

論文

다층복합평판 및 샌드위치평판을 위한 평판해석 이론

신 용 석*

A Composite Plate Theory for Multilayered Laminates
and Sandwich Plates

Shin, Yong-Seok*

ABSTRACT

A composite plate theory including the effect of transverse shear deformation is developed to calculate the gross response and the detailed stress distribution on the assumption that the transverse shear stresses on each layer has a linear distribution. The theory satisfies both the condition of continuity on the interface and the vanishing of the transverse shear stress on the surface. Neither the shear correction factors nor the integration of the stress equilibrium equations is need for those conditions. The accuracy of the theory is examined for the case of simply supported cross-ply laminates and compared with the three dimensional elasticity solutions. The results of the present work for multilayered laminates and for sandwich plates exhibit acceptable accuracy.

초 록

복합평판의 거동해석에 있어 횡전단변형의 영향을 해석과정에 포함할 수 있는 평판해석 이론이 복합평판의 층내 횡전단응력 분포를 선형으로 가정하여 개발되었다. 이 이론은 층간 연속조건과 평판표면의 횡전단응력 경계조건을 만족하며 기존의 복합평판 해석이론에서 요구되는 전단보정 상수나 응력균형식의 적분과정은 사용되지 않았다. 단순지지된 직교적층복합평판에 대한 거동해석 결과는 3차원 탄성이론에 의한 결과와 비교하여 확인하였으며, 특히 여러개의 얇은 층이 적층된 복합평판이나 샌드위치 평판에서 정확한 해석이 가능함을 보여주었다.

1. 서 론

적층복합평판(laminated composite plates)은 고강도와 고강성을 유지하며 구조물을 경량화 시킬 수 있는 잇점이 있는 반면 구조적인 특성때문에 평판의 거동, 즉 층간응력, 평면 변위 및 휨등은 간단히 해석되지 않는다. 이

를위해 일찌기 Libove와 Batdorf[1]의 직교이방성 적층평판을 위한 미소변위이론(small-deflection theory)에서 적층복합평판의 유효재료상수(effective material constant)를 사용하여 해석하는 방법이 제시되었으나 전단변형의 영향을 충분히 고려할 수가 없었다. 특히 두꺼운 적층복합평판의 거동은 각 층의 횡전단변형

* 육군사관학교 기계공학과

(transverse shear deformation)의 영향을 크게 받으므로 고등복합재료의 발달과 함께 많은 연구자들에 의해 각 층의 재료특성(lamina properties)을 고려할 수 있는 해석이론들이 개발되어 왔다.

Reissner-Mindlin 평판해석이론의 일반적인 형태인 1차전단변형이론(first-order shear deformation theory)[2,3]에서는 각 층의 횡전단응력들을 상수값으로 해석하게 되므로 평판 상·하부 표면에서의 경계조건(stress-free boundary conditions)과 층간 횡전단응력의 연속조건을 만족할 수 없기 때문에 평판의 전단강도 특성을 고려하기 위하여 전단보정상수(shear correction coefficients)를 사용하여야 했다. 이를 보완하여 Whitney[4]는 1차전단변형이론을 토대로 전단응력 분포를 적분하여 평면변위(inplane displacements)를 구하는 고차해석방법(higher-order approximation)을 발표하였으나 변환된 응력들이 평판의 평형방정식을 만족하지 못했다. 다른 해석방법으로, 평면변위 및 횡변위를 평판두께의 고차함수로 가정한 고차전단변형이론(higher-order shear deformation theory)이 Lo, Christensen과 Wu[5]에 의해 개발되고, Reddy[6]는 이 이론에 평판 표면의 횡전단응력 경계조건을 적용하여 층내 횡전단응력 분포를 포물선 형태로 구할 수 있는 단순 고차 해석이론을 발표하였으나 층간 횡전단응력의 연속조건(continuity condition of transverse shear stress)은 나타낼 수 없었다. Reddy의 이론은 적층수에 관계없이 적은 수의 지배방정식으로 1차전단변형이론보다 정확한 거동해석이 가능하였으나 횡전단응력의 층간 단일응력값을 구하기 위해서는 3차원 응력균형식을 적분하는 복잡한 과정이 요구되었다. 반면 Toledano와 Murakami[7]에 의하여 위의 두 조건, 즉 평판표면의 경계조건과 층간 연속조건을 만족하는 해석이론이 발표되었으나 개별 층의 평면변위를 선형분포로 가정하기 때문에 각 층에서의 전단변형률(shear strains)을 상수값으로 해석할 수 밖에 없고, 또한 층간 전단응력의 연속조건을 만족하기 위한 시험전단응력장(trial transverse stress field)을 결정해야 하는 해석상 매우 복잡한 문제점을 지니고 있다.

