

論文

전단변형 수정방법을 사용한 적층 복합재 보 요소 개발

구정서* · 이석순**

A Laminated Composite Beam Element with Shear Correction

Jeong Seo Koo* and Seok Soon Lee**

ABSTRACT

The effect of shear deformation cannot be negligible in analyzing composite beam structures. C^0 -elements conventionally used do not fit in considering the coupling effects of various deformation modes such as extension, bending, shear and twist and can show the shear locking phenomenon for high slenderness ratio structures if they are fully intergated. Two-noded beam elements cubically interpolated are developed by using the predictor-corrector method by A. K. Noor and the shear correction factor obtained from cylindrical bending assumption by S. Vlachoutsis. The developed beam elements show good performance for various examples, and no shear locking phenomenon.

초 록

복합재 보 구조는 전단 변형의 영향이 크기 때문에 가능한 한 정확하게 전단 변형의 효과를 고려할 수 있는 요소를 개발하는 것이 필요하다. 기존의 C^0 -요소는 구조물의 세장비에 따라서 전단 구속등 수치적 불안정 현상이 나타날 수 있을 뿐만 아니라 인장, 굽힘, 비틀림, 전단 등 여러가지 변형 모우드의 연계 현상을 표현하는데 부적합하다. 본 논문에서는 A. K. Noor의 Predictor-corrector 기법과 S. Vlachoutsis의 원통형 굽힘변형 가정으로부터 구한 전단수정 계수를 이용하여, 적층복합재 보구조를 효율적으로 해석할 수 있는 새로운 3차의 2절점 표준 보요소를 개발하였다. 개발된 요소는 전단 구속 현상이 발생하지 않을 뿐만 아니라 성능 면에서도 매우 우수한 결과를 나타내었다.

1. 서 론

섬유 강화 복합재료는 기존의 금속 재료에 비하여 비강성, 비강도가 높고 섬유의 방향성을 고려한 설계가 가능하기 때문에 구조물의 경량화 설계에 많이 이용되고 있다. 적층 복합재 구조는 특성상 주로 판 구조로 사용된다. 그러나 판 구조는 막강

성(membrane stiffness)은 크지만 굽힘 강성(bending stiffness)은 매우 작기 때문에 보강 부재를 필요로 하는 경우가 많다. 보강 부재는 주로 보나 프레임 구조로 되어 있는데, 복합재 보 및 프레임 구조의 경우에는 인장, 굽힘, 비틀림, 전단 등 여러가지 강성들의 연계 현상으로 인하여 신뢰성 높은 해를 얻을 수 있는 유한요소 수치해석 방법이 별로

* 한국기계연구원 신교통기술연구부

** 경상대학교 기계공학과

개발되어 있지 못하다. 대부분의 상용 프로그램이나 최근의 문헌들을 조사해 보더라도 실용적인 수준의 복합재 보 요소는 거의 없는 실정이다.

A. T. Chen[1]과 G. Singh[2]에 의하여 개발된 적층 복합재 보 요소는 해의 정확도 면에서는 우수한 편이나, 표준 조립이 가능하도록 절점 자유도를 선택할 수 없기 때문에 1차원 보 구조의 해석만 가능하고, 2차원 이상의 보 구조의 해석이나 보강 부재와 같이 판 요소 등 다른 요소와 결합하여 해석해야 하는 경우에 적용할 수 없는 단점이 있다. Koo와 Kwak[3]는 이러한 단점을 해소시킬 수 있는 새로운 유한 요소 수식화 방법을 제시하고, 개발된 요소의 성능을 분석하였다. 이 요소는 표준 조립이 가능한 2절점 3차의 복합재 보 요소로서, 보강 부재의 해석에 유용하게 사용될 수 있다.

본 논문에서는 A. K. Noor[4]에 의하여 제시된 Predictor-corrector 기법과 S. Vlachoutsis[5]의 원통형 굽힘변형 가정에 의한 전단수정 계수를 앞의 연구[3]에서 개발된 보 요소에 적용하여 적층 복합재 보구조의 전단효과를 잘 고려할 수 있는 방법을 제안하고, 전단 변형의 수정 방법이 수치해석의 결과에 미치는 영향을 분석한다.

2. 보 요소의 구성 방정식 유도

수직 전단 변형을 무시한 고전적인 판 이론으로부터 1차의 전단 변형을 고려한 판 이론을 유도하기 위하여, 수직 방향의 변위를 굽힘에 의한 변위와 전단 변형에 의한 변위로 나누어서 다음과 같은 변위장을 가정한다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z w_x^b \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z w_y^b \\ w(x, y, z) &= w^b(x, y) + w^s(x, y) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

여기서 u, v, w 는 적층 판 내의 임의의 점에 대한 x, y, z 방향으로의 면내 변위 또는 수직 변위를 나타낸다. 또한 u_0, v_0 는 x, y 방향으로의 중립면의 변위를, w^b, w^s 는 z 방향으로의 굽힘에 의한 중립면의 변위 및 전단에 의한 중립면의 변위를 나타내며, 그림 1에 표시된 바와 같다.

