

論文

복합재 외팔원통셸의 고유진동수

김천옥* · 김치균**

Natural Frequency of Composite Cantilever Cylindrical Shells

C.W. Kim* and C.K. Kim**

ABSTRACT

In the present study, the dynamic characteristics of composite cantilever cylindrical shells are investigated. The natural frequency of composite cantilever cylindrical shells is derived with the introduction of stress function and given in a closed-form solution by the simplification of the anisotropy of the laminated composites.

In order to improve the accuracy of the closed-form natural frequency equation, an approximate formula is suggested. Natural frequency of the cylinder is investigated with four common composite materials.

Numerical results of well-known numerical analysis program are presented and show good agreement with the present closed-form solutions.

It is shown that the natural frequency is inversely proportional to the square root of the orthotropy parameter. In the study of stacking sequence of symmetric cross-ply laminated cylinder, natural frequency has the highest value when 90° layer is located in the outer layer.

초 록

본 논문에서는 복합재 외팔 원통셸의 고유진동수를 폐형해로 제시하여 복합재 원통셸의 이방성 특성을 설계자로 하여금 쉽게 이용하도록 하였다.

고유진동수는 응력함수를 이용하여 폐형해로 유도하였고, 폐형해 유도시의 가정에 따른 오차를 최소화 하는 근사공식으로 제시하여 수치해와 비교하여 정밀도를 검증하였으며 등방성의 경우 기존 폐형해와 비교하였다.

graphite/epoxy, boron/epoxy, glass/epoxy, kevlar/epoxy 등 4종의 복합재료 적용시 복합재 외팔 원통셸의 고유진동수는 이방성 변수가 작을수록 커짐을 보였고 복합재 원통셸의 적층순서의 변화도 검토하였다.

1. 서 론

원통셸 구조는 형상의 대칭 특성 때문에 구조적

으로 굽힘과 비틀림에 매우 우수한 장점을 갖고 있으며 중량에 비하여 高강도와 高강성을 가지기 때문에 20세기에 들어 오면서 크게 각광을 받은 구조

* 연세대학교 기계공학과

** 연세대학교 산업기술연구소

요소이다. 1930년대부터 원통셀 구조는 항공기와 로켓의 동체구조로 사용되면서 이에 대한 연구가 활발하였으며 1960년대에 와서는 우주탐험이 본격화 되면서 각종 셀에 대한 조직적인 연구가 이루어졌다.

복합재는 단일 재료의 약점을 보완하고 부하에 대응하는 이방성을 인위적으로 구성할 수 있는 우수한 구조재료이며 특히 비강도와 비강성이 크기 때문에 경량화가 요구되는 항공기와 우주선에 적극 사용되어 왔다. 뿐만아니라 고유진동수와 감쇠값이 매우 커서 진동특성을 향상시킬 수 있으므로 고속의 기계구조물에 적합하다. 최근에는 로봇 구조물에 대한 복합재의 적용이 증가하기 시작하였는데 이는 복합재 사용으로 강이나 알루미늄을 사용했을 때와 동일한 강성을 유지하면서 구조물의 무게를 줄이고 고유진동수를 높이는 효과를 얻을 수 있기 때문이다.

원통셀의 진동해석에서는 경계조건이 양단 단순지지이거나 양단고정이 대부분인데[1~5], 이는 경계조건의 대칭성 때문에 경계조건을 만족하는 해를 쉽게 구할 수 있기 때문이다. 반면에 외팔 원통셀의 엄밀해는 자유단에서의 경계조건 처리 때문에 쉽지 않다. 따라서 외팔 원통셀은 주로 수치해석이나 근사해법을 이용하여 해석하고 있으나[6~10] 폐형해가 아니므로 복합재 원통셀이 가지는 특성을 명료하게 제시하지 못하고 있다. 국내에서의 외팔 복합재 원통셀에 대한 연구로는 이영신 등[11]이 Fourier 급수를 이용하여 해석하였으나 폐형해 형태로는 제시하지 않았다.

복합재 외팔 원통셀을 각종 구조물의 구조요소로 사용하기 위해서는 설계에 필요한 고유진동수 등 전반적인 구조적 특성과 복합재의 이방성 특성을 간단한 형태로 쉽게 파악하여 각종 설계에 이용할 수 있어야 한다. 이를 위하여 원통셀의 동적 거동의 폐형해 유도에 관한 연구가 절실히 필요하나 이에 관한 연구는 거의 없다.

1982년 Calladine[12]은 Shallow 셀이론을 바탕으로 고유진동수를 폐형해로 유도하였다. 그는 진동수를 신장(stretching)에 의한 항과 원주방향 굽힘에 의한 항으로 나눌 수 있음을 보였으며 신장에

의한 항은 원주방향파동수(n)가 1일때 보의 진동수식과 일치해야 하므로 그가 유도한 식이 $n=1$ 일 때 보의 진동수식과 일치되도록 n 을 수정하였다.

1993년 Soedel[13]은 등방성 원통셀에 응력함수를 도입하여 응력함수와 반경방향 변위로 구성된 지배방정식을 유도하여 원통셀의 고유진동수를 매우 간단한 폐형해로 제시하였다. 원주방향 파동수 제공이 특성근의 제공 보다 매우 크다는 부등조건을 적용하여 8차 특성방정식을 4차방정식으로 차수를 내림으로써 반경방향 변위로 표시된 경계조건을 적용하여 고유진동수를 구하였다.

복합재 원통셀의 지배방정식 유도과정에서 정의되는 인장(extensional), 연성(coupling), 굽힘(bending) 강성계수(stiffness)는 적층방법에 따라 달라지는데 대칭 적층이면 연성항이 무시되고 적층수가 증가할수록 나머지 연성항의 영향이 줄어들므로[14] 본 연구에서도 원통셀의 적층을 대칭적이고 적층인 경우에 한정하여 지배방정식을 유도한다.

본 연구의 목적은 복합재 외팔 원통셀의 고유진동수를 폐형해로 제시하여 복합재 원통셀의 이방성 특성을 설계자로 하여금 쉽게 이용하는데 있다. 응력함수를 도입하여 고유진동수를 폐형해로 유도하고 원통셀의 넓은 치수 범위에서 오차를 최소화할 수 있는 실용적 공식으로 유도하고 엄밀해와 비교한다. 원주방향 파동수와 외팔 원통셀의 크기가 고유진동수와 어떤 관계에 있는가를 알아보고 이 방정변수가 고유진동수와 어떤 관계를 갖는지도 살핀다. 또한 복합재 적층방법에 따른 고유진동수의 변화를 살핀다.

