 해라도 사용할 수 있고 알려져 있다(최낙윤[14]). 본 연구의 대

상인 층간 계면에 수직인 균열의 경우, 층간 적층 분리 균열의 특이 응력장 결정을 위한 J-적분에 대한 상호매개적분의 사용과 마찬가지로 M-적분에 적절한 보조장을 사용하여 얻어지는 상호매개적분 $M^{(A,B)}$ 는 구하고자 하는 A 상태의 해(점근해(12. a, b)의 미지수 β_n)를 훌륭히 결정할 수 있다.

그러면, 위에서 언급한 적절한 보조장 B의 선택에 대한 설명을 위해서 다음과 같이 본 문제에서 구하고자 하는 상태 A와 보조장 B를 놓자.

State A,

$$u_j^{(A)} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sum_{k=1}^2 [b_{kn} v_{jk} z_k^{\delta_n+1} + b_{(k+2)n} \bar{v}_{jk} \bar{z}_k^{\delta_n+1}] / (\delta_n+1) \quad \dots\dots\dots (14.a)$$

$$\sigma_{ij}^{(A)} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sum_{k=1}^2 [b_{kn} \tau_{ijk} z_k^{\delta_n} + b_{(k+2)n} \bar{\tau}_{ijk} \bar{z}_k^{\delta_n}]$$

State B,

$$u_j^{(B)} = \beta_m^c \sum_{k=1}^2 [b_{km} v_{jk} z_k^{\delta_m^c+1} + b_{(k+2)m} \bar{v}_{jk} \bar{z}_k^{\delta_m^c+1}] / (\delta_m^c+1) \quad \dots\dots\dots (14.b)$$

$$\sigma_{ij}^{(B)} = \beta_m^c \sum_{k=1}^2 [b_{km} \tau_{ijk} z_k^{\delta_m^c} + b_{(k+2)m} \bar{\tau}_{ijk} \bar{z}_k^{\delta_m^c}]$$

여기서 상태 A의 표현식은 점근해(12. a, b)의 재 표현이며 상태 B의 윗 첨자 "c"는 고유치 δ_n 중 하나의 고유치 δ_m 의 공액고유치를 나타낸다. 고유치 δ_n 과 공액고유치 δ_m 는 식(14. a, b)를 식(13. b)에 대입시매개적분 $M^{(A,B)}$ 가 적분경로에 독립적이기 위하여 적분경로 Γ_ε 을 균열선단을 중심으로 반경 ε 이라 할때, $\delta_n + \delta_m^c \geq -2$ 일 경우 $\varepsilon \rightarrow 0$ 으로 잡거나 $\delta_n + \delta_m^c < -2$ 일 경우 $\varepsilon \rightarrow \infty$ 로 잡을 수 있으며, 결국 공액고유치 δ_m^c 가 다음과 같은 조건을 만족하는 경우에만 보조장 B가 매개적분 $M^{(A,B)}$ 에 기여를 하게된다.

$$\delta_n + \delta_m^c = -2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

수직 균열에서 Table 1에 보여지는 것처럼 근접장 조건을 만족하는 고유치는 -1를 중심으로 다음식을 만족하는 각쌍의 형태로 나타나며, 이 형태는 식(15)와 같은 형태이다.

Table 1. 고유치(δ_n)

첫열의 숫자가 같은 값은 식 $\delta_n^c + \delta_n = -2$ 을 만족하는 한쌍의 고유치를 나타낸다. δ_n 이 복소수 일때에는 $\text{Im}[\delta_n] > 0$ 인 값만 표시했다.

9	-6.000000000000000 - i 0.000000000000000
8	-5.000000000000000 - i 0.000000000000000
7	-4.56705594303210 - i 1.14212264014420
6	-4.000000000000000 - i 0.000000000000000
5	-3.000000000000000 - i 0.000000000000000
4	-2.77535712634360 - i 0.37390904494257
3	-2.000000000000000 - i 0.000000000000000
2	-1.65102248451820 - i 0.000000000000000
1	-1.000000000000000 + i 0.000000000000000
2	-0.34897751548175 + i 0.000000000000000
3	0.000000000000000 + i 0.000000000000000
4	0.77535712634361 + i 0.37390904494257
5	1.000000000000000 + i 0.000000000000000
6	2.000000000000000 + i 0.000000000000000
7	2.56705594303210 + i 1.14212264014420
8	3.000000000000000 + i 0.000000000000000
9	4.000000000000000 + i 0.000000000000000

$$\delta_n + \delta_n^c = -2, \quad \delta_n \geq -1 \quad \dots\dots\dots (16)$$

