

論文

강도를 고려한 복합재료 적층판의 최적설계

김창완* · 전만수** · 황운봉*** · 박현철*** · 한경섭***

Optimal Design of Laminated Composite Plates for Strength

C.W. Kim*, M.S. Joun**, W.Hwang***,
H.C. Park*** and K.S. Han***

ABSTRACT

Optimum fiber orientations of laminated composite plates for the maximum strength are found under multiple inplane loading conditions. Tasi-Wu and Tasi-Hill failure criteria are taken as objective functions. Based on the state space method, effective optimal design formulation is developed and solution procedure is described with the emphasis on the method of calculations of the design sensitivities. Numerical results are presented for the several test problems.

초 록

다양한 면내 하중을 받는 복합재료 적층판이 최대 강도를 갖기 위한 최적 적층각도를 결정하였다. Tasi-Wu 파단조건식과 Tsai-Hill 파단조건식을 각각 목적함수로 취하였다. 상태공간법을 이용하여 최적화 문제를 수식화 하였고 정확한 설계민감도 계산에 주안점을 두었다. 수치예에 대한 최적설계 결과들을 제시하였다.

1. 서 론

섬유강화 복합재료는 높은 비강도 및 비강성 등 우수한 기계적 성질을 갖고 있어 최근 산업 구조물에 점차 많이 응용되고 있다. 특히 설계자의 다양한 요구조건에 합당한 특성을 갖도록 각 층의 두께와 섬유방향을 결정할 수 있는 이방성 재료의 특성 때문에 무게가 중요한 요소인 항공기 등의 부구조물뿐만 아니라 일차구조물(primary structure)에까지 널리 이용됨에 따라 복합재료를 이용한 최적설계 연구개발이 활발하게 전개되어 오고 있다[1-3].

실제로 하중을 받는 복합재료 평판구조는 최적화 과정에서 필요한 최적기준, 즉 목적함수를 여러가지로 설정할 수 있고 설계변수 또한 다양하다. 초기의 복합재료 최적화 설계에 대한 연구는 일반적으로 등방성 재료에 많이 사용하는 중량을 목적함수로 하여 연구가 진행되었다. Schmit와 Farshi[4~5]는 주어진 적층각도하에서 적층판의 무게를 최소화 하고자 두께를 설계변수로 설정하여 최적화를 수행하였다. 이때에 강도 및 강성을 구조조건으로 하였다. Tauchert와 Adibhatla[6]는 외팔보가 굽힘을 받을 경우 각 길이 대 두께비에 대한

* 국방과학연구소

** 경상대학교 기계공학과

*** 포항공과대학교 기계공학과

전체 섬유부피분율이 일정하다는 조건하에서 강성 및 파괴 하중을 각각 최대화하기 위한 섬유밀도 분포를 결정하였는데 이를 실제로 응용하기는 거의 불가능하다. 점차 최적설계의 결과를 실제적 응용이 가능한 적층각도를 설계변수로 취하려는 시도가 시작되었다. Tauchert와 Adibhatla[7]는 적층각도 및 두께를 설계 변수로 두고서 변형에너지를 목적 함수로 두었다. Graesser[8]등도 각 층의 변형률 합을 최소화하는 적층각도를 결정하였다. Kam과 Snyman[9]은 전체 최소치(global minimum)를 보장하는 기법을 도입하여 강성을 최대화하고자 하였다. 또 Kam과 Chang[10]은 두꺼운 적층판에 대해서 최대의 강성을 지니는 최적 적층각도를 계산하였다.

일반적으로 설계에서 강성과 더불어 강도는 반드시 고려되어야 할 특성[11]임에도 불구하고 대부분의 복합재료 최적설계 연구에서 강도기준은 구속조건으로만 취급되었을 뿐 강도를 고려한 효과적인 연구결과는 미비한 실정이다. Park[12]은 변형률 공간에서 최초파단조건 영역(first ply failure surface : FPF)을 최소화하는 적층순서를 찾고자 하였다. Masard[13]는 강도를 고려한 전산설계 프로그램을 개발하였고, Chao[14] 등은 셸 구조물에 대하여 가장 바깥쪽 층만을 설계변수로 하여 강도를 고려한 최적설계를 수행하였다. Kim[15~16] 등은 구조물의 모든 층을 고려하면서 설계자가 필수적으로 계산하는 일반적인 응력 해석 과정을 이용하여 강도측면에서 효과적인 최적설계를 시도하였다.

한편 최적설계는 최적화 알고리즘의 우수성 뿐만 아니라 최적화를 위한 정보인 설계민감도(design sensitivity)의 해석 또한 중요하다[17~19]. 등방성 재료의 최적설계 분야에서도 민감도 해석에 주안점을 둔 많은 연구가 진행되어 왔으나 아직 복합재료 최적화 연구에서는 미비한 실정이다[20].

본 논문에서는 강도를 고려한 복합재료 적층판의 최적화를 수행하기 위해 파단방정식의 파괴지수를 최적화하였으며 적층각도를 설계변수로 설정하였다. 그리고 민감도 해석에 주안점을 두고자 상태 공간법을 이용하여 최적화 문제를 구성하였으며

최적화에 사용한 알고리즘은 구배투영법(Gradient Projection Method)이다[17].

2. 적층판 해석

본 논문에서 연구의 대상으로 설정한 복합재료 평판의 기하학적인 형상은 Fig.1과 같고 합력과 모멘트는 Fig.2와 같이 정의되었다. 판의 두께가 얇아서 전단변형률을 무시하며 후크의 법칙(hooke's law)을 따르는 고전적층판 이론(Classical Lamination Theory)을 이용하여 해석을 하였다. 그리고 복합재료 적층판은 일정한 두께의 층이 대칭으로 적층되었고 인접한 적층판은 완전하게 접착되어 있다고 가정하였다.