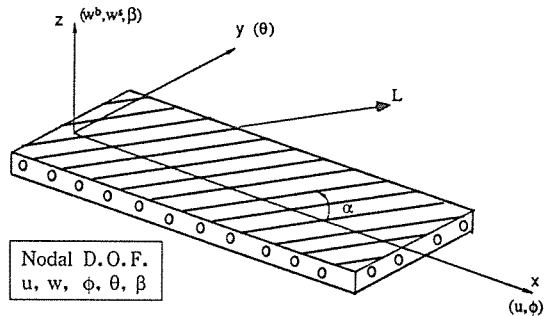


Fig. 1. Degrees of freedom and fiber angle of a lamina

위에서 정의된 변위장을 사용하여 적층 판의 변형도를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_{x0} + z \kappa_x \\ \epsilon_y &= \epsilon_{y0} + z \kappa_y \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy0} + z \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} &= W_{,x}^s \\ \gamma_{yz} &= W_{,y}^s \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \epsilon_{x0} &= u_{0,x}, \quad \epsilon_{y0} = v_{0,y}, \quad \gamma_{xy0} = u_{0,y} + v_{0,x}, \quad \dots\dots (3) \\ \kappa_x &= -w_{,xx}^b, \quad \kappa_y = -w_{,yy}^b, \quad \kappa_{xy} = -2w_{,xy}^b \end{aligned}$$

또한 식 (3)에서 $\epsilon_{x0}, \epsilon_{y0}, \epsilon_{xy0}$ 는 중립면의 변형도를, $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ 는 중립면의 곡률을 나타낸다.

전체 판의 두께가 h 이고 각 단층의 적층각이 α_i 인 적층 판의 응력-변형도 관계를 그림 1에 정의된 국부 좌표계(x, y, z)에 대하여 구해 보자. 먼저 임의의 단층에서 굽힘 변형에 의한 응력-변형도 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있고[6],

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (4)$$

수직 전단 변형에 의한 응력-변형도 관계는 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5)$$

여기서 Q_{ij} 는 단층의 주축 좌표계로부터 적층판의

국부 좌표계로 변환된 재료의 강성행렬이다. 각 단층에 대한 식 (2), (4)를 두께 방향으로 적분하여 적층 판 내부에 발생하는 면내 하중 및 굽힘 모멘트를 계산할 수 있다. 이렇게 구해진 면내 하중 및 굽힘 모멘트와 중립면의 평변 변형도 및 곡률의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{x0} \\ \epsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

같은 방법으로 식 (2), (5)를 사용하면 수직 전단 하중과 중립면의 수직 전단 변형도가 구해진다.

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xz} A_{44} & \sqrt{f_{xz} f_{yz}} A_{45} \\ \sqrt{f_{xz} f_{yz}} A_{45} & f_{yz} A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

위 식 (6), (7)에서 N_x, N_y, N_{xy} 는 면내 하중을, M_x, M_y, M_{xy} 는 굽힘 모멘트를, 그리고 Q_x, Q_y 는 수직 전단 하중을 나타낸다. 또한 식 (7)의 f_{xz}, f_{yz} 는 각각 x, y 축에 관한 전단 수정 계수이다. 식 (6)의 A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} 는 인장, 굽힘-인장, 굽힘에 대한 강성 계수를 나타내며, 다음의 식으로부터 구해진다.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (i, j=1, 2, 6)$$

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} dz \quad (i, j=4, 5) \dots\dots\dots (8)$$

식 (6), (7)에서 구해진 적층판에 관한 구성 방정식은 N_y, M_y, γ_{xy} 에 0을 대입하고 ϵ_{y0}, κ_y 를 $\epsilon_{x0}, \gamma_{xy0}, \kappa_x, \kappa_{xy}$ 의 항으로 유도하여 소거하면 아래와 같은 적층 복합재 보에 대한 구성 방정식이 구해진다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_{xy} \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & 0 \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{x0} \\ \gamma_{xy0} \\ \kappa_x \\ \kappa_{xy} \\ \kappa_{xz} \end{Bmatrix} \dots\dots (9)$$

여기서,

$$C_{11} = A_{11} + (A_{22} B_{12}^2 - 2A_{12} B_{12} B_{22} + A_{12}^2 D_{22}) / (B_{12}^2 - A_{22} D_{22})$$

$$C_{12} = A_{16} + (A_{22} B_{12} B_{26} - A_{26} B_{12} B_{22} - A_{12} B_{22} B_{26} + A_{12} A_{26} D_{22}) / (B_{12}^2 - A_{22} D_{22})$$

$$C_{13} = B_{11} + (A_{22} B_{12} D_{12} - B_{12}^2 B_{22} - A_{12} B_{22} D_{12} + A_{12} B_{12} D_{22}) / (B_{12}^2 - A_{22} D_{22})$$

$$C_{14} = B_{16} + (A_{12} B_{26} D_{22} - B_{12} B_{22} B_{26} + A_{22} B_{12} D_{26} - A_{12} B_{22} D_{26}) / (B_{12}^2 - A_{22} D_{22})$$

$$C_{22} = A_{66} + (A_{22} B_{26}^2 - 2A_{26} B_{22} B_{26} + A_{26}^2 D_{22}) / (B_{12}^2 - A_{22} D_{22})$$

$$C_{23} = B_{16} + (A_{22} B_{26} D_{12} - B_{12} B_{22} B_{26} - A_{26} B_{22} D_{12} + A_{26} B_{12} D_{22}) / (B_{12}^2 - A_{22} D_{22})$$

$$C_{24} = B_{66} + (A_{26} B_{26} D_{22} - B_{22} B_{26}^2 - A_{26} B_{22} D_{26} + A_{22} B_{26} D_{26}) / (B_{12}^2 - A_{22} D_{22})$$

$$C_{33} = D_{11} + (A_{22} D_{12}^2 - 2B_{12} B_{22} D_{12} + B_{12}^2 D_{22}) / (B_{12}^2 - A_{22} D_{22})$$

$$C_{34} = D_{16} + (B_{12} B_{26} D_{22} - B_{22} B_{26} D_{12} - B_{12} B_{22} D_{26} + A_{22} D_{12} D_{26}) / (B_{12}^2 - A_{22} D_{22})$$

$$C_{44} = D_{66} + (B_{26}^2 D_{22} - 2B_{22} B_{26} D_{26} + A_{22} D_{26}^2) / (B_{12}^2 - A_{22} D_{22})$$

$$C_{55} = f_{xz} A_{44}$$

3. 유한 요소 수식화

유한 요소 평형 방정식을 유도하기 위하여 가상 일의 정리를 사용한다[7]. 적층 복합재 판에 대한 가상 일의 정리에서 보 중립면의 축방향(x방향)에 수직한 변위(v_0)를 무시하기 위해 v_0 에 0을 대입하고 식 (9)의 구성 방정식을 사용하면 다음과 같은 적층 복합재 보 구조에 관한 식을 얻을 수 있다.