2. 이 론

두께 h , 반경 R , 길이 L 인 직교이방성 원통셀에 대한 좌표계를 Fig.1에 표시하고 있으며 원통셀의 중앙면에서의 좌표를 x, θ, z 로 하고 이 좌표축에 따른 변위를 각각 u, v, w 라 한다.

원통셀의 진동해석에서는 반경방향 변위가 지배적이므로 Donnell 이론에 의한 운동방정식에 면내 관성항을 무시하면 다음과 같다[15].

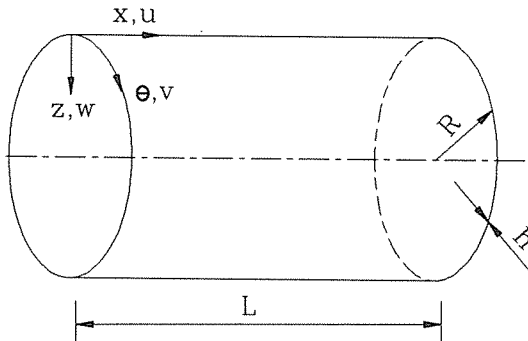


Fig. 1. Coordinated system of a laminated cylindrical shell

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\theta}}{R \partial \theta} = 0 \quad \dots\dots\dots (1.a)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial N_\theta}{R \partial \theta} = 0 \quad \dots\dots\dots (1.b)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{R \partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_\theta}{R^2 \partial \theta^2} - \frac{N_\theta}{R} = \rho_T \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots (1.c)$$

여기서 t 는 시간이고 ρ_T 는 적층된 원통셸의 전체 질량밀도로서

$$\rho_T = \int \rho(z) dz = \sum \rho_k (h_k - h_{k-1}) \quad \dots\dots\dots (1.d)$$

로 정의되고, ρ_k 는 k 번째 적층판의 질량밀도이다.

Airy 응력함수 $\phi(x, \theta, t)$ 를 도입하여 면내응력을

$$N_x = \frac{\partial^2 \phi}{R^2 \partial \theta^2}, \quad N_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad N_{x\theta} = -\frac{\partial^2 \phi}{R \partial x \partial \theta} \quad \dots\dots\dots (2)$$

로 하면 식(1, a, b)는 스스로 만족된다. 복합재의 적층을 대칭 직교적층(symmetric cross-ply lamination)으로 하였을 경우 모멘트-변위 관계식[16]과 식 (2)를 운동방정식(1. c)에 대입하면 다음과 같은 지배방정식을 얻는다.

$$\nabla_1^4 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \phi}{L^2 \partial \zeta^2} + \rho h \ddot{w} = 0 \quad \dots\dots\dots (3.a)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \nabla_1^4 &= D_{11} \frac{\partial^4}{L^4 \partial \zeta^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{L^2 R^2 \partial \zeta^2 \partial \theta^2} \\ &+ D_{22} \frac{\partial^4}{R^4 \partial \theta^4} \quad \dots\dots\dots (3.b) \end{aligned}$$

$$\zeta = x/L \quad \dots\dots\dots (3.c)$$

$$(\nabla^2) = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \quad \dots\dots\dots (3.d)$$

복합재 원통셸에 대한 적합 조건은

$$\frac{\partial^2 \epsilon_\theta^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x^0}{R^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{x\theta}^0}{R \partial x \partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{R \partial x^2} = 0 \quad \dots\dots (4)$$

로 주어진다. 대칭 직교적층인 경우 변형률-면내응력 관계는 다음과 같다[16].

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} & 0 \\ -A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & (A_{11}A_{22} - A_{12}^2)/A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix}$$

적합 조건에 응력함수를 도입하여 간단히 표시할 경우 ① A_{12} 는 A_{11} (또는 A_{22})에 비하여 작으므로 무시한다. ② 전단변형률을 무시한다는 가정을 도입한다. 이 가정과 식 (2)를 이용하면 식 (5)는 다음과 같이 단순화된다.

$$\epsilon_x^0 = \frac{1}{A_{11}} \frac{\partial^2 \phi}{R^2 \partial \theta^2} \quad \dots\dots\dots (6.a)$$

$$\epsilon_\theta^0 = \frac{1}{A_{22}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots (6.b)$$

$$\gamma_{x\theta}^0 = 0 \quad \dots\dots\dots (6.c)$$

식(6)을 식(4)에 대입하면 다음과 같이 응력함수 ϕ 와 변위 w 로 표시되는 적합 조건을 얻는다.

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{L^2 \partial \zeta^2} - \nabla_2^4 \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (7.a)$$

여기서

$$\nabla_2^4 \phi = \frac{1}{A_{22}} \frac{\partial^4}{L^4 \partial \zeta^4} + \frac{1}{A_{11}} \frac{\partial^4}{R^4 \partial \theta^4} \quad \dots\dots (7.b)$$

복합재 원통셸의 자유진동을 나타내는 변위 w 와 응력함수 ϕ 를 다음과 같이 놓는다.

$$w(\zeta, \theta, t) = W(\zeta, \theta) e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (8.a)$$

$$\phi(\zeta, \theta, t) = \Pi(\zeta, \theta) e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (8.b)$$

여기서 ω 는 고유진동수이다. 위 식을 지배방정식

(3) 및 (7)에 대입하면 시간항의 소거된 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\nabla_1^4 W + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Pi}{L^2 \partial \zeta^2} - \rho h \omega^2 W = 0 \quad \dots\dots (9.a)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{L^2 \partial \zeta^2} - \nabla_2^4 \Pi = 0 \quad \dots\dots (9.b)$$

두 식을 연립하여 응력함수 Π 를 소거하면 비연성화(decoupled)된 W 에 관한 8계 편미분방정식을 얻는다.

$$\nabla_1^4 \nabla_2^4 W + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 W}{L^4 \partial \zeta^4} - \rho h \omega^2 \nabla_2^4 W = 0 \quad \dots\dots (10)$$

원통셀의 반경방향의 변위는 θ 방향으로 삼각함수 특성을 가지므로 식 (10)의 일반해는 다음 식으로 표시한다.

$$W(\zeta, \theta) = \bar{W}(\zeta) \cos n\theta = e^{\lambda \zeta} \cos n\theta \quad \dots\dots (11)$$