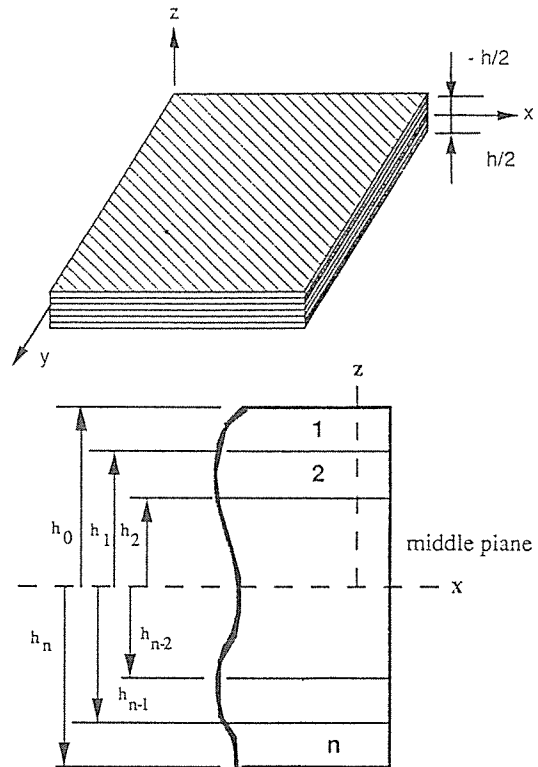


Fig. 1. Geometry of n-layer laminate

임의의 방향으로 적층된 복합재료 적층판의 경우 Fig.3과 같은 적층판 축(Laminate Axis)을 기준으로 다음과 같은 해석 과정을 수행한다. 적층판 해

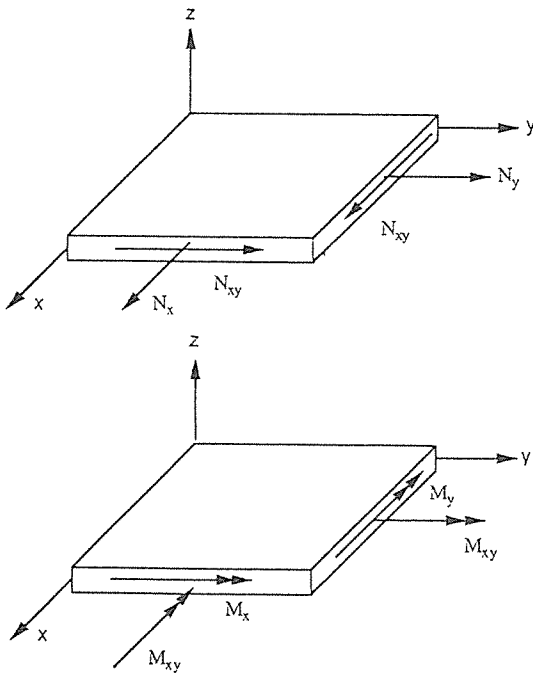


Fig. 2. Positive sense of resultant forces and moments

석과정은 3장에서 민감도 해석을 위해 수식화할 상태방정식(state equation)으로 또한 이용된다. 변환하기전의 좌표축과 변환된 후의 좌표축이 이루는 방향코사인을 이용하여 변환된 강성(transformed stiffness) \bar{Q} 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ &\quad + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ &\quad + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &\quad + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta \\ &\quad - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ &\quad - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &\quad + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

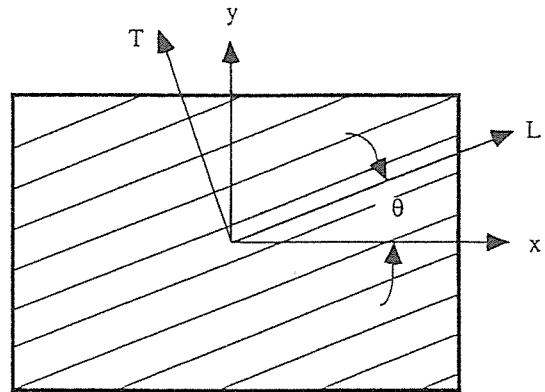


Fig. 3. Principal materials axes oriented at angle θ with reference coordinates axes

식(1)을 구성방정식인 후크의 법칙에 적용함으로써 다음과 같이 임의의 (k)층에 대한 응력을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2)$$

윗 식(2)에서 구한 응력을 두께방향으로 적분한 응력합력(stress resultant), 모멘트합(moment resultant)의 정의를 이용함으로써 적층판에 대한 구성방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_o^x \\ \varepsilon_o^y \\ \gamma_{xy}^o \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

여기서 인장강성(extensional stiffness) A , 커플링 강성(coupling stiffness) B , 굽힘강성(bending stiffness) D 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}A_{ij} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz & B_{ij} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z dz \\ D_{ij} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z^2 dz\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

3. 최적설계 문제 구성

3-1. 설계민감도

최적화 과정은 매 계산단계마다 개선된 최적해를 구하기 위해 구배(gradient)를 계산해야 하고 계산된 구배를 사용하여 다음 단계에서 사용될 탐색 방향을 결정하게 된다. 구배를 구하는 민감도해석(design sensitivity analysis)은 해의 정확성 및 효율성에도 중요한 영향을 미친다. 민감도해석은 해석적인 방법으로 정확한 값을 얻을 수 있으나 대부분의 실제 공학문제에서 간단히 구하기 어려우므로 이용이 간편한 유한차분법을 많이 사용하고 있다. 하지만 유한차분법은 계산량은 극도로 많으며 절단오차(truncation error)와 끝처리오차(round off error)를 발생시킨다. 본 연구에서는 보다 정확하고 효율적인 민감도해석을 위하여 상태공간법(state space method)을 이용하여 최적설계 문제를 수식화한 후 보조변수법(adjoint variabe method)을 이용하였다[17]. 상태공간법에서는 변수를 설계변수 b 와 상태변수 z 로 구분하여 정의하는데, 설계변수는 설계자에 의해 결정되어지며 상태변수는 설계시스템의 지배방정식(governing equation)으로부터 결정되고 시스템의 거동(behavior or response)을 나타내며 설계 변수의 함수이다.