$$\delta \pi = \int_L \{N_x \delta u_{0,x} + N_{xy} \delta u_{0,y} + M_x \delta w_{,xx} + 2M_{xy} \delta w_{,xy} + Q_x \delta w_{,x}\} dx - \int_L q_0 \delta w \, dx = 0 \dots\dots\dots (10)$$

여기서 $w = w^b + w^s$ 이고, L 은 보의 길이를, q_0 는 균일 분포 하중의 크기를 나타낸다.

식 (10)은 보 구조에 대한 표현이므로 y 에 종속적인 모든 변수는 독립 변수로 취급되어야 함을 고려하면, $u_0, w^b, w^s, u_{0,y}, w_{,y}^b$ 등이 독립 변수가

된다. 이들 변수 중에서 $u_{0,y}$, w_y^b 는 각각 적층 복합재 보 요소의 연계 효과로부터 파생되는 면내 변형 및 비틀림 변형을 나타내는 변수로서 x 만의 함수로 표현된다. 식 (10)을 분할하기 위하여 u_0 , $u_{0,y}$, w^s , w_y^b 는 선형 보간 함수를, w^b 는 Hermite 보간 함수를 사용한다.

이러한 보간 함수를 식 (10)에 대입하여 분할된 내부 가상일을 구하면 다음과 같다.

$$\delta \pi_{int} = \delta d^b T K^b d^b + \delta w^s T K^s w^s \dots\dots\dots (11)$$

여기서

$$d^b = \{u_1 \ w_1^b \ \theta_1 \ \phi_1 \ \beta_1 \ u_2 \ w_2^b \ \theta_2 \ \phi_2 \ \beta_2\}^T$$

$$w^s = \{w_1^s \ w_2^s\}^T$$

$$u = u_0, \ \theta = -w_{,x}^b, \ \phi = w_{,y}^b, \ \beta = u_{0,y}$$

그리고 각 변형 모드에 대한 강성 행렬은 아래와 같이 구해진다.

$$K^b = \int_L b \ B^b T \ C^b B^b \ dx$$

$$K^s = \int_L b \ B^s T \ C^s B^s \ dx$$

단,

$$B^b = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_1 \\ 0 & -H_{1,xx} & -H_{2,xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2N_{1,x} & 0 \\ & N_{2,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_2 \\ & 0 & -H_{3,xx} & -H_{4,xx} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & -2N_{2,x} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^s = \{N_{1,x}, \ N_{2,x}\}$$

위의 수식에 사용된 N , H 는 각각 선형 및 Hermite 보간함수, b 는 보의 폭, C^b 는 식 (9)의 면내 변형 및 굽힘 변형에 대한 재료 상수 행렬이며, C^s 는 C_{55} 이다. 또한 균일 분포 하중에 대한 절점 변위 벡터는 다음과 같이 구해진다.

$$q^b = \int_L \{0 \ q_0 H_1 \ q_0 H_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ q_0 H_3 \ q_0 H_4 \ 0 \ 0\}^T dx$$

$$q^s = \int_L \{q_0 N_1 \ q_0 N_2\}^T dx$$

식 (11)에는 수직 방향의 변위가 w^b , w^s 등 두 가지로 표현되어 있으므로 변위 경계조건의 부여나, 요소의 강성 행렬을 전체 구조의 강성 행렬로 조립하는데 어려움이 있다. 특히 보강 부재의 경우와 같이 판 또는 셸 요소 등에 부착되어 있는 경우에는 식 (11)의 강성 행렬을 사용하여 판 또는 셸 요소의 강성 행렬의 조립하기란 거의 불가능하다. 따라서 w^b , w^s 를 전체 수직 변위인 w 로 바꾸어서 표현하는 것이 필요하므로 w^s 를 w^b 로 투영 (projection) 시키는 방법을 사용한다. 이 투영에 사용되는 행렬은 수직 하중에 대한 평형 방정식과 zero 수직 하중시에 전단 변위가 발생하지 않아야 한다는 조건으로부터 구할 수 있다. 즉, 수직 하중에 대한 평형 방정식에서

$$M_{x,x} + 2M_{xy,y} - Q_x = 0 \dots\dots\dots (12)$$

이 구해진다. 소거하여야 할 변수는 w_1^s , w_2^s 인데 조건식은 한 개뿐이므로 추가적인 조건식을 구해야 한다. 식 (12)는 zero 수직하중 작용시, $w_1^s = w_2^s$ 의 해를 가지므로 이것이 trival solution($w_1^s = w_2^s = 0$)을 가질 조건을 부과할 수 있다. 즉

$$w_1^s + w_2^s = 0 \dots\dots\dots (13)$$

은 이러한 조건을 만족시키는 조건의 하나인데 전단변형에 의한 변위의 상대적 기준점을 요소의 중앙에 선택한 것과 같은 의미가 된다. 식 (12), (13)으로부터 다음의 투영 관계식이 구해진다.

$$w^s = R \ d^b \dots\dots\dots (14)$$

여기서,

$$R = R^{s-1} R^b$$

$$R^s = \begin{bmatrix} -C_{55} L^2 & C_{55} L^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^b = \begin{bmatrix} 0 & -12C_{33} & 6C_{33} L & 0 & C_a L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 12C_{33} & 6C_{33} L & 0 & -C_a L^2 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_a = C_{33} + 2C_{14}$$

식 (14)를 식 (11)에 대입하면 굽힘 변위의 항

으로 표현된 내부 가상일이 구해진다.