이와 같이 주어진 고유치 δ_n 에 대해서 공액고유치 δ_n^c 가 존재함으로서 식(15)을 만족하는 보조장을 결정할 수 있다. 고유치중 특이응력에 관계하는 응력특이성은 $-1 \leq \delta_n < 0$ 을 만족하는 고유치로 δ_s 로 표기하고 이에 여관된 미지수를 β_s 로 표기하자. 직교이방성 복합적층판에 수직인 균열이 있는 경우, 면내 인장하중에 관계되는 응력특이성은 두개이며, 이 두 응력특이성은 각각 x_2 축에 대한 회전대칭(rotationally symmetric) 조건과 회전반대칭(rotationally antisymmetric) 조건을 만족하게 된다(Im [7] 참조). 본 논문은 대칭조건(7.c)에 의해 회전대칭조건을 만족하는 응력특이성만을 고려한다.

보조장의 미지수 β_s^c 는 임의로 지정할 수 있으며 본 논문은 1로 고정한다. 상태 A와 상태 B, 둘다 식(14)형태 사용하면, 식(13. b)은 다음 형태로 변환이 가능하다.

$$M^{(A,B)} = \beta_s I \quad \dots\dots\dots (17.a)$$

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\left(\sum_{k=1}^4 b_{ks} \tau_{ijk} e^{\delta_s \ln \zeta_k} \right) \left(\sum_{k=1}^4 b_{ks}^c \eta_{ijk} e^{\delta_s^c \ln \zeta_k} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -n_l n_i \left[\left(\sum_{k=1}^4 b_{ks} \tau_{ijk} e^{\delta_s \ln \zeta_k} \right) \left(\sum_{k=1}^4 b_{ks}^c \eta_{jik} e^{\delta_s^c \ln \zeta_k} \right) \right. \\
 & \left. + \left(\sum_{k=1}^4 b_{ks}^c \tau_{ijk} e^{\delta_s^c \ln \zeta_k} \right) \left(\sum_{k=1}^4 b_{ks} \eta_{jik} e^{\delta_s \ln \zeta_k} \right) \right] d\theta \\
 & \dots\dots\dots (17.b)
 \end{aligned}$$

$$\eta_{ijk} = v_{ik} \phi_{jk}, \quad \phi_{1k} = I, \quad \phi_{2k} = \mu_k$$

여기서 적분경로 θ 는 수직균열의 경우 $-\pi/2$ 에서 부터 시작해서 부터 시작해서 $\pi/2$ 까지의 경로임을 주목해야 한다. 식(17.b)의 I 값은 적절한 수치적 분으로 구하며, 본 연구에서는 Simpson's rule을 이용하였다. 식(17.a)을 이용하여 구해진 미지수 β_s 는 응력특이성에 관계된 특이응력의 접근해를 완성시킨다. 이 매개적분 $M^{(A,B)}$ 의 계산에는 응력 및 변위구배가 비교적 정확하게 계산되는 유한요소의 적분점(gauss point)을 지나는 경로를 선택하게 된다. 그러나, 유한요소법은 각 절점의 평형을 기초로 하므로 적분점에서는 평형방정식을 정확히 만족하지 못하며 이 점을 보완하기 위하여 적절한 가중함수 q 를 도입하며 선적분 형태의 매개적분을 면적분 형태로 바꾼다(Li, Shih와 Needleman[15] 및 Moran과 Shih[16] 참조). Gauss 정리를 이용한 면적분 형태의 매개 적분은 다음과 같다(Fig.2 참조).

$$M^{(A,B)} = \int_{A_2-A_1} [W^{(A,B)} \delta_{il} - \sigma_{ij}^{(A)} \frac{\partial u_j^{(B)}}{\partial x_i}] dA$$