본 논문에서는 식(1), (2), (3) 및 (4)와 같이 복합재료 적층판을 해석하는 일련의 과정에 해당하는 식들을 상태방정식으로 설정하였다. 이때의 변수인 변환된 강성(transformed stiffness matrix) \bar{Q} , 인장강성(extensional stiffness matrix) A , 굽힘강성(bending stiffness matrix) D , 변형률 ε , 응력 σ 가 상태변수가 되며 적층각도 θ 는 설계변수이다. 아래에 상태방정식을 정리하였고 이는 설계민감도 계산시에 이용된다.

$$\begin{aligned} h_1 &= \{\bar{Q}\} - f(\theta) = 0 \\ h_2 &= \{A\} - f(\bar{Q}) = 0 \\ h_3 &= \{D\} - f(\bar{Q}) = 0 \\ h_4 &= \left\{ \begin{matrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{matrix} \right\} - f(A, D) = 0 \\ h_5 &= \{\sigma\} - f(\bar{Q}, \varepsilon^o, \kappa) = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (5)$$

일반적으로 함수 Ψ_i 의 설계민감도는 식(6)의 l^i 와 같이 표현할 수 있고 상태방정식 식(5)와 (7)에서 정의된 보조변수 λ^i 를 이용하여 식(8)과 같이 나타낼 수 있다[17].

$$\delta \Psi_i = l^{iT} \delta b \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$J^T \lambda^i = \frac{\partial \Psi_i^T}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (7)$$

여기서 J 는 자코비안 행렬을 나타내고 $J = \frac{\partial h}{\partial z} [z^o, b^o]$ 로 정의된다. 계산된 설계 민감도 벡터 l^i 는 (z^o, b^o) 에서 다음과 같다.

$$l^i = \frac{\partial \Psi_i^T}{\partial z} - \frac{\partial h^T}{\partial b} \lambda^i \quad \dots\dots\dots (8)$$

3-2. 최적설계 문제 구성

본 논문에서는 강도를 고려한 최적설계를 하고자 파단판정식의 파괴지수를 목적함수로 택하였고 파단판정식의 파괴지수(failure index)를 최소화하는 적층각도를 설계 변수로 정의하였다. 그리고 환경변수(environmental variable) α 는 최대 파괴지수로 설정하였다. 일반적으로 환경변수를 계산하는 문제는 많은 어려움이 따름에도 불구하고 고전적층판 이론을 이용한 복합재료 적층판의 해석 경우 Fig. 4와 같이 적층판의 각 층간에서 응력의 불연속 분포와 함께 파괴지수 또한 불연속으로 발생하므로 최대 파괴지수인 환경변수를 쉽게 결정할 수 있다. 이를 일반적으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize } \text{Maximum } F(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}) \\ & \quad l_{\min} < \alpha < l_{\max} \\ &\text{with the state equation } h(z, b, \alpha) \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

목적함수 F 는 Tsai-Hill이론[21]과 Tsai-Wu이론[22]을 사용하였고 각각 다음과 같다.

$$F = \frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} \quad \dots\dots\dots (10.1)$$

$$\begin{aligned} F &= \left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X'} \right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'} \right) \sigma_2 + \frac{\sigma_1^2}{XX'} + \frac{\sigma_2^2}{YY'} \\ &\quad + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{2\sqrt{XX'YY'}} \quad \dots\dots\dots (10.2) \end{aligned}$$

여기서 X, Y 및 S 는 각각 축방향 인장강도, 횡방향

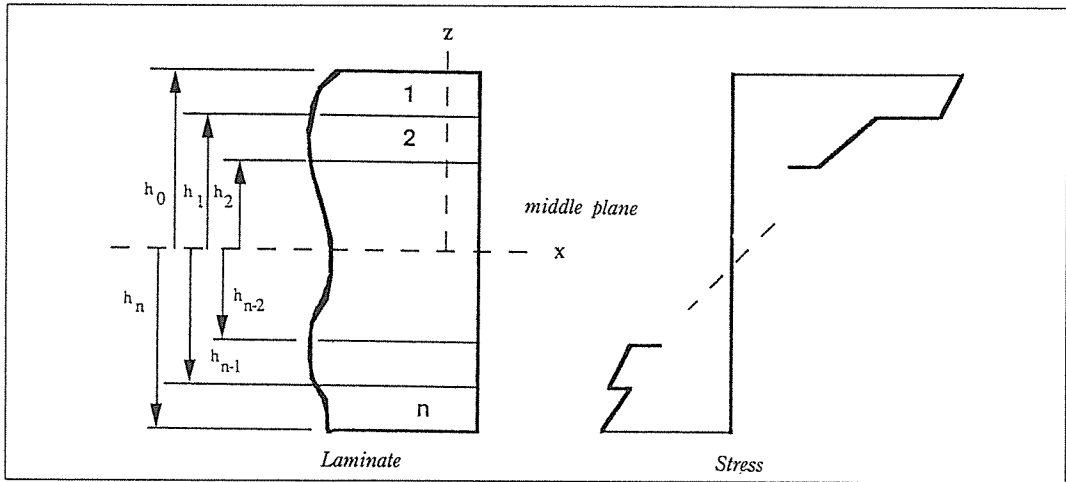


Fig. 4. Environmental parameter

인장강도 및 전단강도이고 X' 및 Y' 은 각각 축방향 압축강도 및 횡방향 압축강도이다.