여기서 λ 는 8개 특성방정식의 근이고 n 은 원주 방향 파동수(circumferential wave number)이다. 식 (11)을 식 (10)에 대입하면 다음의 특성방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} c_1 \left(\frac{\lambda}{L}\right)^8 + c_2 \left(\frac{n}{R}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{L}\right)^6 + c_3 \left(\frac{n}{R}\right)^4 \left(\frac{\lambda}{L}\right)^4 \\ + c_4 \left(\frac{n}{R}\right)^6 \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 + c_5 \left(\frac{n}{R}\right)^8 + c_6 \left(\frac{\lambda}{L}\right)^4 \\ = \rho h \omega^2 \left[c_7 \left(\frac{\lambda}{L}\right)^4 + c_8 \left(\frac{n}{R}\right)^4 \right] \quad \dots\dots (12.a) \end{aligned}$$

여기서

$$c_1 = \frac{D_{11}}{A_{22}} \quad \dots\dots (12.b)$$

$$c_2 = -\frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{A_{22}} \quad \dots\dots (12.c)$$

$$c_3 = \frac{D_{11}A_{22} + D_{22}A_{11}}{A_{11}A_{22}} \quad \dots\dots (12.d)$$

$$c_4 = -\frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{A_{11}} \quad \dots\dots (12.e)$$

$$c_5 = \frac{D_{22}}{A_{11}} \quad \dots\dots (12.f)$$

$$c_6 = \frac{1}{R^2} \quad \dots\dots (12.g)$$

$$c_7 = \frac{1}{A_{22}} \quad \dots\dots (12.h)$$

$$c_8 = \frac{1}{A_{11}} \quad \dots\dots (12.i)$$

이 특성방정식은 특성근 λ 에 대한 8차 방정식 이므로 이 방정식을 풀기 위해서는 8개의 경계조건이 필요하다. \bar{W} 로 얻을 수 있는 경계조건은 고정단에서 2개, 자유단에서 2개로 모두 4개이므로 식(12.a)가 4차식 형태가 되어야 해를 얻을 수 있다.

식(12.a)에 새로운 변수

$$\left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 = A^2, \quad \left(\frac{n}{R}\right)^2 = N^2 \quad \dots\dots (13)$$

를 도입하면 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned} c_1 A^8 + c_2 N^2 A^6 + c_3 N^4 A^4 + c_4 N^6 A^2 + c_5 N^8 \\ + c_6 A^4 = \rho h \omega^2 (c_7 A^4 + c_8 N^4) \quad \dots\dots (14) \end{aligned}$$

윗 식에서 A^8 의 차수를 낮추기 위하여 다음과 같은 전개식을 도입한다.

$$\begin{aligned} (N^2 - A^2)^4 = N^8 - 4A^2 N^6 + 6A^4 N^4 \\ - 4A^6 N^2 + A^8 \quad \dots\dots (15) \end{aligned}$$

원통셀의 길이가 비교적 길고 반경은 작으면서, 모우드에 있어서는 길이 방향으로 저차, 원주 방향으로 고차인 모우드이면 $N^2 \gg A^2$ 의 관계가 성립되므로[17] $N^2 - A^2 \cong N^2$ 로 할 수 있고 이를 식 (15)에 적용하면 다음과 같이 A^8 의 차수를 A^6 의 차수로 낮출 수 있다. 즉

$$A^8 = 4A^2 N^6 - 6A^4 N^4 + 4A^6 N^2 \quad \dots\dots (16)$$

마찬가지 방법으로 A^6 과 A^4 의 차수를 낮추면 다음 관계식을 얻는다.

$$A^6 = 3A^4 N^2 - 3A^2 N^4 \quad \dots\dots (17.a)$$

$$A^4 = 2A^2 N^2 \quad \dots\dots (17.b)$$

식(17.a, b)를 식(16)에 대입하여 A^8 과 A^6 의 차수를 A^4 로 낮추면

$$A^8 = 2A^4 N^4 \quad \dots\dots (18.a)$$

$$A^6 = \frac{3}{2} A^4 N^2 \quad \dots\dots (18.b)$$

이다. 식(18, a, b)를 식(14)에 대입하여 8차식을 4차식으로 낮추면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \left(2c_1 + \frac{3}{2}c_2 + c_3 + \frac{1}{2}c_4\right)\left(\frac{n}{R}\right)^4\left(\frac{\lambda}{L}\right)^4 + c_5\left(\frac{n}{R}\right)^8 \\ & + c_6\left(\frac{\lambda}{L}\right)^4 = \rho h \omega^2 \left[c_7\left(\frac{\lambda}{L}\right)^4 + c_8\left(\frac{n}{R}\right)^4 \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (19)$$

윗 식 좌변 첫째항 중에서 $2c_1 + 3/2 c_2 + c_3 + 1/2 c_4$ 는 등방성인 경우에는 0이 되고 복합재 적층을 직교 이방성인 경우로 하면 다른 항에 비하여 무시할 수 있으므로 식(19)에서 이를 무시하면 다음과 같이 단순화 된 식을 얻는다.

$$c_5\left(\frac{n}{R}\right)^8 + c_6\left(\frac{\lambda}{L}\right)^4 = \rho h \omega^2 \left[c_7\left(\frac{\lambda}{L}\right)^4 + c_8\left(\frac{n}{R}\right)^4 \right] \quad \dots\dots\dots (20)$$

윗 식에서 특성근 λ 를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda^4 = \frac{L^4}{R^4} n^4 \left\{ \frac{\rho h \omega^2 c_8 - c_5\left(\frac{n}{R}\right)^4}{c_6 - \rho h \omega^2 c_7} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

식(21)로부터 $\lambda = \pm \eta$, $\pm i\eta$ 의 형태가 됨을 알 수 있으므로 일반해 $\bar{W}(\zeta)$ 를 다음 식으로 표시한다.

$$\bar{W}(\zeta) = A_1 \sin(\eta \zeta) + A_2 \cos(\eta \zeta) + A_3 \sinh(\eta \zeta) + A_4 \cosh(\eta \zeta) \quad \dots\dots\dots (22.a)$$

여기서

$$\eta = \frac{L}{R} n \left| \frac{\rho h \omega^2 c_8 - c_5\left(\frac{n}{R}\right)^4}{c_6 - \rho h \omega^2 c_7} \right|^{\frac{1}{4}} \quad \dots\dots\dots (22.b)$$

계수 A_i 를 구하기 위하여 일단고정-일단자유 경계조건

$$\begin{aligned} \bar{W}(0) &= 0, & \frac{d\bar{W}(0)}{d\zeta} &= 0 \\ \frac{d^2\bar{W}(1)}{d\zeta^2} &= 0, & \frac{d^3\bar{W}(1)}{d\zeta^3} &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots (23)$$

을 적용하면 다음 행렬로 표시되는 동차 연립방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \eta & 0 & \eta & 0 \\ -\eta^2 \sin \eta & -\eta^2 \cos \eta & \eta^2 \sinh \eta & \eta^2 \cosh \eta \\ -\eta^3 \cos \eta & \eta^3 \sin \eta & \eta^3 \cosh \eta & \eta^3 \sinh \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = 0 \quad \dots\dots (24)$$

이 행렬이 무연근(non-trivial solution)을 갖지 않으려면 계수의 행렬 식의 값이 0이 되어야 하므로 이 조건으로부터 다음 진동수 방정식을 얻는다.

$$\cos \eta \cosh \eta + 1 = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

이 식을 만족하는 η_m 을 구하여 식(22.b)에 대입하고 ω 에 대하여 정리하면 임의의 축방향 및 원주방향 모드에 대응되는 복합재 외팔 원통셀의 고유진동수를 폐형해로 구할 수 있다.