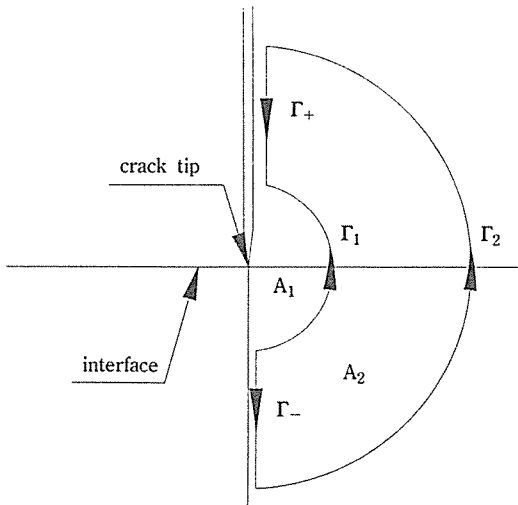


Fig. 2. 매개적분 $M^{(A,B)}$ 의 적분경로

$$- \sigma_{ij}^{(B)} \frac{\partial u_j^{(A)}}{\partial x_i} x_i q_{,l} dA \quad \dots\dots\dots (18.a)$$

$$\begin{aligned}
 q &= 1 \text{ on } \Gamma_1 \\
 q &= 0 \text{ on } \Gamma_2
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (18.b)$$

위에서 $\Gamma_\alpha (\alpha=1, 2)$ 는 A_α 의 경계를 나타낸다. 여기서 사용되는 δ_{ij} 는 크로네크 델타(Kroneker delta)이며, 가중함수 q 는 식(18.b)을 만족하는 미분가능한 함수이면 된다. 결국, 식(18.a)를 근거로 유한요소해석을 통해서 얻어진 매개적분 $M^{(A,B)}$ 값과 식(17.b)로 부터 얻어진 “I” 값은 식(17.a)의 미지상수 β_s 를 결정한다.

4. 결과 및 고찰

비등방성 탄성론과 고유함수 전개법을 이용하여 구성한 층간 계면에 수직한 균열의 접근해를 완성시키기 위해서 사용된 수치적 방법으로 두 탄성장에 대한 M-적분이 사용되었으며, 이 해석을 위하여 사용된 섬유강화 복합재료의 재료상수는 다음과 같다.

Graphite Epoxy(Im과 Kim[9] 참조)

$$E_L = 137.9 \text{ GPa}, \quad E_T = E_Z = 14.5 \text{ GPa}$$

$$G_{LT} = G_{LZ} = 5.86 \text{ GPa}, \quad G_{TZ} = 3.52 \text{ GPa}$$

$$v_{LT} = v_{LZ} = 0.21, \quad v_{TZ} = 0.32$$

여기서, L은 강화섬유의 방향, Z는 두께방향, T는 폭방향을 나타낸다.

하중과 기하학적 대칭성 때문에 단위셀의 우측 윗부분 1/4이 유한요소 해석에 사용되며, 본 연구와 비교하기 위해서 사용된 혼성 유한요소 해석(Im과 Kim[9] 참조)의 8절점 등계수 요소와 특이혼성 요소의 결합모습이 Fig.3에 자세히 묘사되어 있다. 해석에 사용된 모델은 한개의 특이혼성요소와 140개의 일반요소들로 분할 되었으며 요소의 형상비는 $b/h = 8a/c$ 이다. M-적분에 의한 해석에서 매개적분을 구하기 위해 사용되는 유한요소 해석은 상용 패키지인 ABAQUS[17]를 사용해서 구했다. Fig.4는 이때 사용된 요소분할형태와 매개적분을 계산하기 위한 경로이다.