위 식(9)에서는 환경변수를 설정하고자 구속조건 없이 Min-Max 문제로 최적설계 문제를 수식화 하였다. 이를 인위변수(artificial variable) $b(j+1)$ 를 도입하고 새로운 매개변수 구속 조건을 추가시켜 다음과 같이 수정하였다.

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimize} \quad \Psi_0 = b(j+1) \\
 &\text{subject to} \quad \Psi_1 = \text{Maximum} \\
 &\quad F(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}) - b(j+1) < 0 \\
 &\quad t_{\min} < \alpha < t_{\max} \\
 &\text{with the state equation } h(z, b, \alpha) = 0 \quad \dots (11)
 \end{aligned}$$

여기서 t 는 적층판의 두께이고 인위변수 $b(j+1)$ 은 최대파괴지수를 의미하며, 주어진 하중조건하에서 적층판에서 발생하는 최대 파괴 지수를 최소화하는 적층각도를 결정하는 문제로 수식되었다. 결국 이러한 과정을 통해 모든 층의 파괴지수가 고르게 분포됨으로서, 안정적이고 효율적인 설계효과도 기대 되어진다.

3-3. Tsai-Wu 이론의 문제점[23]

Fig. 5는 angle ply laminate의 적층각도의 변화에 따른 섬유 방향 및 섬유직각 방향의 응력을 나타내고

있으며 Fig. 6은 계산된 응력을 바탕으로한 파괴지수 값을 보여준다. 이때 파괴지수의 값이 음의 값이 발생하는 것을 볼 수 있고 이러한 값의 존재범위는 하중상태에 따라 다르다. Tasi-Wu 이론을 적용했을 때 이처럼 물리적인 의미를 부여할 수 없는 파괴지수 값이(음의 값) 나타나는 경우가 발생한다[16, 23]. 이는 특히 단순 인장하중이나 전단하중이 작용할 때 angle ply laminate에서 쉽게 고찰할 수 있다. 식(10.2)를 살펴보면 대부분 항의 값은 양의 값이다. 그러나 두번째 항에서 일반적인 대다수의 재료가 $Y < Y'$ 이므로 $F_2 = (1/Y - 1/Y')$ 는 항상 양이지만 횡방향의 응력성분이 음의 값이 발생할 경우에 이 전체 항은 음의 값이 되며, 이는 전체 파괴지수 값의 부호가 음의 값이 되게하는데 결정적인 영향을 미치는 항이 된다. 예를들어 angle ply laminate에 대해 $N_x = 100 \text{ MN/mm}$ 인 하중상태에 대한 최적설계를 수행하면 가장 작은 파괴지수 값이 나오는 각도는 20.080° 이다. 이때의 파괴지수는 음의 값이고 수학적으로는 최적각도이다. 하지만 물리적인 의미에서 단순 인장시에는 0° 가 가장 강도가 큰 방향이므로 Tsai-Wu 이론에 대한 새로운 개선이 필요하다. 본 논문에서는 파괴지수 값이 음의 값이 나오는 것을 피하고자 섬유직각 방향의 인장 및 압축강도 값을 동일하게 두고서($Y = Y' = 40 \text{ MPa}$) 계산을 수행하였다.

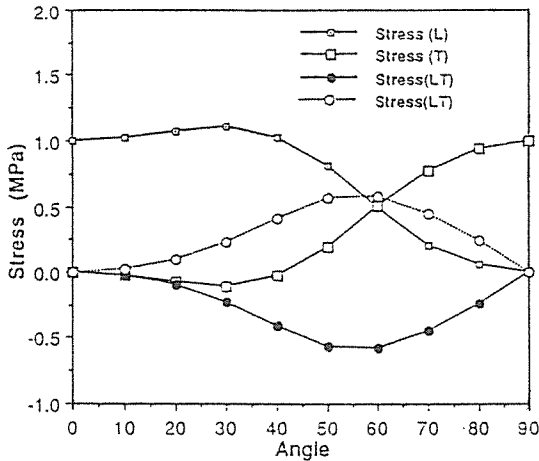


Fig. 5. Stresses of angle ply laminate with increasing angle $[+\theta/-\theta]_S$ laminate, $N_x = 0.5 \text{ MN/mm}$

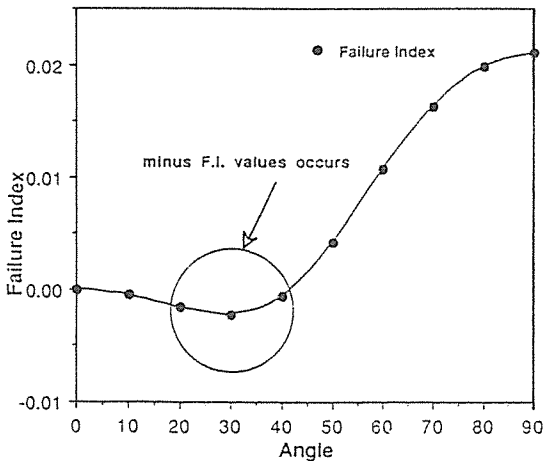


Fig. 6. Failure index of Tsai-Wu failure criterion ($Y \neq Y'$) $[+\theta/-\theta]_S$ laminate, $N_x = 0.5 \text{ MN/mm}$

4. 최적설계 결과 및 검토

4-1. 설계민감도 해석

식(11)에서 목적함수로 설정한 인위변수의 설계민감도는 $(j+1)$ 번째 설계변수에 대해서는 1이고 다른 설계변수에 대해서는 항상 영이 되며, 매개변수 구속조건(parametric constraint)도 $(j+1)$ 번째 설계변수에 대해서는 항상 -1의 값을 갖는다. 그 외의 나머지 설계변수에 대한 설계민감도의 계산은