이제 식(12)로 정의된 상수 c_i 를 식(22.b)에 대입하고 ω 에 대하여 정리하면 고유진동수에 대하여 다음 식을 얻는다.

$$\rho h \omega^2 = \frac{A_{11} A_{22} \frac{1}{R^2} \left(\frac{\eta}{L}\right)^4 + D_{22} A_{22} \left(\frac{n}{R}\right)^8}{A_{11} \left(\frac{\eta}{L}\right)^4 + A_{22} \left(\frac{n}{R}\right)^4} \quad \dots (26)$$

원통셀의 길이 대 반경비 L/R 이 상당히 작을 경우, 셀은 링모양으로 되며 원주방향 웨이브가 지배하게 되며 복합재 링의 고유진동수 방정식은 다음과 같이 주어진다[16].

$$\rho h \omega^2 = \frac{A_{22} D_{22} \frac{n^4(n^2-1)^2}{R^8}}{A_{22} \left(1+n^2 \frac{D_{22}}{R^2 A_{22}}\right) \frac{n^2(n^2+1)}{R^4}} \quad \dots (27)$$

식(26)과 식(27)을 비교하면 식(26)에 의한 링의 진동수는 식(27) 보다 높게 평가됨을 알 수 있다. 식(26)이 복합재 링의 경우에도 정밀한 고유진동수를 주기 위해서는 n 과 관련된 항이 식(27)와 동일하여야 하므로 이를 고려하여 복합재 원통셀의 고유진동수 식을 다음과 같이 수정제시 한다.

$$\rho h \omega^2 = \frac{A_{11} A_{22} \frac{1}{R^2} \left(\frac{\eta}{L}\right)^4 + A_{22} D_{22} \frac{n^4(n^2-1)^2}{R^8}}{A_{11} \left(\frac{\eta}{L}\right)^4 + A_{22} \left(1+n^2 \frac{D_{22}}{R^2 A_{22}}\right) \frac{n^2(n^2+1)}{R^4}} \quad \dots\dots\dots (28)$$

3. 결과 및 검토

3-1. 폐형해의 정밀도

식(28)은 길이 대 반경비 L/R 이 상당히 큰 경우에는 외팔보 진동수식으로 수렴되어야 하고 이때

최소 고유진동수에 대응되는 원주방향 파동수는 $n=1$ 이다. 식(28)에 $n=1$ 을 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\rho h \omega^2 = \frac{A_{11} A_{22} \frac{1}{R^2} \left(\frac{\eta}{L}\right)^4}{A_{11} \left(\frac{\eta}{L}\right)^4 + A_{22} \left(1 + \frac{D_{22}}{R^2 A_{22}}\right) \frac{2}{R^4}} \dots (29)$$

식(29)에서 분모의 둘째항 중 직교 이방성인 경우 $D_{22} = A_{22}(h^2/12)$ 이므로 $D_{22}/(R^2 A_{22})$ 는 $h^2/12R^2$ 가 되어 $D_{22}/(R^2 A_{22})$ 는 1에 비하여 무시할 수 있다. 그리고 식(29)의 분자 분모에 R^4 을 곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$\rho h \omega^2 = \frac{A_{11} A_{22} R^2 \left(\frac{\eta}{L}\right)^4}{A_{11} \left(\frac{\eta}{L/R}\right)^4 + 2A_{22}} \dots (30)$$

식(30)의 분모에서 L/R 이 상당히 커지면 $A_{11} \left(\frac{\eta}{L/R}\right)^4 \ll 2A_{22}$ 이 되어 다음과 같은 간단한 식을 얻는다.

$$\rho h \omega^2 = \frac{A_{11} R^2}{2} \left(\frac{\eta}{L}\right)^4 \dots (31)$$

이 식은 Vinson[18]이 제시한 복합재 외팔보 고유진동수 식과 동일하므로 식(28)이 길이 대 반경비 L/R 이 상당히 큰 경우에는 외팔보 고유진동수식으로 수렴됨을 알 수 있다.

따라서 식(28)을 복합재 외팔 원통셀의 수정된 고유진동수 방정식으로 사용할 수 있음을 알 수 있다.

원통셀의 고유진동수 특성이 길이 대 반경비 및 반경 대 두께비(L/R , R/h)와 n 에 밀접한 관계를 갖고 있으므로 식(32)와 같은 무차원 진동수(frequency parameter, Ω)[19]를 도입한다.

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \dots (32.a)$$

여기서 ω_0 는 단위폭을 갖는 원형링의 고유진동수이고 다음과 같다.

$$\omega_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{A_{22}}{\rho t}} \dots (32.b)$$

Fig. 2에서는 엄밀해인 Flügge이론[20]과 비교하기 위하여 양단 단순지지의 등방성 원통셀에 대해

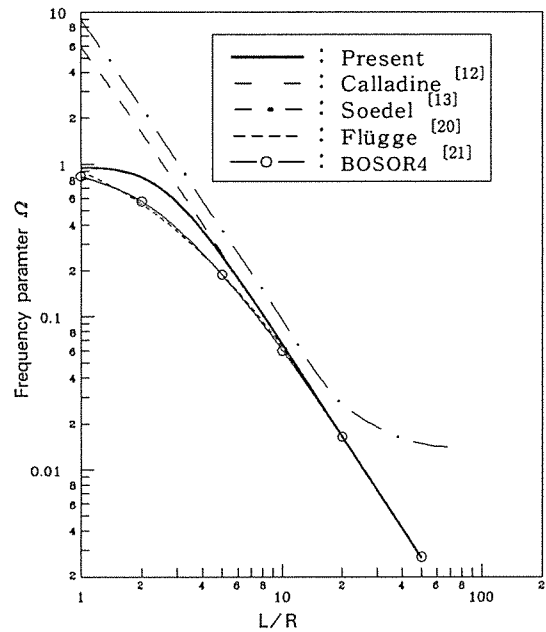


Fig. 2. Frequency parameter of various closed-form solutions for the isotropic cylindrical shells (B.C. = simply supported, $R/h=20$, $m=1$, $n=1$, material = aluminum)

축방향 1차 모드($m=1$), 원주방향 1차 모드($n=1$)인 경우로 한정하여 본 연구의 폐형해[식(28)]를 Flügge이론, Calladine[12]과 Soedel[13]의 폐형해 및 수치해석 프로그램 BOSOR4[21]와 비교하였다.