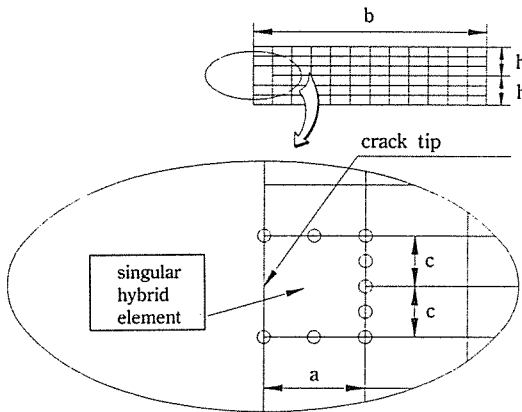


Fig. 3. 전형적인 혼성 유한요소의 분할형상

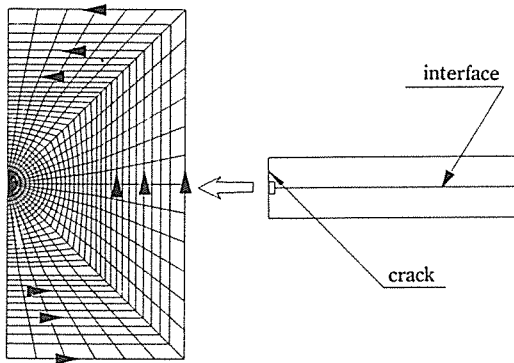


Fig. 4. 매개적분 $M^{(A,B)}$ 을 계산하기 위한 요소 분할과 적분경로

근접장 조건들로 부터 구성되는 선형제차방정식 (9)의 해인 고유치 δ_n 을 Table 1에 표기하였다. - 보다 큰 고유치들은 점근해(12.a,b)에 사용하는 값이고, - 보다 작은 값은 $\delta_n^c + \delta_n = -2$ 을 만족하는 δ_n^c 이다. 응력특이성은 균열선단의 변형률에너지의 유한성 때문에 $-1 < \delta_s < 0$ 의 값을 가지되며, 본 문제의 경우 실수형태의 응력특이성 -0.3898 하나만 존재한다(Im과 Kim[9] 참조).

균열선단의 특이 응력장을 평가하기 위하여 다음 정의 형태의 응력강도계수 K 를 사용한다(Kim과 Im[18] 참조).

$$\sigma_{ijs}(r, 0) = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} r^{\delta_s} \Omega_{ij}$$

$$K = \sqrt{2\pi} \beta_s, \quad \Omega_{ij} = \sum_{k=1}^2 [b_{ks} \tau_{ijk} + b_{(k+2)s} \bar{\tau}_{ijk}] \quad \dots\dots\dots (19)$$

여기서 응력은 계면과 같은 방향인 x_1 축을 따라 계산된다. K 는 b_{ks} 을 표준화(nomalization) 방법에 따라 변하게 된다. 따라서 이후 계산시 90° 층의 Ω_{22} 가 1이 되도록 b_{ks} 를 표준화시켜 사용한다. K 은 주어진 재료에 대하여 모델의 크기(b, h)와 원점 장조건중 u_0 의 함수이므로 무차원계수 K^* 를 정의 하여 모델의 기하학적 형상(b/h)만의 함수로서 특이응력장의 평가계수로 사용한다.

$$K^* = \frac{Kh^{\delta_s}}{E_L(u_0/b)} \quad \dots\dots\dots (20)$$

Table 2는 두 탄성장에 대한 M-적분에 의한 결과와 특이혼성요소법에 의한 결과들의 일치성을 보여준다.

Table 2. 무차원 응력강도계수 K^* 와 표준화된 응력장 두 개의 탄성장에 대한 M-적분을 이용한 결과와 특이혼성유한요소법에 의한 결과의 비교

	M-integral	Hybrid FEM
b=0.125, b/h=8, $u_0=0.125$		
K^+	0.1780667303261098	0.1782903718145590
$\Omega_{11}(0^+)$	1.0592138884936540	1.0592138884937310
$\Omega_{22}(0^+)$	1.0000000000000000	1.0000000000000000
$\Omega_{21}(0^+)$	0.4904989249477419	0.4904989249477428
$\Omega_{11}(0^-)$	7.2501871711791980	7.2501871711791930
b=0.125, b/h=3, $u_0=0.125$		
K^+	0.1684386657531738	0.1669455190095979

5. 결 론

본 논문에서는 복합적층판의 층간 계면에 수직 한 균열의 특이 응력장을 해석하기 위해서 두 탄성장에 대한 M-적분 방법을 적용하여 그 유용성을 검증하였다. 이 방법은 기존의 복잡한 프로그래밍 작업을 이용한 수치기법인 혼성 유한요소법 보다 손쉽게 경계층 영역의 특이 응력장을 결정할 수 있었으며, 특히 기존의 상용 유한요소 프로그램의 사용을 가능하게 하여 아주 간단하고 효율적이다.