식(5)에서 정의한 상태방정식과 상태변수, 그리고 식(7)의 보조방정식을 이용하여 식(8)과 같은 정확한 설계민감도를 구할 수 있다. 수치해석에 사용한 재료는 Table 1과 같은 물성치를 지닌 CRFP T300/5208이다. Table 2는 $[0/45/90]_S$ 인 적층판이 전단하중($N_{xy} = 100 \text{ MN/mm}$)을 받고 있을 때 목적함수로 Tsai-Hill 이론을 이용한 경우 두번째 층 중간 지점에서 각 설계변수에 대한 구속조건의 설계민감도를 나타낸다. 계산한 결과를 검증하기 위하여 유한차분법(finite difference method)을 이용하였다. 이때 증감분 $\delta b_i = 0.001$ 을 취하였다. Table 2의 결과에서 보는 바와 같이 정확하게 민감도가 해석되었음을 알 수 있다. 그리고 유한차분법을 이용한 계산시에 증가크기(step size)를 다양하게 함에 따른 설계민감도의 값의 변화를 Table 3에 나타내었다. 세가지 방법의 유한차분법 모두 폭넓은 범위에서 믿을만한 설계민감도를 구하였다. 하지만 Fig. 7에서 보듯이 문제의 비선형 특성, 끝

Table 1. Material property(T300/5208)

CFRP T300/N5208	
Elastic Moduli(GPa)	
E_L	181.0
E_T	10.30
E_{LT}	7.17
Poisson's ratio(ν_{LT})	0.28
layer thickness	0.125mm
Strength(MPa)	
X	1500
X'	1500
Y	40
Y'	246
S	68

Table 2. Accuracy of design sensitivity($[0/45/90]_S$ laminate, $N_{xy} = 100 \text{ MPa}$)

i	b_i	l_i^l	$\bar{l}_i^{(f)}$	$\bar{l}_i^{(b)}$	$\bar{l}_i^{(c)}$
1	0	4.6370	4.6371	4.6369	4.6370
2	45	2.5673e-8	2.2049e-5	-7.1998e-5	2.5781e-8
3	90	-4.6370	-4.6369	-4.6371	-4.6370
4		-1.0000	-1.0000	-1.0000	-1.0000

$\bar{l}_i^{(f)}$: forward finite difference scheme

$\bar{l}_i^{(b)}$: backward finite difference scheme

$\bar{l}_i^{(c)}$: central finite difference scheme

l_i^l : adjoint variable method

Table 3. Variation of design sensitivity with finite difference scheme and step size

$D(i=1)$	l_i^l	$\bar{l}_i^{(f)}$	$\bar{l}_i^{(b)}$	$\bar{l}_i^{(c)}$
10^{-1}	4.63702	4.64798	4.62608	4.63703
10^{-2}		4.63812	4.63593	4.63702
10^{-3}		4.63713	4.63691	4.63702
10^{-4}		4.63703	4.63701	4.63702
10^{-5}		4.63702	4.63702	4.63702
10^{-6}		4.63702	4.63702	4.63702
10^{-7}		4.63700	4.63706	4.63703
10^{-8}		4.63695	4.63695	4.63695
10^{-9}		4.63524	4.64095	4.63809
10^{-10}		4.64094	4.64094	4.64094

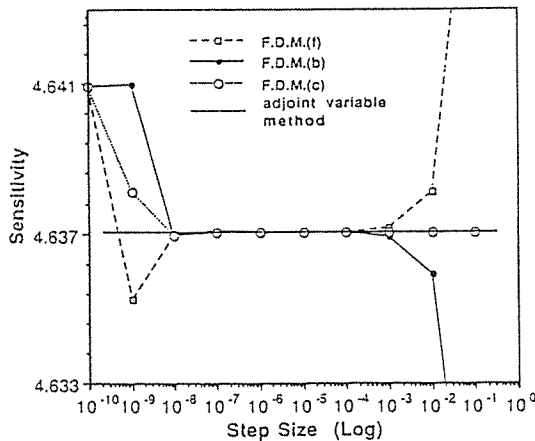


Fig. 7. Variation of design sensitivity using finite difference method with step size change $[0/45/90]_S$ laminate, $N_{xy} = 100\text{MN/mm}$

처리오차 등으로 어떤 증가범위 구간에서는 아주 큰 수치오차가 발생하기도 하였다. 중앙 유한차분법(central finite difference method)을 이용한 경우는 이러한 오차를 훨씬 줄일 수 있었고 비교적 이론치에 유사한 결과를 얻을 수 있었다.

4-2. 최적설계 결과

상태방정식을 통한 정확한 설계민감도의 계산 후 최적화 기법을 통한 최적화 과정을 Fig. 8에 나타내었다. Fig. 9.a에서는 $[\theta_1/\theta_2/\theta_3/\theta_4]_S$ 의 적층판이 $N_x = 100\text{MN/mm}$ 의 인장하중을 받는 경우에 반복 계산에 따른 목적함수의 감소과정을 보여주며 이에 따른 설계변수의 변화과정을 Fig. 9.b에 나타냈다.

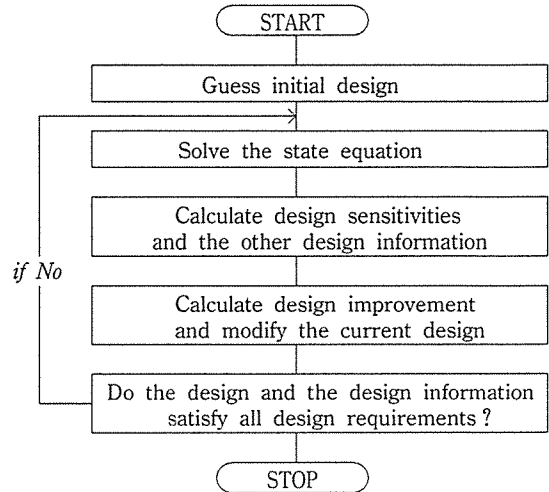


Fig. 8 Flow chart of optimization process

Tsai-Wu 이론과 Tsai-Hill 이론을 목적함수로 각각 이용하여 여러 하중 경우에 대하여 최적 적층각도 구하였고 횡방향 인장 및 압축 강도를 동일하게 두고서 계산을 수행하였다. 다음은 Tsai-Hill 이론을 이용한 계산결과이다.