따라서 본 연구에서는 적층복합평판을 3차원 탄성이론(3-dimensional elasticity)으로 해석한 Pagano[8]의 결과에서 보여준 횡전단변형의 영향을 충분히 고려하기 위하여 평판표면의 경계조건과 층간 변위 및 전단응력의 연속조건을 만족하고 지배방정식의 수를 줄일 수 있는 복합평판해석 이론의 개발에 그 목적을 두었다. 이를 위해 Reddy의 단순 고차해석이론에 적용되었던 변위기준이론(displacement based theory)을 기초로 층내 횡전단응력의 분포를 선형으로 가정하는 복합평판 해석이론을 개발하고, 적층복합평판은 물론 샌드위치평판에 대한 거동해석 결과의 검증 및 정확도 확인을 위해 3차원 탄성이론에 의한 결과와 비교 고찰하였다.

2. 평형방정식의 구성

본 연구에서는 적층복합평판의 횡전단변형을 분포를 1차식으로 나타내기 위하여 각 층의 평면변위가 임의의 평면함수, η_i , ξ_i 와 두께방향 변수, z 에 대한 2차식으로 가정되었으며, 가정된 평면함수는 변위와 층간 횡전단응력의 연속조건(interface continuity condition)에 의해 층간 횡전단응력(transverse shear stress)의 함수로 변환되었다. 즉, 임의의 k 층에 대한 변위는 Fig. 1의 좌표계에서 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_i^{(k)} &= u_{ci}^{(k)}(x, y) + \{z - d^{(k)}\} \eta_i^{(k)}(x, y) \\ &\quad + \{z - d^{(k)}\}^2 \xi_i^{(k)}(x, y) \dots\dots\dots (1) \\ u_3^{(k)} &= w(x, y) \quad (i=1, 2) \end{aligned}$$

여기서 $d^{(k)}$ 는 평판의 중심(midplane of plate)으로부터 k 층 중심까지의 거리를, $u_{ci}^{(k)}$ 는 k 층 중심의