$$\delta \pi_{int} = \delta d^{bT} (K^b + R^T K^s R) d^b \dots\dots\dots (15)$$

또한 전체 수직 변위(w)는 굽힘 변위(w^b)와 전단 변위(w^s)의 합으로 구해질 수 있으므로 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$d^b = (I + \bar{R})^{-1} d \dots\dots\dots (16)$$

여기서,

$$d^b = \{u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ \phi_1 \ \beta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2 \ \phi_2 \ \beta_2\}^T$$

식 (16)에서 I는 [10×10]의 크기를 갖는 단위 행렬을 나타내며 \bar{R} 는 d의 자유도 성분과 일치할 수 있도록 R에 zero 값을 삽입하여 크기를 확장시킨 행렬이다. 식 (16)의 관계를 식 (15)에 대입하면 전체 수직 변위의 항으로 표현된 내부 가상 일이 구해지고, 요소의 강성 행렬을 구할 수 있다.

$$\delta \pi_{int} = \delta d^T K d \dots\dots\dots (17)$$

단,

$$K = [(I + \bar{R})^{-T} (K^b + R^T K^s R) (I + \bar{R})^{-1}] \dots\dots (18)$$

동일한 절차를 식 (10)의 두번째 항에 적용하면 등분포 하중의 경우에 대하여 전체 수직 변위의 항으로 표현된 외부 가상일을 구할 수 있다.

$$\delta \pi_{ext} = \delta d^T F \dots\dots\dots (19)$$

여기서,

$$F = [(I + \bar{R})^{-T} (q^b + R^T q^s) \dots\dots\dots (20)$$

$$q^b = \int_L \{0 \ q_0 H_1 \ q_0 H_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ q_0 H_3 \ q_0 H_4 \ 0 \ 0\}^T dx$$

$$q^s = \int_L \{q_0 N_1 \ q_0 N_2\}^T dx$$

식 (18)과 식 (20)에서 구해진 요소 수준의 강성 행렬 및 외부 하중 벡터는 별도로 추가된 절점 자유도가 없는 표현이므로 표준 조립과정을 사용하여 전체 구조의 강성 행렬을 구할 수 있다.

4. 수직전단 변형의 수정방법

Mindlin 판 이론을 기초로 개발된 유한요소는 수직 전단변형의 정확성을 제고하기 위하여 전단

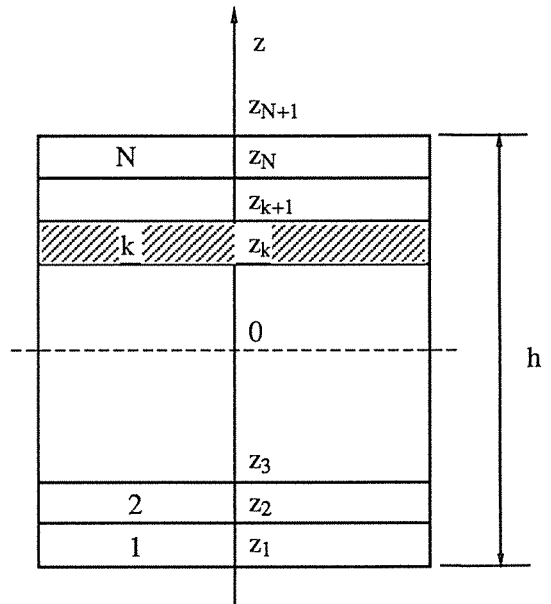


Fig. 2. Cross section of the multilayered plate

수정 계수를 사용하게 된다. 이 전단수정 계수는 평형 방정식을 사용하여 구한 변형 에너지와 판이론으로부터 구한 변형에너지를 동일하게 하는 원리로부터 구해진다. 등방성 재료의 경우, 사각형 단면은 6/5의 값을 갖게 되지만, 적층 복합재 구조의 경우에는 적층 방법 및 변형 상태에 따라 일정하지 못한 값을 가진다. 따라서 복합재 구조 해석에서는 보다 정확한 수직 전단응력을 얻기 위하여, 여러가지의 알고리즘이 제안되고 있다. 본 논문에서는 S. Vlachoutsis의 원통형 굽힘 변형을 사용한 전단수정 계수 결정 방법과 A.K. Noor에 의하여 제안된 Predictor-corrector 방법을 요소 개발에 적용하였다. S. Vlachoutsis의 전단 수정 계수는 그림 2와 같이 정의된 직교 적층 복합재 단면에 대하여 원통형 굽힘 변형시의 변형에너지를 이용하여 구하는데 그 결과식은 다음과 같다.

$$f_{iz} = \frac{R_i^2}{d_i I_i} \quad (i=x, y) \dots\dots\dots (21)$$

여기서,

$$R_i = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} D_i(z) (z - z_{ni})^2 dz, \quad d_i = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G_{iz}(z) dz,$$

$$I_i = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{g_i^2(z)}{G_{iz}(z)} dz, \quad g_i(z) = - \int_{\frac{h}{2}}^z D_i(z) (z - z_{ni}) dz,$$

$$z_{ni} = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} D_i(z) z dz / \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} D_i(z) dz,$$

$$D_x(z) = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}, \quad D_y(z) = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}$$

이고, 식 (21)에서 구한 전단 수정계수(f_{xz} , f_{yz})를 식 (7)에 적용하면 복합 적층의 전단 효과가 고려된 복합재 보요소가 얻어진다.