(가) 단순인장 하중

Fig. 10에서는 섬유방향으로 단순인장 하중을 받

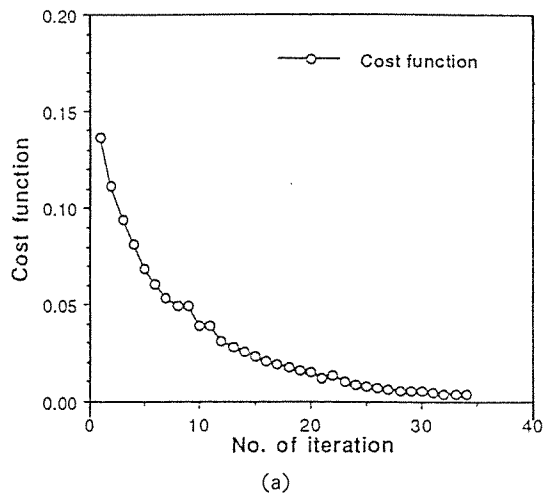


Fig. 9. Variation of cost function and design variables with number of iteration $[\theta_1/\theta_2/\theta_3/\theta_4]_S$, $N_x = 100\text{MN/mm}$. (a) variation of cost function, (b) variation of design variables

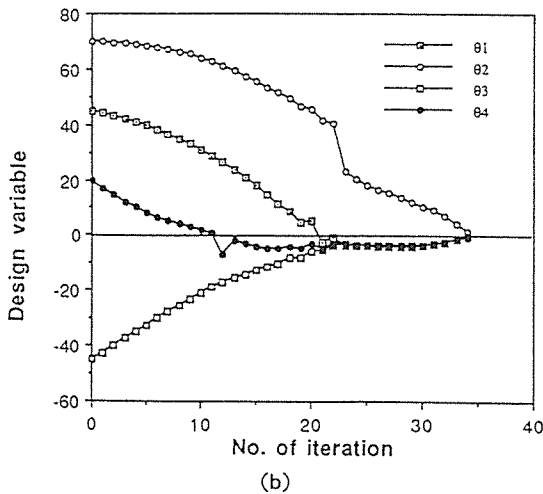
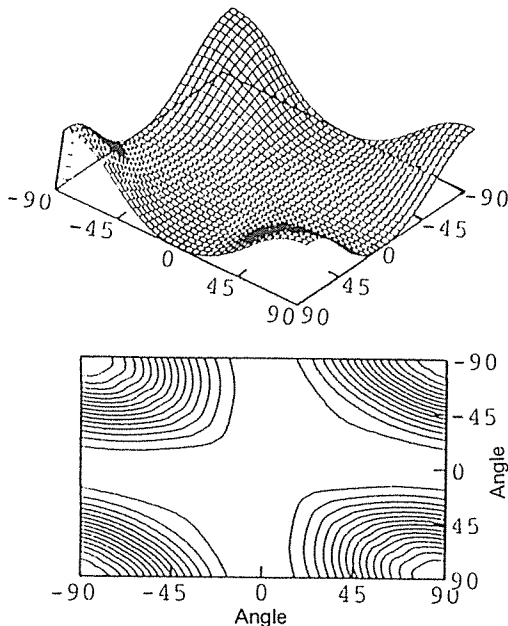


Fig.9. Continued

고 있는 4장의 대칭인 적층판의 경우 모든 적층 가능각도에 대해 최대파괴지수 즉, 목적함수를 나타내었다. 이 경우 최적화를 수행한 결과 최적적층각도는 $[0]_{2S}$ 로 일치하고 이는 Fig.10의 해석 결과 뿐만 아니라 물리적인 관점에서도 타당함을 알 수 있다. 이의 결과는 Table 4에 제시되어 있다.

Fig.10. Surface and contours of cost function N_x onlyTable 4. Optimal angle(Tsi-Wu failure criterion ; $\gamma = \gamma'$)

Case No.	of Layers	Loading condition			Optimal angle [degree] _S
		N_x	N_y	N_{xy}	
1	1	100	-	-	$[0]$
	2				$[0_2]$
2	1	-	100	-	$[90]$
	2				$[90_2]$
3	1	-	-	100	$[0] \text{ or } [90]$
	2				$[\pm 45]$
4	1	50	100	-	$[90]$
	2				$[\pm 53.688]$
5	1	100	50	-	$[0]$
	2				$[\pm 36.211]$
6	1	100	100	-	All possible angle
	2				$[\pm 45]$
7	1	50	200	-	$[90]$
	2				$[\pm 62.654]$
8	1	200	50	-	$[0]$
	2				$[\pm 27.346]$
9	1	50	100	50	$[58.282]$
	2				$[\pm 52.975]$

* force unit [MN/mm]

(나) 전단 하중

2장 대칭인 적층판의 경우 unidirectional laminate가 $[0]_S$ 나 $[90]_S$ 가 최적 적층 각도이나 angle ply laminate 경우인 4장 대칭인 적층판은 $[\pm 45]_{2S}$ 일때가 파괴지수가 가장 작은 경우이다. Table 4의 하중조건 3에서 최적화 결과를 Fig.11의 해석적인 목적함수를 통해 쉽게 검증할 수 있다.