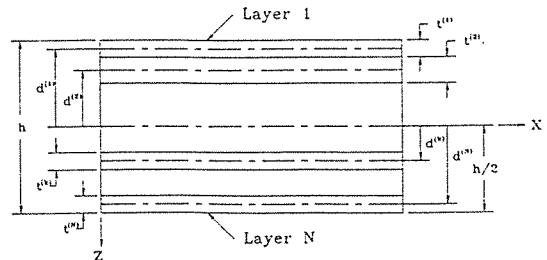


Fig. 1. Geometry of an N -layered laminate

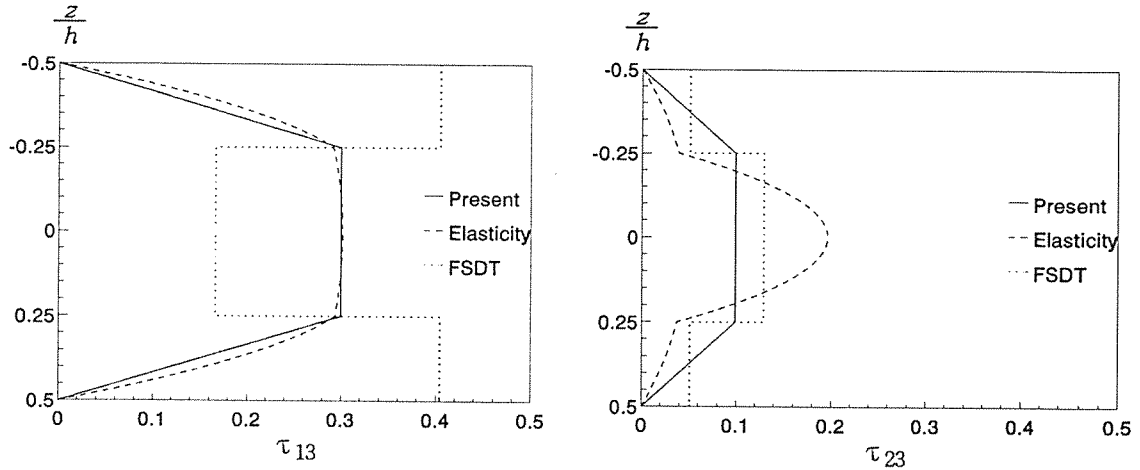


Fig. 2. The distribution of transverse shear stresses through the thickness of 3-layer cross-ply square laminate under sinusoidal load ($a/h=10$)

평면변위를 나타내며, 횡변위(transverse deflection)는 평판내부에서 일정하게 가정되었다. 이때 평면변위의 층간 연속조건과 평판의 위와 아랫면에서의 평면변위, u_i^T 및 u_i^L 은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} u_i^T &= u_i^{(1)}\left(x, y, d^{(1)} - \frac{t^{(1)}}{2}\right) \\ u_i^{(k-1)}\left(x, y, d^{(k-1)} + \frac{t^{(k-1)}}{2}\right) &= u_i^{(k)}\left(x, y, d^{(k)} - \frac{t^{(k)}}{2}\right) \\ u_i^L &= u_i^{(N)}\left(x, y, d^{(N)} - \frac{t^{(N)}}{2}\right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

따라서 식(2)의 조건으로부터 임의의 k 층 중심에서의 평면변위는

$$\begin{aligned} u_{ci}^{(k)} &= \frac{(u_i^T + u_i^L)}{2} - \frac{t^{(k)^2}}{4} \xi_i^{(k)} + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{t^{(n)}}{2} \eta_i^{(n)} \\ &\quad - \sum_{n=k+1}^N \frac{t^{(n)}}{2} \eta_i^{(n)} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (3)$$

으로 구해진다. 위식에서 $(u_i^T + u_i^L)/2$ 를 u_{0i} 로 정의하고 식(1)에 대입하면 k 층에 대한 평면변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{ci}^{(k)} &= u_{0i} + (z - d^{(k)})\eta_i^{(k)} + \left\{ (z - d^{(k)})^2 - \frac{t^{(k)^2}}{4} \right\} \xi_i^{(k)} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{k-1} \frac{t^{(n)}}{2} \eta_i^{(n)} - \sum_{n=k+1}^N \frac{t^{(n)}}{2} \eta_i^{(n)} \end{aligned} \quad \dots\dots (4)$$

여기서 식(4)의 평면변위로부터 각 층의 횡전단변형률은

$$\gamma_{i3}^{(k)} = \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x_i} = \eta_i^{(k)} + 2(z - d^{(k)})\xi_i^{(k)} + \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad \dots\dots\dots (5)$$

이 되며, 횡전단응력의 연속조건에 의해 하나의 값을 갖는 층간 횡전단응력을 k 층과 $k+1$ 층 사이에서 $\phi_i^{(k)}(x, y)$ 로 정의할 때, 임의의 k 층에서 위와 아랫면의 층간 횡전단변형률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \gamma_{i3}^{(k)}\left(x, y, d^{(k)} - \frac{t^{(k)}}{2}\right) &= S_{im}^{(k)} \phi_m^{(k-1)} = \eta_i^{(k)} - t^{(k)} \xi_i^{(k)} + \frac{\partial w}{\partial x_i} \\ \gamma_{i3}^{(k)}\left(x, y, d^{(k)} + \frac{t^{(k)}}{2}\right) &= S_{im}^{(k)} \phi_m^{(k)} = \eta_i^{(k)} + t^{(k)} \xi_i^{(k)} + \frac{\partial w}{\partial x_i} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

이때, $\phi_i^{(0)}$ 와 $\phi_i^{(N)}$ 는 평판의 위와 아랫면에서 횡전단응력이 존재하지 않는 경계조건으로부터 0이 되며, $S_{im}^{(k)}$ 는 횡전단응력과 변형률의 관계로부터 아래와 같이 표현된다.

$$S_{im}^{(k)} = \frac{1}{(Q_{44}Q_{55} - Q_{45}^2)^{(k)}} \begin{bmatrix} Q_{44} & -Q_{45} \\ -Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \quad \dots\dots (7)$$