이 그림에 의하면 $n=1$ 이면 원통셀의 모우드가 보의 모우드가 되므로 L/R 이 증가할수록 진동수는 보의 식으로 접근하여야 하나 Soedel식은 L/R 이 증가할수록 진동수가 L/R 축과 평행하게 수렴하는 경향을 보여 보의 식 및 Flügge 셀이론과 많은 차이를 보여주고 있다. 또, Calladine 식은 $n=1$ 인 경우 L/R 이 증가할수록 보의 식과 Flügge 셀이론식으로 접근하기는 하나 L/R 이 작아지면 Flügge 셀이론과는 많은 차이를 보이고 있다. 반면, 본 이론에 의한 폐형해는 L/R 의 고른 영역에서 기존 폐형해 보다는 엄밀해인 Flügge 이론 및 BOSOR4 수치해에 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig. 3에서는 $R/h=20$ 인 등방성 원통셀의 L/R 이 변할 때 최소 고유진동수를 구하여 수치해인 BO-

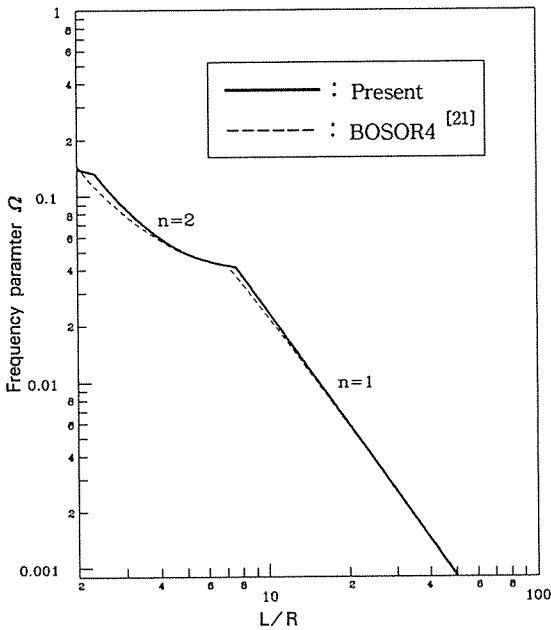


Fig. 3. Lowest frequency parameter of the isotropic cantilever cylindrical shell compared with BOSOR4 numerical solution ($R/h=20$, $m=1$, material = aluminum)

SOR4와 비교하였다. 이 그림에 따르면 L/R 의 고른 영역에서 본 폐형해와 수치해가 매우 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig.4에서는 $R/h=20$ 인 직교이방성 원통셸의 길이 대 반경비 L/R 이 2.5에서 25까지 변할 때 고유진동수를 구하여 수치해인 BOSOR4와 비교하였다. 이 그림에 의하면 짧은 셸인 경우 n 이 낮은 구간에서 본 이론과 수치해가 다소 차이를 보이다가 길이가 길어질수록 전체 n 의 영역에서 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig.5에서는 Fig.4의 경우에서 최소 고유진동수를 구하여 수치해인 BOSOR4와 비교하였다. 이 그림에서 L/R 의 고른 영역에서 본 폐형해가 수치해와 매우 잘 일치함을 알 수 있다.

3-3. L/R 및 R/h 와 고유진동수

외팔 원통셸의 고유진동수는 원통셸의 길이 대 반경 비(L/R) 그리고 반경 대 두께 비(R/h)와 밀접한 관계를 갖고 있다.

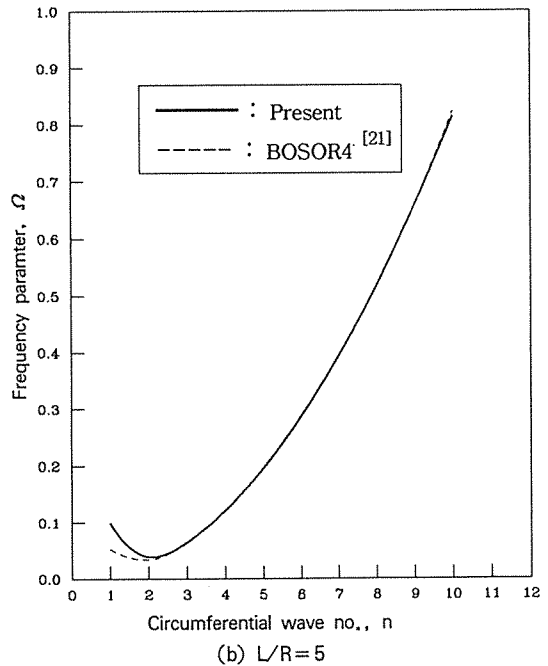
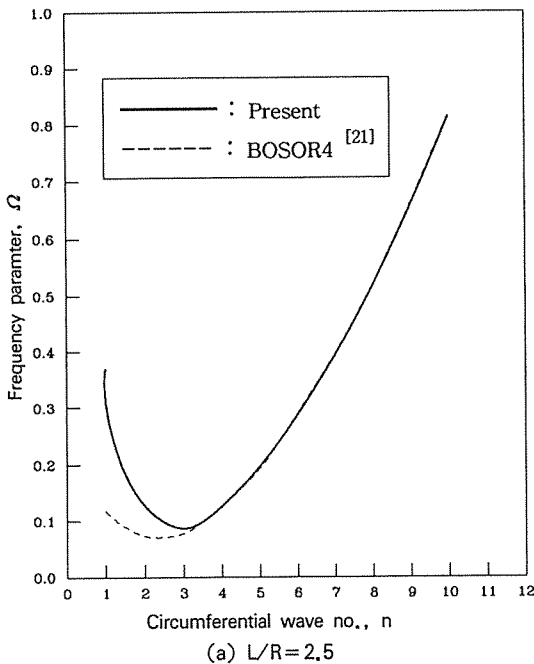