(다) 이축 하중

단순 하중 상태인 (가), (나)의 하중조건에서는 직관적으로 물리적인 관점을 통해 해를 검증할 수 있으나 이축하중 상태에서는 이러한 예측이 곤란한 경우이다. Table 4에서처럼 섬유방향 및 직각방향의 하중 비가 (1:2), (2:1), (1:1), (1:4), 및 (4:1)인 경우에 대해 각각 최적화를 수행하였다. 먼저 하중조건 4의 경우는 X 및 Y 방향 하중비가 압력용기가 내압을 받을때의 하중 비와 동일하다. 이때의 하중조건 최적설계 결과는 내압을 받을시에 섬유만을 고려하여 최적각도를 구하는 netting analysis 결과인 54.7° 와 유사하나 본 연구는 기지의

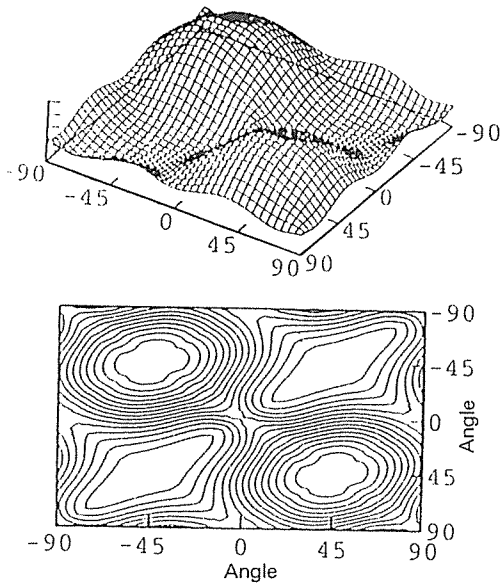


Fig. 11. Surface and contours of cost function N_{xy} only

고려로 netting analysis 결과와 다소 차이가 있다. Fig. 12에서 하중조건 4에 대한 목적함수를 해석적으로 계산하여 나타내었고 수치계산과 비교 검증하였다. 하중조건 5° 하중조건 4와 같은 경우이며 다만 90°의 위상차를 보일 뿐이다. 두 방향으로 동일한 하중이 작용하는 하중조건 6의 경우, unidirectional laminate 경우에는 모든 각도에 대해서 동일한 파괴지수를 얻었고 angle ply laminate 경우인 4장의 적층판일때에는 $[\pm 45]_S$ 일때가 최적 적층 각도인 경우이다. 마지막으로 하중이 (4 : 1) 과 (1 : 4) 비로 작용하는 경우인 하중조건 7 및 8에서는 unidirectional laminate 경우에 힘의 비가 큰 방향이 파괴지수가 작았으나 4장 적층판일때에는 약 $[\pm 63]_S$ 와 $[\pm 27]_S$ 일때 각각 최적각도이다. 각 하중조건에 대해 최적설계 계산 결과를 해석적으로 계산한 목적함수와 비교하여 해의 정확도를 검증할 수 있었다.

(라) 조합 하중

하중조건 9는 하중조건 1, 2 및 3이 동시에 작용하는 경우에 대해 살펴보았다. 목적함수 contour와 최적화 계산 결과인 $[\pm 58.282]_S$ 와 비교한

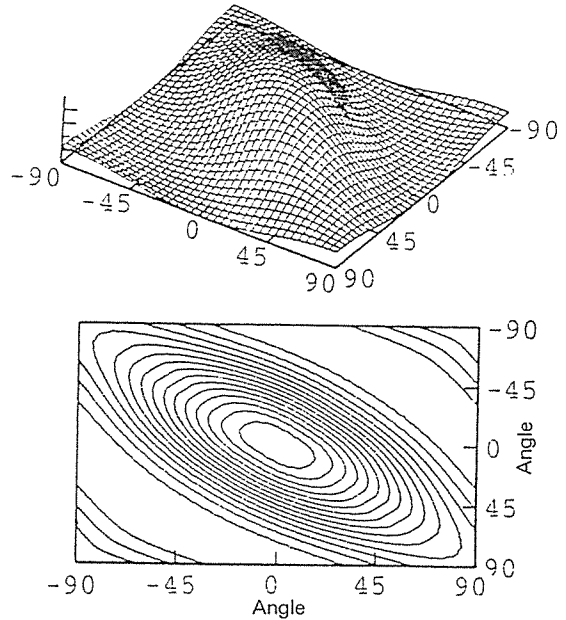


Fig. 12. Surface and contours of cost function $N_x : N_y = 1 : 2$

결과 정확히 계산이 수행되었음을 알 수 있었다.

Tasi-Hill 이론을 이용한 경우에 대한 계산결과는

Table 5. Optimal angle(Tsi-Wu failure criterion)

Case No.	of Layers	Loading condition			Optimal angle [degree] _S
		N_x	N_y	N_{xy}	
1	1	100	—	—	[0]
	2				$[0_2]$
2	1	—	100	—	[90]
	2				$[90_2]$
3	1	—	—	100	[0] or [90]
	2				$[\pm 45]$
4	1	50	100	—	[90]
	2				$[\pm 53.363]$
5	1	100	50	—	[0]
	2				$[\pm 36.459]$
6	1	100	100	—	All possible angle
	2				$[\pm 45]$
7	1	50	200	—	[90]
	2				$[\pm 61.592]$
8	1	200	50	—	[0]
	2				$[\pm 27.910]$
9	1	50	100	50	[58.282]
	2				$[\pm 52.944]$

* force unit [MN/mm]

Table 5에 나타내었으며 Tsai-Wu 이론과 유사한 결과를 얻었다.

5. 결 론

다양한 하중을 받는 복합재료 적층판이 최대의 강도를 갖도록 파단판정식의 파괴지수를 최소화 하였으며, 이때 상태방정식과 보조변수법을 이용한 정확한 설계민감도의 계산을 통하여 적층판의 최적 적층각도를 결정하였다. 본 연구를 통하여 다음과 같은 몇가지 결론을 얻었다.