따라서 식(1)에서 가정된 임의의 평면함수, η_i 와 ξ_i 는 식(6)으로부터 다음과 같이 구해지게 된다.

$$\begin{aligned} \eta_i^{(k)} &= \frac{1}{2} S_{im}^{(k)} (\phi_m^{(k)} + \phi_m^{(k-1)}) - \frac{\partial w}{\partial x_i} \\ \xi_i^{(k)} &= \frac{1}{2t^{(k)}} S_{im}^{(k)} (\phi_m^{(k)} - \phi_m^{(k-1)}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8)$$

그러므로 적층복합판의 평면변위, 식(4)는 층간 횡전단응력, $\phi_i^{(k)}$ 의 함수로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} u_i^{(k)} = & u_{0i} - z \frac{\partial w}{\partial x_i} \\ & + \left\{ (a_1 + a_2 z + a_3 z^2)^{(k)} S_{im}^{(k)} + \frac{t^{(k-1)}}{4} S_{im}^{(k-1)} \right\} \phi_m^{(k-1)} \\ & + \left\{ (b_1 + b_2 z + b_3 z^2)^{(k)} S_{im}^{(k)} - \frac{t^{(k+1)}}{4} S_{im}^{(k+1)} \right\} \phi_m^{(k)} \\ & + \sum_{n=1}^{k-2} \left\{ \frac{t^{(n)}}{4} S_{im}^{(n)} + \frac{t^{(n+1)}}{4} S_{im}^{(n+1)} \right\} \phi_m^{(n)} \\ & - \sum_{n=k+1}^{N-1} \left\{ \frac{t^{(n)}}{4} S_{im}^{(n)} + \frac{t^{(n+1)}}{4} S_{im}^{(n+1)} \right\} \phi_m^{(n)} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

윗 식에서 N 는 전체 적층수이며 두께방향 변수, z 에 대한 상수값들은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 z + a_3 z^2)^{(k)} = & \frac{t^{(k)}}{8} + \frac{(z - d^{(k)})}{2} - \frac{(z - d^{(k)})^2}{2t^{(k)}} \\ (b_1 + b_2 z + b_3 z^2)^{(k)} = & -\frac{t^{(k)}}{8} + \frac{(z - d^{(k)})}{2} + \frac{(z - d^{(k)})^2}{2t^{(k)}} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (10)$$

적층복합평판에서 임의의 k 층에 대한 변형률은 변위-변형률 관계

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}) \quad \dots\dots\dots (11)$$

로부터 구해지며, 두께가 일정한 k 층에서의 응력과 변형률 관계는 평면응력 상태에서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} \\ \begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}^{(k)} &= \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}^{(k)} \end{aligned}$$

이때, $Q_{ij}^{(k)}$ 는 평판좌표계로 변환된 적층판의 강성 행렬(transformed stiffness matrix)이다.