참 고 문 헌

1. Wang, S.S. and Choi, I., "Boundary-Layer

- Effect in Composite Laminates. Part I -Free-Edge Stress Singularities: Part II Free-Edge Stress Solutions and Characteristics," J. Appl. Mech. Vol.49, 1982, pp.541-550.
2. Zwieters, R.I., Ting, T.C.T. and Spiker, R.L., "On the Logarithmic Singularity of Free-Edge Stress in Laminated Composites under Uniform Extension," J. Appl. Mech. Vol.49, 1982, pp.562-569.
 3. Ting, T.C.T. and Chou, S.C., "Edge Singularities in Anisotropic Composites," Int. J. Solids Structures, Vol.17, 1981, pp.1057-1068.
 4. Wang, S.S., "Edge Delamination in Angle-Ply Composite Laminates," AIAA Journal, Vol. 22, 1984, pp.256-264.
 5. Wang, S.S. and Choi, I., "The Mechanics of Delamination in Fiber Composite Materials," Part 1 -Stress Singularities, NASA-CR-172269, National Aeronautics and Space Administration-Langley Research Center, Hampton, VA., 1983.
 6. Ting, T.C.T. and Hoang, P.H., "Singularities at the Tip of a Crack Normal to the Interface of an Anisotropic Layered Composite," Int. J. Solids Structures, Vol.20, 1984, pp.430-454.
 7. Im, S., "Asymptotic Stress Field around a Crack Normal to the Ply-Interface of an Anisotropic Composite Laminate," Int. J. Solids Structures, Vol.26, 1990, pp.111-127.
 8. Wang, S.S. and Yuan, F.G., "A Hybrid Finite Element Approach to Composite Laminate Elasticity Problems with Singularities," J. Appl. Mech. Vol.50, 1983, pp.835-844.
 9. Im, S. and Kim, T. W., "Stress Field near Transverse Carcks under Extension or In-Plane Shear in Corss-Ply Compositre Laminates," KSME Journal, Vol.3, 1989, pp.121-129.
 10. Chen F.H.K. and Shield R.T., "Conservation Laws in Elasticity of the J-integral Type," J. App. Math. Phys.(ZAMP), Vol.28, 1977, p.1.
 11. Stroh, A. N., 1962, "Steady State Problems in Anisotropic Elasticity," J. Math. Phys., Vol.41, pp.77-103.
 12. Knowles J.K. and Sternberg E., "On a Class of Conservation Laws in Linearized and Finite Elastostatic", Archive for Rational Mechanics and Analysis and Analysis, Vol.44, 1972, pp.187 -211.
 13. Jeno I., Cha B.W. and Im S., "Edge Delamination in a Laminated composite strip under generalized plane deformation" Int. J. Fracture, Vol.77, 1996, pp.95-110.
 14. 최낙윤, "접촉을 고려한 원호계면균열의 해석 및 응력강도계수 계산", 박사학위논문, 한국과학기술원, 1992.
 15. Li F. Z., Shih C.F. and Needleman A., "A comparison of methods for calculating energy release rates", Engng Fracture Mech., Vol.21, 1985, pp.405-421.
 16. Moran B. and Shih C.F., "Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balce", Engng Fracture Mech, Vol.27, 1987, pp.617-642.
 17. Hibbit, Karlson and Sorenson, "ABAQUS ; A finite element analysis," HKS Inc., 1992.
 18. Kim, T.W. and Im, S., "Boundary Layers Wedges of Laminated Composite Strips under Generalized Plane Deformation Part I -Asymptotic Solutions," Part II-Complete Numerical Solutions," Int. J. Solids Structures, Vol.32, 1995, pp.609-645.

감사의 글

본 연구는 국방과학연구소 장기기초연구(Grant No. ADD-92-5-004)의 일환으로 수행되었으며, 연구비를 지원해 주신 국방과학연구소에 감사드립니다.