한편, Predictor-corrector 방법은 먼저 적당히 가정된 전단 수정계수(f_{xz}^0 , f_{yz}^0)를 사용하여 구조해석을 수행하고, 그 결과를 두께 방향의 3차원 평형 방정식에 적용시켜 수정된 응력 및 변형도를 구한다. 이 수정된 응력장(stress field) 하에서의 변형 에너지를 계산하여 새로운 전단수정 계수(f_{xz}^1 , f_{yz}^1)를 구하고, 이것을 사용하여 수정된 전단 변위를 계산한다. 이 방법을 보 구조에 적용시키기 위하여 3차원 평형 방정식으로부터 수직 전단 응력을 구하면 다음과 같다.

$$\tau_{xz} = - \int_{\frac{h}{2}}^z \sigma_{x,x} dz + c_1, \quad \tau_{yz} = - \int_{\frac{h}{2}}^z \tau_{xy,x} dz + c_2$$

..... (22)

여기서, 적분상수 C_1 , C_2 는 경계조건으로부터 결정된다. 식 (22)에서 구한 수직전단 응력과 3차원 구성 방정식을 사용하면 다음과 같이 수직전단 변형도가 계산된다.

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

식 (23)에서 구한 변형도를 사용하면 구조 내부에 발생하는 변형에너지 밀도를 계산할 수 있다. 즉,

$$U_{xz} = \frac{1}{2} \bar{Q}_{44} \gamma_{xz}^2, \quad U_{yz} = \frac{1}{2} \bar{Q}_{55} \gamma_{yz}^2 \quad \dots\dots (24)$$

판이론으로부터 구한 변형 에너지와 식 (24)를 두께 방향으로 적분한 3차원 모형의 변형에너지가 같아야 한다는 조건을 사용하여 전단 수정계수를 계산한다.

$$f_{xz} = \frac{1}{2} (f_{xz}^0) C_{44} (\gamma_{xz}^0)^2 / \left(\sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} U_{xz} dz \right)$$

$$f_{yz} = \frac{1}{2} (f_{yz}^0) C_{55} (\gamma_{yz}^0)^2 / \left(\sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} U_{yz} dz \right) \dots\dots\dots (25)$$

여기서,

$$(C_{44}, C_{55}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{44}, \bar{Q}_{55})^{(k)} dz$$

최종적으로 식 (25)에서 구한 전단수정 계수를 이용하면, 수정된 수직 전단 변위가 구해진다.

$$\Delta w^s = \left(\frac{f_{xz}^0}{f_{xz}} \Delta x + \frac{f_{yz}^0}{f_{yz}} \Delta y \right) \frac{\Delta w^{s0}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \dots (26)$$

여기서, Δw^{s0} 는 Predictor 단계에서 구한 수직 전단변위이고, Δw^s 는 Corrector 단계에서 수정된 수직 전단변위이다. 그리고 Δx , Δy 는 절점으로부터 수정된 전단변위를 구하려는 요소내부 어떤 점까지의 거리를 나타낸다.

5. 수치 예제 및 검토

개발된 복합재 보 요소의 성능을 분석하고 신뢰성을 검증하기 위하여, 몇가지 전형적인 문제에 대하여 수치해석을 수행하고, 그 결과를 이론해, 문헌의 결과 및 판요소로 해석한 결과와 비교하였다. 다음에 검토할 수치해석 결과의 기술을 편리하게 하기 위하여 다음과 같이 약어를 정의한다. CLT(Classical lamination theory)는 수직전단 변형을 무시한 보요소의 해석 결과를, FSDT(IS)는 전단 수정계수를 등방성(Isotropic) 구조와 같이 6/5로 가정하고 일차전단변형 이론(First-order shear deformation theory)을 사용하여 개발한 보요소의 해석 결과를, FSDT(CB)는 S. Vlachoutsis의 원통형굽힘(Cylindrical bending) 변형 가정으로부터 구한 전단수정 계수와 일차전단변형 이론을 사용하여 개발한 보요소의 해석 결과를, FSDT(PC)는 A. K. Noor의 Predictor-corrector기법과 일차전단 변형 이론을 사용하여 개발한 보요소의 해석 결과를, 그리고 HSDT는 고차의 전단 변형이론(Higher order shear deformation theory)[2]을 사용하여 개발한 보요소의 해석 결과를 나타낸다.

5-1. 등방성 재료의 외팔보 해석

본 해석에 사용된 외팔보, 그림 3은 단면의 종횡비가 5이고, 재료의 Poisson 비가 0.3이며, 끝단에 집중 하중을 받고 있다. 개발된 요소의 성능을 분석하기 위하여 전단 수정 계수(f_{xz})가 6/5일 경우에 대하여, 보 끝단의 처짐을 감차 적분을 사용한 선형 보 요소 및 G. Singh에 의하여 개발된 고차의 전단 변형 이론(HSDT)에 근거한 요소와 비교하여 표 1에 정리하였다. 개발된 보 요소의 결과는 Timoshenko 보 이론을 사용하여 구한 결과와 정확히 일치하며 다른 요소와 비교하여도 매우 우수한 결과임을 알 수 있다. 만약 본 요소에서 f_{xz} 값으로 3/2로 사용하면 탄성론의 해[8]와 일치하는 결과가 구해진다.

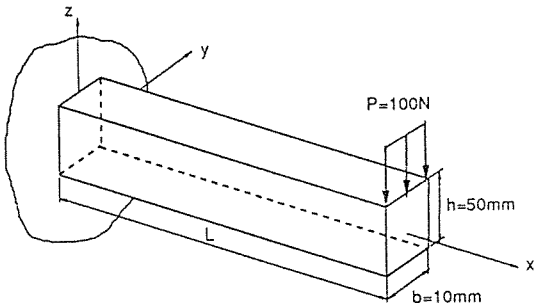


Fig. 3. Isotropic cantilever beam under a concentrated force

Table 1. Tip deflection normalized with the theoretical solution of Timoshenko beam for the isotropic cantilever beam when slenderness ratio is 5

| No. of elem. | Present ($f_{xz} = 6/5$) | Linear element | HSDT[2] |
|--------------|----------------------------|----------------|---------|
| 1 | 1.0000 | 0.9430 | 0.9947 |
| 2 | 1.000 | 0.9851 | 0.9973 |
| 4 | 1.000 | 0.9956 | 0.9986 |
| 8 | 1.000 | 0.9982 | 0.9989 |
| 16 | 1.000 | 0.9989 | 0.9992 |