Fig. 4. Frequency parameter of the orthotropic cantilever cylindrical shell compared with BOSOR4 numerical solution ($R/h=20$, $m=1$, material = graphite/epoxy)

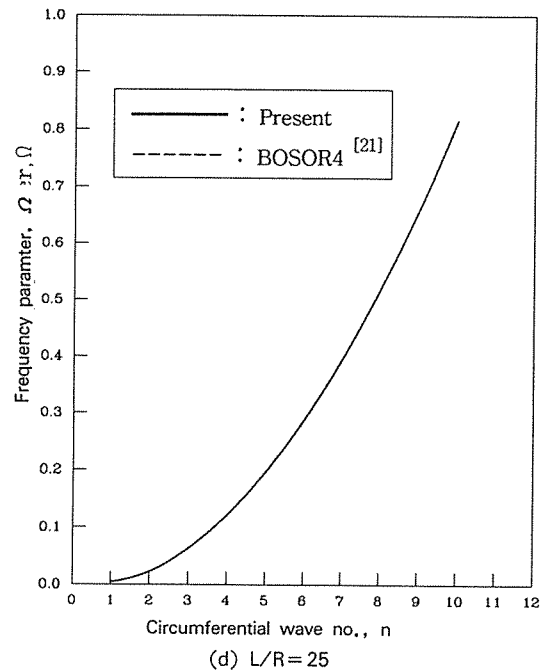
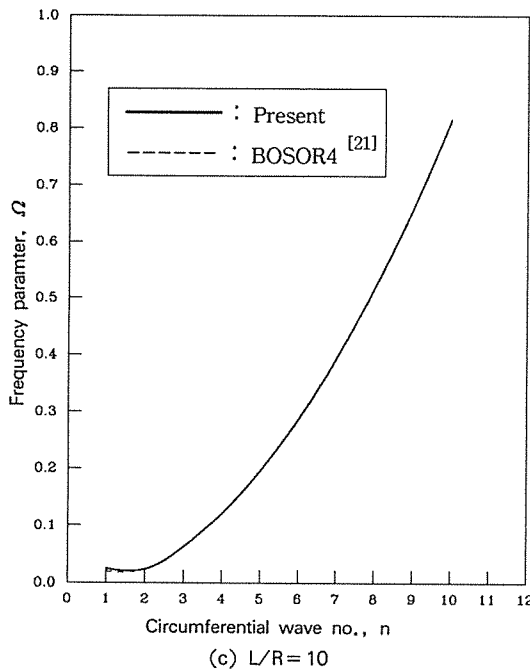


Fig. 4. Continued

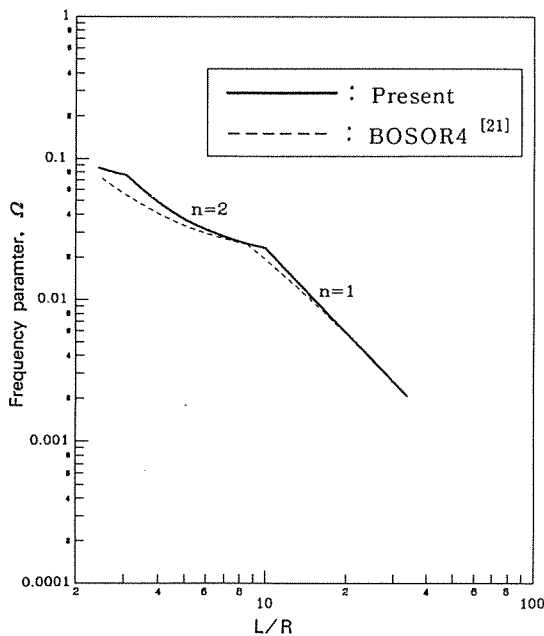


Fig. 5. Lowest frequency parameter of the orthotropic cantilever cylindrical shell compared with BOSOR4 numerical solution when varying length to radius ratio (L/R). ($R/h=20$, $m=1$, material = graphite/epoxy)

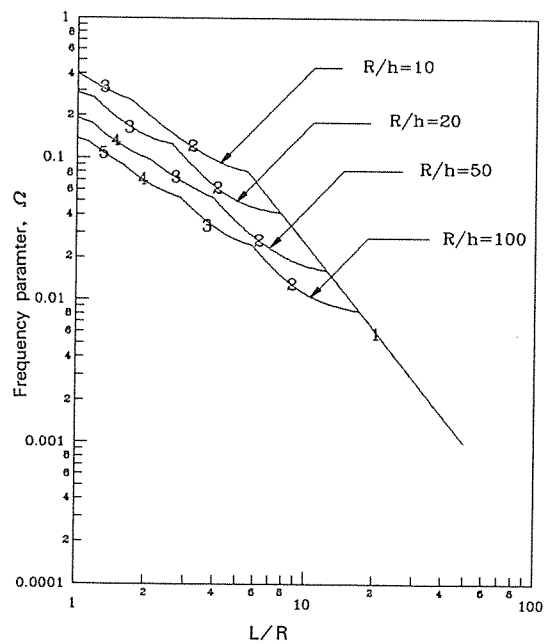


Fig. 6. Lowest frequency parameter varying L/R & R/h and circumferential wave no., n (material : aluminum, $m=1$)

Fig. 6에서는 등방성 재질인 알루미늄에 대하여

L/R과 R/h가 변할 때 축방향 1차 모드($m=1$)인 경우 최소 고유진동수와 그 때 대응되는 원주방향 파동수(n)와의 관계를 나타내었다. 이 그래프에 의하면 동일 R/h에서는 L/R이 작아질수록 최소 고유진동수는 증가하고 그 때 대응되는 원주방향 파동수는 고차로 대응됨을 알 수 있고, 동일 L/R에서는 R/h가 작아질수록 최소 고유진동수는 증가하고 그 때 대응되는 원주방향파동수는 저차로 이동함을 알 수 있다.

또한 L/R=10이고 R/h=50 이상에서는 $n=2$ 에서 최소 고유진동수를 갖게 되고 이때의 진동수는 $n=1$ 인 경우 보다 훨씬 낮으므로 보의 진동수식에 의한 고유진동수 평가는 실제보다 과대 평가된다.