적층복합평판의 거동해석을 위한 평형방정식(equilibrium equations)은 식(9)로 유도된 변위성분과 식(12)의 응력-변형률 관계로부터 아래와 같이 가상일의 원리(principle of virtual displacements)를 이용하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} 0 = & \int_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \delta \gamma_{12} + \sigma_{23} \delta \gamma_{23} \\ & + \sigma_{13} \delta \gamma_{13}) dV - \int_A q \delta w dA \\ = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_A \left[N_{ij}^{(k)} (\delta u_{0i,j} + \delta u_{0j,i}) - 2M_{ij}^{(k)} \delta w_{,ij} \right. \\ & + \{ (a_1^{(k)} N_{ij}^{(k)} + a_2^{(k)} M_{ij}^{(k)} + a_3^{(k)} R_{ij}^{(k)}) S_{im}^{(k)} \\ & + \frac{t^{(k-1)}}{4} N_{ij}^{(k)} S_{im}^{(k-1)} \} \delta \phi_{m,j}^{(k-1)} + \{ (a_1^{(k)} N_{ij}^{(k)} + a_2^{(k)} M_{ij}^{(k)} \\ & + a_3^{(k)} R_{ij}^{(k)}) S_{jm}^{(k)} + \frac{t^{(k-1)}}{4} N_{ij}^{(k)} S_{jm}^{(k-1)} \} \delta \phi_{m,i}^{(k-1)} \\ & + (a_2^{(k)} N_{i3}^{(k)} + 2a_3^{(k)} M_{i3}^{(k)}) S_{im}^{(k)} \delta \phi_m^{(k-1)} \\ & + \{ (b_1^{(k)} N_{ij}^{(k)} + b_2^{(k)} M_{ij}^{(k)} + b_3^{(k)} R_{ij}^{(k)}) S_{im}^{(k)} \\ & - \frac{t^{(k+1)}}{4} N_{ij}^{(k)} S_{im}^{(k+1)} \} \delta \phi_{m,j}^{(k)} + \{ (b_1^{(k)} N_{ij}^{(k)} + b_2^{(k)} M_{ij}^{(k)} \\ & + b_3^{(k)} R_{ij}^{(k)}) S_{jm}^{(k)} - \frac{t^{(k+1)}}{4} N_{ij}^{(k)} S_{jm}^{(k+1)} \} \delta \phi_{m,i}^{(k)} \\ & + (b_2^{(k)} N_{i3}^{(k)} + 2b_3^{(k)} M_{i3}^{(k)}) S_{im}^{(k)} \delta \phi_m^{(k)} \\ & - N_{ij}^{(k)} \sum_{n=1}^{k-2} \left\{ \frac{t^{(n)}}{4} (S_{im}^{(n)} \delta \phi_{m,j}^{(n)} + S_{jm}^{(n)} \delta \phi_{m,i}^{(n)}) \right. \\ & + \frac{t^{(n+1)}}{4} (S_{im}^{(n+1)} \delta \phi_{m,j}^{(n)} + S_{jm}^{(n+1)} \delta \phi_{m,i}^{(n)}) \} \\ & - N_{ij}^{(k)} \sum_{n=k+1}^{N-1} \left\{ \frac{t^{(n)}}{4} (S_{im}^{(n)} \delta \phi_{m,j}^{(n)} + S_{jm}^{(n)} \delta \phi_{m,i}^{(n)}) \right. \\ & + \left. \left. \frac{t^{(n+1)}}{4} (S_{im}^{(n+1)} \delta \phi_{m,j}^{(n)} + S_{jm}^{(n+1)} \delta \phi_{m,i}^{(n)}) \right\} \right] dA \\ & - \int_A q \delta w dA \end{aligned}$$

여기서 응력의 합력(stress resultants)들은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} (N_{ij}, M_{ij}, R_{ij})^{(k)} &= \int_{d^{(k)} - \frac{t^{(k)}}{2}}^{d^{(k)} + \frac{t^{(k)}}{2}} \sigma_{ij}(1, z, z^2) dz \\ (N_{i3}, M_{i3})^{(k)} &= \int_{d^{(k)} - \frac{t^{(k)}}{2}}^{d^{(k)} + \frac{t^{(k)}}{2}} \sigma_{i3}(1, z) dz \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (14)$$

식(13)을 부분 적분하여 δw , δu_{0j} 및 $\delta \phi_i^{(k)}$ 의 항으로 묶으면, 다음의 방정식들을 얻게 된다.

$$\delta w : \sum_{k=1}^N M_{ij,j}^{(k)} = -q$$

$$\begin{aligned}
\delta u_{0j} : \sum_{k=1}^N N_{ij,j}^{(k)} &= 0 \\
\delta \phi_m^{(k)} : \left(b_1^{(k)} S_{im}^{(k)} - \frac{t^{(k+1)}}{4} S_{im}^{(k+1)} \right) N_{ij,j}^{(k)} &+ \\
(k=1, 2, \dots, N-1) &+ \left(a_1^{(k+1)} S_{im}^{(k+1)} + \frac{t^{(k)}}{4} S_{im}^{(k)} \right) N_{ij,j}^{(k+1)} \\
&+ S_{im}^{(k)} \left\{ b_2^{(k)} (M_{ij,j}^{(k)} - N_{i3}^{(k)}) + b_3^{(k)} (R_{ij,j}^{(k)} - 2M_{i3}^{(k)}) \right\} \\
&+ S_{im}^{(k+1)} \left\{ a_2^{(k+1)} (M_{ij,j}^{(k+1)} - N_{i3}^{(k+1)}) \right. \\
&+ \left. a_3^{(k+1)} (R_{ij,j}^{(k+1)} - 2M_{i3}^{(k+1)}) \right\} \\
&+ \left(\frac{t^{(k)}}{4} S_{im}^{(k)} + \frac{t^{(k+1)}}{4} S_{im}^{(k+1)} \right) \left(\sum_{n=1}^{k-1} N_{ij,j}^{(n)} \right. \\
&- \left. \sum_{n=k+2}^N N_{ij,j}^{(n)} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (15)
\end{aligned}$$

따라서 N 층 복합평판 평형방정식은 총 $(2N+1)$ 개의 방정식으로 구성된다.