그림 4는 보 구조의 세장비 변화에 대한 개발된 요소들의 수치해석 정확도를 비교하여 나타낸 것이다. 개발된 요소는 세장비 5이상에서는 탄성해와 비교하여 1.2% 이내의 오차로 잘 일치하는 결과를

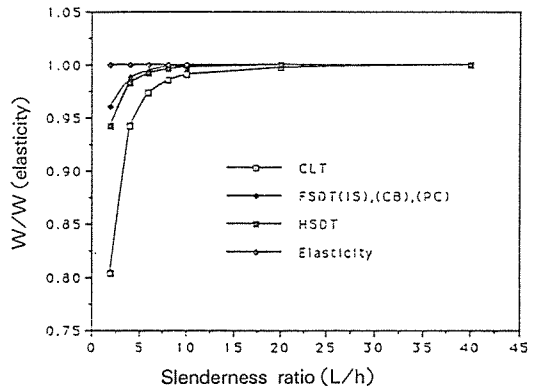


Fig. 4. Normalized tip deflection of the isotropic cantilever beam analyzed with one element

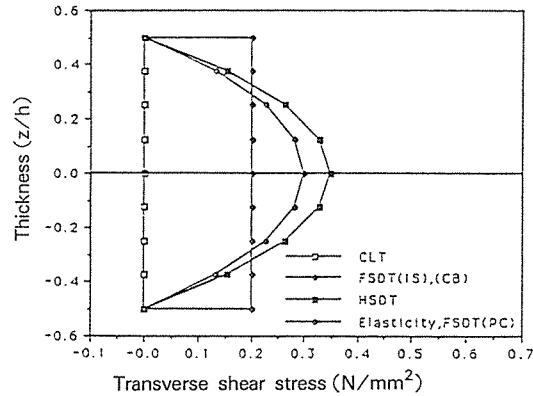


Fig. 5. Distribution of the transverse shear stress across the thickness of isotropic cantilever beam under the concentrated load(L/h = 5).

보여주고 있으며, 세장비가 증가하여도 전단 구속 등의 수치적 불안정 현상을 나타내지 않고 있다. 본 연구에서 개발된 요소에서는 엄밀 적분(exact integration)을 사용하였지만 전단 구속이 발생하지 않는 이유는 기존의 2절점 선형 요소가 굽힘 및 전단 변형을 모두 선형으로 보간한 데 비하여, 본 요소에서는 보의 변형을 정확하게 표현할 수 있도록 굽힘변형은 3차 보간, 전단변형은 1차 보간을 하여 보간법에 의한 수치오차를 줄였기 때문이다.

등방성 구조의 경우에는 본 논문에서 고려하고 있는 전단 수정 방법에 무관하게 동일한 변위 결과를 보여주고 있으나, 전단 응력의 분포는 그림 5와 같이 FSDT(PC)의 경우가 탄성해의 결과와 동일한 결과

를 얻을 수 있다.

5-2. 대칭 직교 적층 (90₂₀/0₂₀)_s 외팔 보의 해석

개발된 요소의 복합재 보 구조 해석에 대한 수렴 특성과 전단 변형 수정 방법의 타당성을 보이기 위하여, 그림 6과 같이 끝단에 집중 하중을 받는 대칭 직교 적층(90₂₀/0₂₀)_s 외팔 보를 해석하였다. 해석에 사용된 보 구조는 길이가 100mm, 폭이 30mm, 두께가 10mm이며, 적층에 사용된 단층의 재료 상수는 다음과 같다.

$$E_1 = 174.6, \quad E_2 = 7, \quad G_{12} = G_{13} = 3.5, \\ G_{23} = 1.4, \quad \nu_{12} = 0.25$$

여기에 사용된 재료 상수 값들의 단위는 GPa이고, 하첨자(1, 2, 3)은 각 단층의 재료 주축 좌표계 방향을 나타낸다.

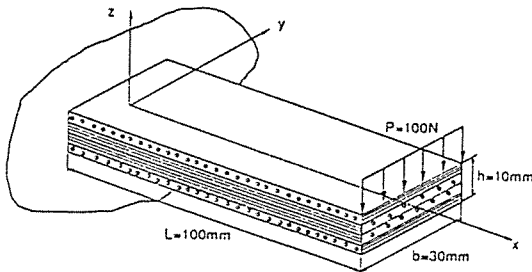


Fig. 6. Laminated cantilever beam [90₂₀/0₂₀]_s under a concentrated load at the tip

그림 7은 수직 하중의 크기가 100N일 때 보 끝단의 처짐 변위를 나타낸 것이다. 개발된 보 요소의 결과(FSDT(IS))는 G. Singh의 HSDT 요소 및 상용 프로그램인 NISA의 4절점 판 요소(PLELEM)를 사용하여 해석한 결과와 상당히 잘 일치하고 있으며, 수직전단 변형을 무시한 결과(CLT)에 비하여 3.3% 정도 큰 값을 가진다. 또한 전단 변형 수정방법을 사용하여 개발한 요소(FSDT(CB)), FSDT(PC)는 다른 요소의 결과(FSDT(IS), HSDT, PLELEM) 보다 0.5% 큰 값을 나타내고 있다. 그림 8은 보 두께 방향으로 구해진 수직 전단 응력의 분포를 나타낸 것이다. Predictor-corrector 방법을 적용하여 구한