(1) 목적함수를 파단판정식인 Tsai-Wu 이론과 Tsai-Hill 이론으로 선택함으로써 강도를 고려하여 적층각도를 효율적으로 설계변수로 정의할 수 있다.

(2) 상태공간법을 이용하여 최적 설계 문제를 수식화하였다. 이때에 응력을 구하는 일련의 해석 과정들을 상태방정식으로 정의하고 보조변수법을 사용하여 정확한 설계민감도를 구하였으며 유한차분법 보다 훨씬 효율적이고 정확함을 알 수 있다.

(3) 목적함수로 설정한 Tsai-Wu 이론의 파괴지수 값이 음이 나오는 경우가 발생하였고 이를 해결하고자 적층판의 인장강도와 압축강도를 동일하게 가정하였다.

(4) 층간에서 발생하는 파괴지수 중에서 최대 파괴지수를 환경변수로 정의하고 Min-Max 문제로 수식화 할 수 있었다.

(5) 다양한 하중을 받는 복합재료 적층판에 대해 최적화를 수행한 결과 각 층들이 훨씬 작은 파괴지수를 얻을 수 있는 적층 각도를 구하였다. 동시에 각 층들의 파괴지수가 거의 비슷해지므로서 안정적이며 효율적인 설계가 이루어졌다.

참 고 문 헌

1. Kumar, N., and Tauchert, T.R., "Multiobjective Design of Symmetrically Laminated Plates," *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, Vol.114, 1992, pp.620-625.
2. Hu, H., and Wang, S.S., "Optimization for Buckling Resistance of Fiber Composite La-

minate Shells with and without Cutouts," *Composite Structure*, Vol.22, 1992, pp.3-13.

3. Naik, N.K., and Ganesh, V.K., "Optimum Design Studies on FRP Beams with Holes," *Composite Structure*, Vol.24, 1993, pp.59-60.

4. Schmit, L.A., Jr., and Farshi, B., "Optimum Laminated Design for Strength and Stiffness," *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol.7, 1977, pp.519-536.

5. Schmit, L.A., Jr. and Farshi, B., "Optimum Design of Laminated Fiber Composite Plates," *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol.11, 1977, pp.623-640.

6. Tauchert, T.R. and Adibhatla, S., "Optimum Elastic Design of A Reinforced Beam," *Journal of Composite Materials*, Vol.16, 1982, pp.433-445.

7. Tauchert, T.R. and Adibhatla, S., "Design of Laminated Plates for Maximum Stiffness," *Journal of Composite Materials*, Vol.18, 1984, pp.58-69.

8. Graesser, D.L., Zabinsky, Z.B., Tuttle, M.E., and Kim, G.I., "Designing Laminated Composites Using Random Search Techniques," *Composite Structure*, Vol.18, 1991, pp.311-325.

9. Kam, T.Y., and Snyman, J.A., "Optimal Design of Laminated Composite Plates Using A Global Optimization Technique," *Composite Structure*, Vol.19, 1991, pp.351-370.

10. Kam, T.Y., and Chang, R.R., "Optimum Layup of Thick Laminated Composite Plates for Maximum Stiffness," *Engineering Optimization*, Vol.19, 1992, pp.237-249.

11. Ganesh, V.K., and Naik, N.K., "Some Strength Studies on FRP Laminates," *Composite Structure*, Vol.24, 1993, pp.51-58.

12. Park, W.J., "An Optimal Design of Simple Symmetric Laminates Under the First Ply Failure Criterion," *Journal of Composite Materials*, Vol.16, 1982, pp.341-355.

13. Massard, T.N., "Computer Sizing of Composite Laminate for Strength," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol.3, 1984, pp. 301-327.
14. Chao, C.C., Sun, C.T., and Koh, S.L., "Strength Optimization for Cylindrical Shells of Laminated Composites," *Journal of Composite Materials*, Vol.9, 1975, pp.53-66.
15. 김창완, 황운봉, 박현철, 한경섭, "강도를 고려한 원통형 복합재료 구조물의 최적설계," 한국복합재료학회 추계학술대회, 1992.
16. Kim, C.W., Hwang, W., Park, H.C., and Han, K.S., "An Optimal Stacking Sequence Design of Laminated Composite Cylinders," 9th International Conference on Composite Materials (ICCM/9), Madrid, Spain, 1993.
17. Haug, E.J., and Arora, J.S., *Applied Optimal Design*, John Wiley, New York, 1979.
18. Haug, E.J., Choi, K.K., and Komkov, V., *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, 1984.
19. 전만수, 황상무, "유한요소법을 이용한 정상상태의 소성가공 공정 최적설계(I) : 이론적 고찰", 기계학회 논문집 제16권 3호, 1992, pp.443-452.
20. Cheng K., "Sensitivity Analysis and A Mixed Approach to the Optimization of Symmetric Layered Composite Plates," *Engineering Optimization*, Vol.9, 1986, pp.233-248.
21. Rowlands, R.E., "Strength(Failure) Theories and their Experimental Correlation", *Failure Mechanics of Composites*, G.C. Sih and A.M. Sudra, eds., Elsevier Sci. Publ., B. V., 1985.
22. Tsai, S.W., and Wu, E.M., "A General Theory of Strength for Anisotropic Materials," *Journal of Composite Materials*, Vol.5, 1971, pp. 58-80.
23. Kim, C.W., Song, S.R., Hwang, W., Park, H.C., and Han, K.S., "On the Failure Indices of Quadratic Failure Criteria for Optimal Stacking Sequence Design of Laminated Plate," *Applied Composite Materials*, Vol.1, 1994, pp. 81-85.