3. 수치해석

적층복합평판에 대한 평형방정식, 식(15)의 해는 일반적으로 쉽게 구해지지 않는다. 그러나 단순히 지된 직교적층평판(cross-ply laminated plates)의 경우 고전적인 평판해석 과정을 적용하여 엄밀해(exact solutions)를 구할 수 있다. 직교적층평판의 각 층에서 식(7)과 식(12)의 강성계수는

$$\begin{aligned}
Q_{16} = Q_{26} = Q_{45} &= 0 \\
S_1 = S_{11} = \frac{1}{Q_{55}}, \quad S_2 = S_{22} = \frac{1}{Q_{44}} &\quad \dots\dots (16)
\end{aligned}$$

이 되며, 단순지지의 경계조건(boundary conditions)은

$$\begin{aligned}
y=0 \text{과 } b \text{에서} \\
w=u_1=\phi_1=N_{22}=M_{22}=R_{22}=0 \\
x=0 \text{과 } a \text{에서} \\
w=u_2=\phi_2=N_{11}=M_{11}=R_{11}=0 \quad \dots\dots (17)
\end{aligned}$$

으로 가정할 수 있다. 따라서 식(14)의 합응력성분들은 식(11)과 식(12)로부터 다음과 같은 함수식의 관계로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
N_{ij}^{(k)} &= f_{ij}^{(k)}(h_0, h_1, A_0, B_1)^{(k)}, \quad N_{i3}^{(k)} = f_{i3}^{(k)}(C_0, D_0)^{(k)} \\
M_{ij}^{(k)} &= f_{ij}^{(k)}(h_1, h_2, A_1, B_1)^{(k)}, \quad M_{i3}^{(k)} = f_{i3}^{(k)}(C_1, D_1)^{(k)} \\
R_{ij}^{(k)} &= f_{ij}^{(k)}(h_2, h_3, A_2, B_2)^{(k)} \quad \dots\dots\dots (18)
\end{aligned}$$

위에서 함수식의 상수값들은 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4)^{(k)} &= \int_{d^{(k)} - \frac{t^{(k)}}{2}}^{d^{(k)} + \frac{t^{(k)}}{2}} (1, z, z^2, z^3, z^4) dz \\
A_0^{(k)} &= (a_1 h_0 + a_2 h_1 + a_3 h_2)^{(k)} \\
B_0^{(k)} &= (b_1 h_0 + b_2 h_1 + b_3 h_2)^{(k)} \\
A_1^{(k)} &= (a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3)^{(k)} \\
B_1^{(k)} &= (b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3)^{(k)} \quad \dots\dots\dots (19) \\
A_2^{(k)} &= (a_1 h_2 + a_2 h_3 + a_3 h_4)^{(k)} \\
B_2^{(k)} &= (b_1 h_2 + b_2 h_3 + b_3 h_4)^{(k)} \\
C_0^{(k)} &= (a_2 h_0 + 2a_3 h_1)^{(k)} \quad D_0^{(k)} = (b_2 h_0 + 2b_3 h_1)^{(k)} \\
C_1^{(k)} &= (a_2 h_1 + 2a_3 h_2)^{(k)} \quad D_1^{(k)} = (b_2 h_1 + 2b_3 h_2)^{(k)}
\end{aligned}$$