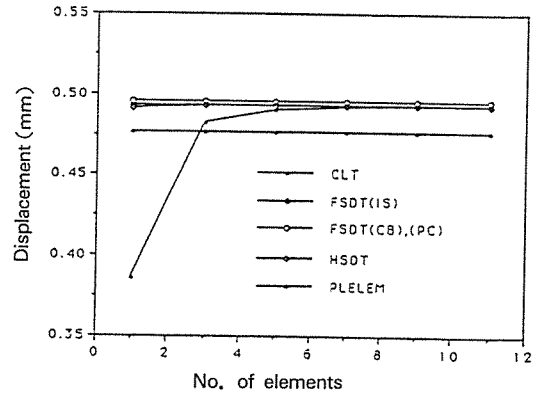


Fig. 7. Tip deflection of the laminated cantilever beam

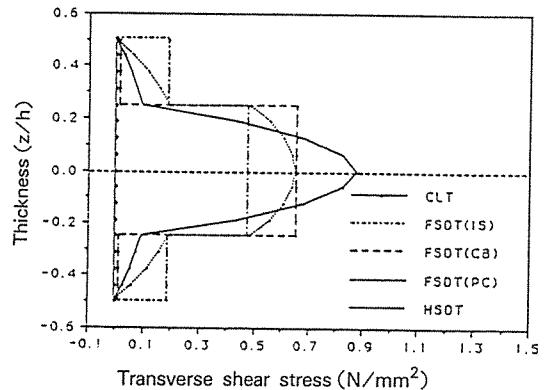


Fig. 8. Distribution of the transverse shear stress across the thickness of the laminated cantilever beam under the concentrated load.

결과는 각 적층의 경계 부위에서 수직 전단 응력의 연속성이 유지되고 보의 상하면에서 수직 전단 응력이 zero가 되는 등 물리적인 의미에 잘 부합되고 있다. 개발된 요소에서는 굽힘 변형 변위와 수직 전단 변형 변위를 독립적으로 구해지므로, A.K. Noor[4]의 Predictor-corrector 방법을 적용시켜 수직 전단 변형 변위를 수정하고 정확한 단면의 수직 전단 응력 분포를 구하는데 적합하다.

한편, 식 (14)와 같이 전단변형을 굽힘변형으로 투영시켜서 전단변위(w^s)를 소거하는 방법이 어느 정도의 수치해석 오차를 유발하는지 검토하기 위하여, 대칭 적층판, 비대칭 직교적층판, 비대칭 앵글 플라이 적층판을 해석하고 w^s를 소거하지 않고 해석한 경우와 비교하였다. 대칭적층판과 비대칭

직교적층판의 경우에는 정확히 일치하는 결과를 보였다. 그러나 비대칭 앵글 플라이 적층판의 경우에는 일치하지는 않지만 상당히 근사적인 결과를 보였고 요소의 수를 증가시키면 수렴하는 특성을 보였다. 그림 9는 (90/±θ/90) 형태의 앵글 플라이 적층판에서 θ를 변화시켰을 때 전단 변위의 투영에 의한 수치해석 오차를 요소 20개를 사용하여 구한 것이다. θ가 25°일때 최대오차 1.3%이며 전체적으로로는 잘 일치하는 결과를 나타내고 있다. 또한 최대의 수치해석 오차가 발생하는 적층각에 대하여 요소의 수를 증가시켜서 해를 구하고, 구해진 해의 수렴 과정을 그림 10에 나타내었는데 해석에 사용된 요소의 수가 증가하면 투영 방법에 의한 오차는 제거되는 현상을 보이고 있다.

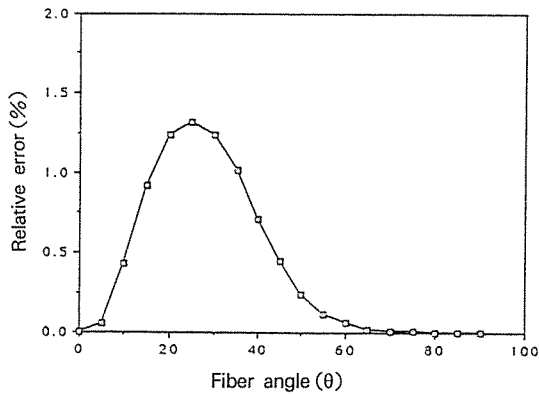


Fig. 9. Numerical error due to the projection method for angle-ply laminate[90₂₀/±θ₂₀/90₂₀]

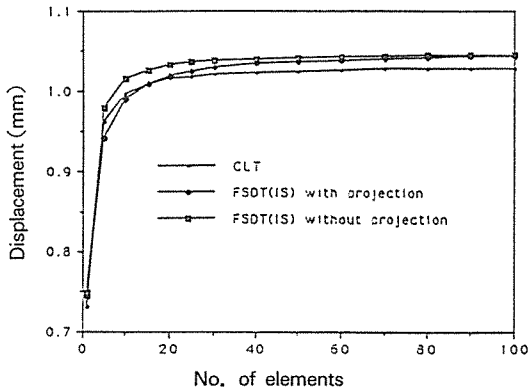


Fig. 10. Tip deflection of unsymmetric angle-ply laminate[90₂₀/±25₂₀/90₂₀]

5-3. 복합재 프레임 구조의 해석

앞에서 해석한 복합재 보 구조는 수평방향의 변형과 수직방향의 변형이 연계되지 않으므로 절점 변위가 공간의 기하학적 자유도 수보다 많게 수식화된 유한요소[1, 2]를 사용하여도 해석이 가능하다. 그러나 일반적인 형상의 보 구조는 전체 절점 변위에 대하여 강성 행렬을 표준조립할 수 있는 유한요소를 사용하여야 해석이 가능하므로 전단 변형을 굽힘변형으로 투영(projection)시켜서 전단 변위(w^s)를 소거시키는 것은 매우 중요하다. 그림 11은 균일분포하중(2N/mm²)을 받는 직각 프레임 구조로서(0/90/0/90) 형태의 적층을 갖는다. 그림