3-3. 이방성 변수와 고유 진동수

직교 이방성인 경우 폐형해로 유도된 고유진동수 식(28)을 무차원 고유진동수 식(32)에 대입하면 식(33)의 무차원 진동수를 얻는다.

$$\Omega = \sqrt{\frac{\eta^4 + a k \xi_1^4 n^4 (n^2 - 1)^2}{\eta^4 + a(1 + n^2 k) \xi_1^4 n^2 (n^2 + 1)}} \dots\dots (33)$$

여기서, $a = E_2/E_1$, $k = h^2/12R^2$, $\xi_1 = L/R$

축방향 1차 모드($m=1$)이고 R/h=20 일 때 L/R이 변할 때 무차원 고유진동수를 구하고 그 때의 원주방향모드를 Fig.7에 나타내었다. 이 그래프에 따르면 고유진동수는 동일 L/R내에서 이방성 변수 $a (=E_2/E_1)$ 가 작을수록 고유진동수는 커진다. 또, L/R=10일 경우에 a 가 작아질수록 최소 고유진동수에 대응되는 n 값이 1에서 2로 이동함을 알 수 있다. 그러므로 a 가 작을수록 보의 진동수식에 의한 고유진동수 평가는 실제보다 과대 평가된다.

Fig.8에서는 Table 1의 4종의 복합재와 알루미늄에 대하여 최소 고유진동수를 나타내었는데 Fig.7에서 제시된 이방성 변수의 영향을 확인할 수 있다.

그러므로 고유진동수 기준으로 직교이방성 복합재 원통셀을 설계할 때에는 이방성 변수가 작은 재료를 선택하여야 함을 알 수 있다.

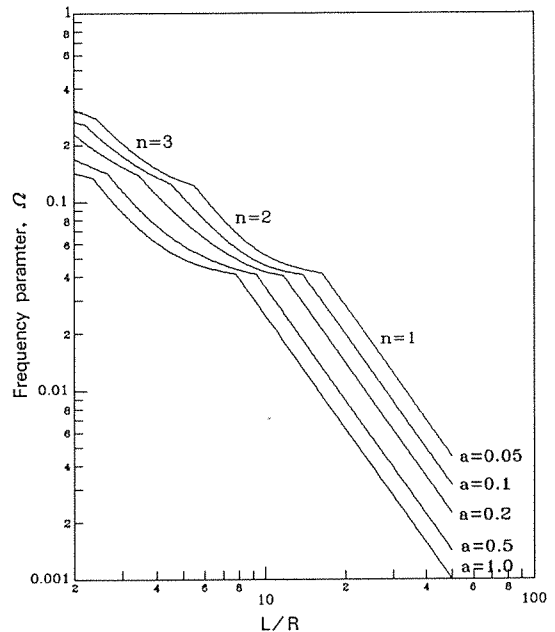


Fig. 7. Lowest frequency parameter when varying orthotropy parameter (a) and L/R. ($R/h=20$, $m=1$)

Table 1. Engineering constants of composites

Material	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12} (-)	ρ (kg/m ³)
aluminum	68.95	68.95	26.5	0.3	2823
graphite/epoxy [T300/N5208]	181	10.3	7.17	0.28	1600
boron/epoxy [B(4)/N5508]	204	18.5	5.59	0.23	2000
glass/epoxy [SCOTCHPLY]	38.6	8.27	4.14	0.26	1800
kevlar/epoxy [KEVLAR 49]	76	5.5	2.3	0.34	1460

3-4. 적층순서와 고유 진동수

복합재의 특성은 적층방법을 임의로 조정할 수 있으므로 적층 원통셀이 동적으로 어떤 특성을 갖는가를 아는 것은 중요하다. 본 연구에서는 고유진동수의 폐형해 유도과정에서 직교 적층인 경우로 한정하였으므로 직교적층 방법에 따른 고유진동수 변화를 살펴본다.

복합재는 적층방법에 따라 강성계수가 달라지므

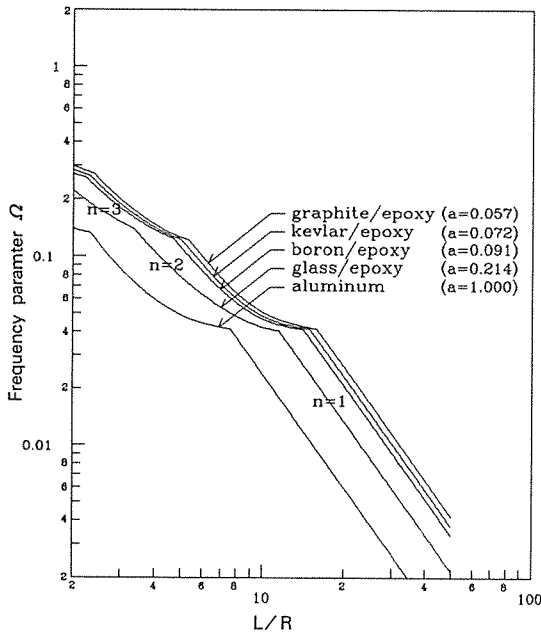


Fig. 8. Lowest frequency parameter of four composite materials and aluminum varying L/R . ($R/h=20$, $m=1$)

로 동일 재료, 동일 치수라 하더라도 그 동적거동이 달라지기 때문에 그 특성을 극대화시켜 적용하는 것이 필요하다.

예로 0° 플라이(ply) 4장과 90° 플라이 4장을 대칭으로 적층하는 경우 적층하는 방법은 Table 2와 같이 모두 6가지의 경우가 생기며 이때 구하여지는 A_{ij} 는 동일하고 D_{ij} 만 달라짐을 알 수 있고 식(28)에서 알 수 있듯이 고유진동수는 D_{22} 에 의

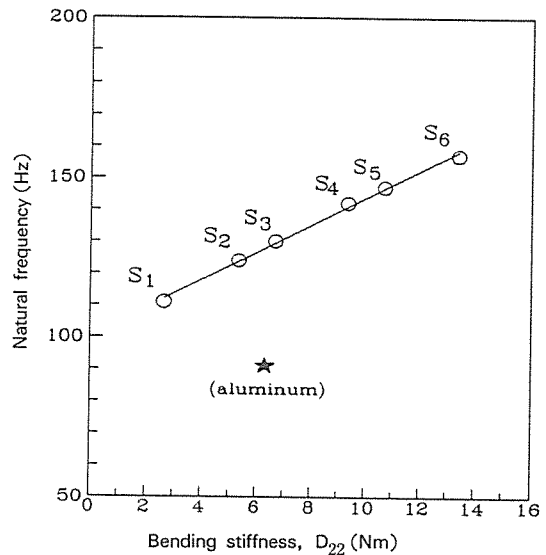


Fig. 9. Lowest natural frequency of symmetric cross-ply laminated cylindrical shell varying stacking sequence

하여 변하게 되므로 결국 D_{22} 가 큰 적층방법을 적용함으로써 원통셸의 고유진동수를 높일 수 있다.