또한 식(18)의 함수식, $f_{ij}^{(k)}$ 는 합응력성분들을 변위와 층간응력의 함수로 나타낸 것으로 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
f_{ij}^{(k)}(c_1, c_2, c_3, c_4) \\
= Q_{11}^{(k)} \left[\begin{aligned} &c_1 u_{01,1} - c_2 w_{,11} \\ &+ \left(c_3 S_1^{(k)} + c_1 \frac{t^{(k-1)}}{4} S_1^{(k-1)} \right) \phi_{1,1}^{(k-1)} \\ &+ \left(c_4 S_1^{(k)} - c_1 \frac{t^{(k+1)}}{4} S_1^{(k+1)} \right) \phi_{1,1}^{(k)} \\ &+ \frac{c_1}{4} \left\{ \sum_{n=1}^{k-2} (t^{(n)} S_1^{(n)} + t^{(n+1)} S_1^{(n+1)}) \phi_{1,1}^{(n)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=k+1}^{N-1} (t^{(n)} S_1^{(n)} + t^{(n+1)} S_1^{(n+1)}) \phi_{1,1}^{(n)} \right\} \end{aligned} \right] \\
+ Q_{12}^{(k)} \left[\begin{aligned} &c_1 u_{02,2} - c_2 w_{,22} \\ &+ \left(c_3 S_2^{(k)} + c_1 \frac{t^{(k-1)}}{4} S_2^{(k-1)} \right) \phi_{2,2}^{(k-1)} \\ &+ \left(c_4 S_2^{(k)} - c_1 \frac{t^{(k+1)}}{4} S_2^{(k+1)} \right) \phi_{2,2}^{(k)} \\ &+ \frac{c_1}{4} \left\{ \sum_{n=1}^{k-2} (t^{(n)} S_2^{(n)} + t^{(n+1)} S_2^{(n+1)}) \phi_{2,2}^{(n)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=k+1}^{N-1} (t^{(n)} S_2^{(n)} + t^{(n+1)} S_2^{(n+1)}) \phi_{2,2}^{(n)} \right\} \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & f_{22}^{(k)}(c_1, c_2, c_3, c_4) \\
 &= Q_{12}^{(k)} \left[\begin{aligned} & c_1 u_{01,1} - c_2 w_{,11} \\ & + (c_3 S_1^{(k)} + c_1 \frac{t^{(k-1)}}{4} S_1^{(k-1)}) \phi_{1,1}^{(k-1)} \\ & + (c_4 S_1^{(k)} - c_1 \frac{t^{(k+1)}}{4} S_1^{(k+1)}) \phi_{1,1}^{(k)} \\ & + \frac{c_1}{4} \left\{ \sum_{n=1}^{k-2} (t^{(n)} S_1^{(n)} + t^{(n+1)} S_1^{(n+1)}) \phi_{1,1}^{(n)} \right. \\ & \left. - \sum_{n=k+1}^{N-1} (t^{(n)} S_1^{(n)} + t^{(n+1)} S_1^{(n+1)}) \phi_{1,1}^{(n)} \right\} \end{aligned} \right] \\
 &+ Q_{22}^{(k)} \left[\begin{aligned} & c_1 u_{02,2} - c_2 w_{,22} \\ & + (c_3 S_2^{(k)} + c_1 \frac{t^{(k-1)}}{4} S_2^{(k-1)}) \phi_{2,2}^{(k-1)} \\ & + (c_4 S_2^{(k)} - c_1 \frac{t^{(k+1)}}{4} S_2^{(k+1)}) \phi_{2,2}^{(k)} \\ & + \frac{c_1}{4} \left\{ \sum_{n=1}^{k-2} (t^{(n)} S_2^{(n)} + t^{(n+1)} S_2^{(n+1)}) \phi_{2,2}^{(n)} \right. \\ & \left. - \sum_{n=k+1}^{N-1} (t^{(n)} S_2^{(n)} + t^{(n+1)} S_2^{(n+1)}) \phi_{2,2}^{(n)} \right\} \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & f_{12}^{(k)}(c_1, c_2, c_3, c_4) \\
 &= Q_{66}^{(k)} \left[\begin{aligned} & c_1 (u_{01,2} + u_{02,1}) - 2 c_2 w_{,12} \\ & + (c_3 S_1^{(k)} + c_1 \frac{t^{(k-1)}}{4} S_1^{(k-1)}) \phi_{1,2}^{(k-1)} \\ & + (c_4 S_1^{(k)} - c_1 \frac{t^{(k+1)}}{4} S_1^{(k+1)}) \phi_{1,2}^{(k)} \\ & + (c_3 S_2^{(k)} + c_1 \frac{t^{(k-1)}}{4} S_2^{(k-1)}) \phi_{2,1}^{(k-1)} \\ & + (c_4 S_2^{(k)} - c_1 \frac{t^{(k+1)}}{4} S_2^{(k+1)}) \phi_{2,1}^{(k)} \\ & + \frac{c_1}{4} \left\{ \sum_{n=1}^{k-2} (t^{(n)} S_1^{(n)} + t^{(n+1)} S_1^{(n+1)}) \phi_{1,2}^{(n)} \right. \\ & \left. - \sum_{n=k+1}^{N-1} (t^{(n)} S_1^{(n)} + t^{(n+1)} S_1^{(n+1)}) \phi_{1,2}^{(n)} \right\} \\ & + \frac{c_1}{4} \left\{ \sum_{n=1}^{k-2} (t^{(n)} S_2^{(n)} + t^{(n+1)} S_2^{(n+1)}) \phi_{2,1}^{(n)} \right. \\ & \left. - \sum_{n=k+1}^{N-1} (t^{(n)} S_2^{(n)} + t^{(n+1)} S_2^{(n+1)}) \phi_{2,1}^{(n)} \right\} \end{aligned} \right]
 \end{aligned}$$