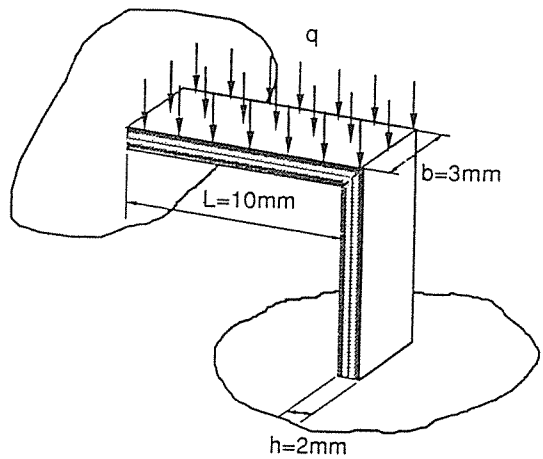


Fig. 11. L-shaped symmetric cross-ply laminate [(0₄/90₄)_s] frame

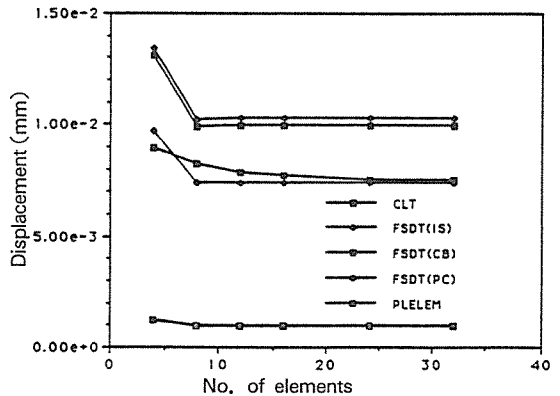


Fig. 12. Maximum deflection of the L-shaped symmetric cross-ply laminate frame

12는 프레임의 최대처짐 변위를 여러가지 해석 방법으로 구하여 사용된 유한요소 수와 대비시켜 나타낸 것이다. FSDT(IS)와 PLELEM(NISA의 4절점 판요소)는 전단수정계수로서 등방성 재료의 값인 6/5를 사용하였으므로 상호 근접한 값으로 수렴함을 알 수 있다. 그런데 FSDT(CD)와 FSDT(PC)는 복합재료의 수직전단 변형을 잘 고려할 수 있도록 수직화되어 있으므로 CLT, FSDT(IS), PLELEM 보다 우수한 해를 얻을 수 있다. 그러나 FSDT(PC)의 Predictor-corrector 방법은 보의 모서리 부분에서 발생하는 수직 전단 변위와 축 방향 변위의 연계 현상을 무시하고 수직 전단변형 수정을 하게 되므로 FSDT(CB) 보다 약간 큰 값이 구해진다.

6. 결 론

본 논문에서는 굽힘과 전단 변형을 분리시킨 보간 방법을 사용하여 적층복합재의 전단 효과를 잘 고려하면서도 전단 잠김 현상이 발생하지 않는 2절점 3차 요소를 개발하였다. 이 요소는 표준 조립이 가능하여 판 구조에 부착되어 있는 보강 부재의 모델링에 용이하게 사용될 수 있다. 개발된 요소는 집중 하중을 받는 등방성 보 구조의 경우에는 Timoshenko 보의 이론 해를 구할 수 있고, 복합재 보 구조의 경우에도 매우 양호한 해를 얻을 수 있다. 전단 변형을 투영하는 방법에 의한 오차는 대칭 적층이나 비대칭 직교 적층의 경우에는 zero이고 일반적인 적층이나 비대칭 앵글 플라이 적층의 경우에는 약간의 오차를 나타내지만 요소의 수를 증가시키면 소멸 된다. 특히 수직전단 변형을 수정하는 방법은 수치해석의 결과에 큰 영향을 미치게 되는데, (0/90/0/90) 형태의 적층으로 이루어진 직각 프레임은 S. Vlachoutsis의 전단 수정 계수를 사용한 경우와 등방성 재료의 6/5를 사용한 경우를 비교하면 처짐 변위에서 25% 정도의 오차가 발생한다. 따라서 복합재 보구조 해석에서는 적층을

고려한 전단 수정 계수를 사용하는 것이 반드시 필요하며, 본 논문에서 개발된 요소는 수직 전단 변형의 영향이 큰 적층 복합재 보구조의 해석에 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. Chen, A. T. and Yang, T. Y., "Static and dynamic formulation of a symmetrically laminated beam finite element for a microcomputer," *J. of Composite Materials*, Vol.19, 1985, pp.459-475.
2. Singh, G., Rao, G. V. and Iyengar, N. G. R., "Nonlinear bending of thin and thick unsymmetrically laminated composite beams using refined finite element model," *Computers and Structures*, Vol.42, 1992, pp.471-479.
3. Koo, J. S. and Kwak, B. M., "A laminated composite beam element separately interpolated for the bending and shearing deflections without increase in nodal DOF," *Computers and Structures*, Vol.53, 1994, pp.1091-1098.
4. Noor, A. K. and Peters, J. M., "A posteriori estimates for shear correction factors in multilayered composite cylinders," *J. of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.115, 1989, pp.1225-1244.
5. Vlachoutsis, S., "Shear correction factors for plates and shells," *Int. J. for Num. Meth. in Engng*, Vol.33, 1992, pp.1537-1552.
6. Whitney, J. M. and Pagano, N. J., "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates," *J. Appl. Mech., Trans ASME*, Vol.37, 1970, pp.1031-1036.
7. Reddy, J. N., *Energy and variational methods in applied mechanics*, John Wiley & Sons Inc., 1984.
8. Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of elasticity*, 3rd Ed., McGraw-Hill Inc., 1970.