부 록 : 특이 혼성 유한요소법

경계조건을 만족하도록 점근해(12.a, b)의 β_n 을 결정하기 위해서 사용되는 잘 알려진 특이혼성유한요소법이라는 수치적 방법을 간단히 언급한다. 균열선단을 모델링하는데 사용된 특이 혼성요소는 그것의 주위에 대한 8절점 등계수 요소(isoparametric element)와 합쳐진다(Fig.3 참조). 적절히 절사된 점근해(12.a, b)는 특이혼성 요소에 포함되어 Lagrange multiplier기법을 사용한 요소사이의 경계를 따라 완화된(relexed) 연속조건을 가진 Reissner-Hellinger 변분 범함수(variational functional)로부터 유도된 혼성변분함수 Π_{mh} 을 기초로 특이요소의 강성행렬을 구하게 된다(자세한 과정은 Im과 Kim[9] 참조).

A-1. 특이혼성요소의 수식화

특이요소와 일반요소 사이의 경계를 따른 점근해의 변위장 \mathbf{u} 와 이와는 독립적으로 가정된 일반요소의 변위장 $\bar{\mathbf{u}}$ 로 부터 얻어진 범함수 Π_{mh} 의 표현식은 다음과 같다.

$$\Pi_{mh} = \int_{\partial A_m} \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{u}} ds - \frac{1}{2} \int_{\partial A_m} \mathbf{T}^T \mathbf{u} ds \quad \dots\dots\dots (A1)$$

여기서 적분구간 ∂A_m 은 m번째 특이요소의 경계를 의미하며, \mathbf{T}^T 는 이 경계면을 따른 표면력의 transpose을 의미한다. 점근해(12.a, b)의 응력장으로부터 표현되는 표면력 \mathbf{T} 과 변위장 \mathbf{u} 및 표준이차보간함수 \mathbf{L} 로 부터 표현된 일반요소의 변위장 $\bar{\mathbf{u}}$ 를 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}\beta \quad \dots\dots\dots (A2.a)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}\beta \quad \dots\dots\dots (A2.b)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{L}\mathbf{q} \quad \dots\dots\dots (A2.c)$$

여기서, β 는 미지상수 β_{in} 으로 구성된 벡터이며 \mathbf{q}

는 혼성요소와 일반요소 사이의 경계면을 따른 절점의 자유도이다. 결국, 위의 표현들로부터 범함수 Π_{mh} 는 다음과 같이 쓸 수 있으며,

$$\Pi_{mh} = \beta^T \mathbf{G} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \beta^T \mathbf{H} \mathbf{q} \quad \dots\dots\dots (A3)$$

$$\mathbf{G} = \int_{\partial A_m} \mathbf{R}^T \mathbf{L} dS, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{2} \int_{\partial A_m} (\mathbf{R}^T \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{R}) dS$$

범함수 Π_{mh} 의 일차변분(first variation)은 정적(stationary)이란 성질($\delta \Pi_{mh} = 0$)로부터 다음을 유도할 수 있다.

$$\beta = \mathbf{H}^T \mathbf{G} \mathbf{q} \quad \dots\dots\dots (A4)$$

최종적으로, m번째 특이 혼성요소의 강성행렬 \mathbf{k}_s 는 다음과 같이 얻는다.

$$\mathbf{k}_s = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \quad \dots\dots\dots (A5)$$

A-2. 유한요소 방정식

잘 알려져있는 일반 등계수요소의 강성행렬 \mathbf{k}_r 과 특이요소의 강성행렬 \mathbf{k}_s 를 결합함으로써 전체 강성행렬 \mathbf{K} 를 구성할 수 있고, 전체 하중벡터도 같은 방법으로 구성된다.

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_s + \sum_m \mathbf{k}_r, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_s + \sum_m \mathbf{Q}_r \quad \dots\dots\dots (A6)$$

여기서 m 은 일반요소의 갯수를 나타낸다. 결국, 최종적인 평형방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q} \quad \dots\dots\dots (A7)$$

경계조건을 사용하여 식(A7)을 풀 수 있고, 여기서 절점변위와 반력을 구할 수 있다. 일단, 절점변위 \mathbf{q} 가 구해지면 점근해의 미지상수 β_n 는 식(A4)으로부터 얻을 수 있으므로 미지수 γ_{in} 이 결정되어 점근해가 완성된다.