Table 2에 따르면 $[90^\circ/90^\circ/0^\circ/0^\circ]_{sym}$ 인 경우에서, 다시 말하면 90° 플라이를 바깥쪽에 적층시킬수록 D_{22} 가 가장 커져서 가장 높은 고유진동수를 얻을 수 있다. Fig. 9에서는 이를 그래프로 보여주기 위하여 D_{22} 의 변화에 따른 최소 고유진동수의 변화를 치수가 동일한 알루미늄의 경우와 비교하여 나타내었다.

Table 2. Lowest natural frequency of symmetric cross ply laminated cylindrical shell varying stacking sequence(material = graphite/epoxy, $L/R=10$, $R/h=100$, $m=1$)

	stacking sequence	extensional stiffness (MN/m)				bending stiffness (Nm)				natural frequency (Hz)
		A_{11}	A_{12}	A_{22}	A_{66}	D_{11}	D_{12}	D_{22}	D_{66}	
S_1	$[0/0/90/90]_S$	192	5.8	192	14.3	13.4	0.24	2.65	0.6	111(2) *
S_2	$[0/90/0/90]_S$					10.7		5.33		124(2)
S_3	$[0/90/90/0]_S$					9.35		6.67		130(2)
S_4	$[90/0/0/90]_S$					6.67		9.35		142(2)
S_5	$[90/0/90/0]_S$					5.33		10.7		147(2)
S_6	$[90/90/0/0]_S$					2.65		13.4		157(2)

*() : Digit means circumferential wave no. of the lowest frequency

4. 결 론

본 논문에서는 복합재 외팔 원통셀의 고유진동수를 폐형해로 제시하여 복합재 원통셀의 이방성 특성을 설계자로 하여금 쉽게 이용하도록 하였다. 응력함수를 도입하여 진동수 방정식을 폐형해로 유도한 뒤 원통셀의 광범위한 영역에서 사용될 수 있도록 수정한 근사공식을 제시하였다. 4종의 복합재료에 대한 고유진동수 변화를 살펴보고 복합재 원통셀의 적층순서의 변화도 검토하였다.

본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 복합재 외팔 원통셀 고유진동수를 폐형해 형태로 유도하여 복합재 원통셀의 이방성 특성을 명료하게 제시하였다.
- (2) 복합재 외팔 원통셀 고유진동수는 이방성 변수가 작을수록 커지므로 이방성 변수가 작은 graphite/epoxy, kevlar/epoxy 순으로 작아진다.
- (3) 적층순서를 고려한 고유진동수 크기는 동일갯수는 0° 와 90° 플라이를 대칭 적층할 경우에 90° 플라이를 바깥쪽으로 배치할수록 커진다.

후 기

본 연구는 1993년도 교육부 학술연구조성비(ME-93-A-04)의 지원을 받아 수행되었으며 이에 관계자에게 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. Greenberg, J. B. and Stavsky, Y., "Buckling and vibration of orthotropic cylindrical shells", *Acta Mechanica*, Vol.36, pp.15-29, 1980.
2. Darvizeh, M. and Sharma, C. B., "Natural frequencies of laminated orthotropic thin circular cylinders", *Thin-Walled Structures*, Vol.2, pp. 207-217, 1984.
3. Lee, D. G., "Calculation of natural frequencies of vibration of thin orthotropic composite shells by energy method", *J. Composite Mate-*

rials, Vol.22, pp.1102-1115, 1988.

4. Jegley, D. C., "The effect of transverse shearing and anisotropy on vibration frequencies of laminated cylinders", *J. Sound and Vibration*, Vol.138, No.3, pp.389-404, 1990.

5. Bogdanovich, A. E. and Zarutskii, V. A., "Natural vibrations of orthotropic, ribbed, cylindrical shells", *Soviet Applied Mechanics*, Vol.27, No.19, pp.1001-1006, 1991.

6. Sharma, C. B., "Calculation of natural frequencies of fixed-free circular cylindrical shells", *J. Sound and Vibration*, Vol.35, No.1, pp.55-76, 1974.

7. Srinivasan, R. S. and Sankaran, S., "Vibration of cantilever cylindrical shells", *J. Sound and Vibration*, Vol.40, No.3, pp.425-430, 1975.

8. Chang, S. D. and Greif, R., "Vibration of segmented cylindrical shells by a Fourier series component mode method", *J. Sound and Vibration*, Vol.67, No.3, pp.315-328, 1979.

9. Khadakkar, A. G., Narayana, R. and Sankar, K., "Free vibration of a cylindrical shell by holographic interferometry", *J. Sound and Vibration*, Vol.121, No.1, pp.169-180, 1988.

10. Ganesan, N. and Sivadas, K. R., "Free vibration of cantilever circular cylindrical shells with variable thickness", *Computers & Structures*, Vol.34, No.4, pp.667-677, 1990.

11. 이영신, 문흥기, 윤종호, "직교적층 이방성 외팔 원통셀의 자유진동해석", *대한기계학회논문집*, 10권 6호, pp.929-936, 1986.

12. Calladine, C. R., "Natural frequencies of cooling tower shells", *J. Sound and Vibration*, Vol.82, No.3, pp.345-369, 1982.

13. Soedel, W., *Vibrations of shells and plates*, 2nd ed., Marcel Dekker, Inc., 1993.

14. Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, McGraw Hill Co., 1975.

15. Kraus, H., *Thin Elastic Shells*, John Wiley & Sons, Inc. 1967.

16. 김치균, 복합재 원통구조의 정적·동적 특성 연구, 연세대학교 대학원 박사학위논문, 1995.
 17. Yu, Y. Y., "Free vibration of thin cylindrical shells having finite lengths with freely supported and clamped edges", Trans. ASME J. Applied Mechanics Vol.22, No.4, pp. 547-552, 1995.
 18. Vinson, J. R. and Sierakovski, R. L., *The behavior of structures composed of composite materials*, Kluwer Academic Publishers, 1987.
 19. Dong, S. B., "Free vibration of laminated orthotropic cylindrical shells", J. Acoustical Society of America, Vol.44, No.6, pp.1628-1635, 1968.
 20. Blevins, R. D., *Formulas for natural frequency and mode shape*, Van Nostrand Reinhold Company, 1979.
 21. Bushnell, D., "Stress, stability and vibration of complex, branched shells of revolution", Computers & Structures, Vol.4, pp.399-435, 1974.
-