$$f_{23}^{(k)}(c_1, c_2) = c_1 \phi_2^{(k-1)} + c_2 \phi_2^{(k)}$$

$$f_{13}^{(k)}(c_1, c_2) = c_1 \phi_1^{(k-1)} + c_2 \phi_1^{(k)}$$

직교적층평판의 엄밀해는 Navier의 평판해석방법 [10]에 따라 식(17)의 경계조건을 만족하는 w ,

u_{0i} , ϕ_i 의 함수들과 횡하중(transverse load), q 를 다음과 같이 급수해(double Fourier series solutions)의 형태로 가정하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 w &= \sum_{m,n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y, \\
 q &= \sum_{m,n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \\
 u_{01} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y, \\
 u_{02} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \\
 \phi_1^{(k)} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \Phi_{1mn}^{(k)} \cos \alpha x \sin \beta y, \\
 \phi_2^{(k)} &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \Phi_{2mn}^{(k)} \sin \alpha x \cos \beta y \quad \dots\dots\dots (21)
 \end{aligned}$$

위에서 $\alpha = m\pi/a$, $\beta = n\pi/b$ 이다. 식(15)는 적층복합 평판 전체 층에 대한 평형방정식으로 적층수에 따른 방정식의 구성을 쉽게하기 위하여 식의 좌변을 임의의 k 층에 대하여 w , u_{0i} , ϕ_i 의 함수별로 정리하면

$$\begin{aligned}
 \delta w &: M_{ij,j}^{(k)} \\
 \delta u_{0i} &: N_{ij,j}^{(k)} \\
 \delta \phi_i^{(n)} &: \left(\frac{t^{(n)}}{4} S_i^{(n)} + \frac{t^{(n+1)}}{4} S_i^{(n+1)} \right) N_{ij,j}^{(k)} \\
 &\quad (n=1 \text{ to } k-2) \\
 \delta \phi_i^{(k-1)} &: \left(b_1^{(k)} S_i^{(k)} + \frac{t^{(k-1)}}{4} S_i^{(k-1)} \right) N_{ij,j}^{(k)} + \\
 &\quad + S_i^{(k)} \left\{ b_2^{(k)} (M_{ij,j}^{(k)} - N_{i3}^{(k)}) + b_3^{(k)} (R_{ij,j}^{(k)} - 2M_{i3}^{(k)}) \right\} \\
 \delta \phi_i^{(k)} &: \left(c_1^{(k)} S_i^{(k)} - \frac{t^{(k+1)}}{4} S_i^{(k+1)} \right) N_{ij,j}^{(k)} + \\
 &\quad + S_i^{(k)} \left\{ c_2^{(k)} (M_{ij,j}^{(k)} - N_{i3}^{(k)}) + c_3^{(k)} (R_{ij,j}^{(k)} - 2M_{i3}^{(k)}) \right\} \\
 \delta \phi_i^{(n)} &: - \left(\frac{t^{(n)}}{4} S_i^{(n)} + \frac{t^{(n+1)}}{4} S_i^{(n+1)} \right) N_{ij,j}^{(k)} \\
 &\quad (n=k+1 \text{ to } N-1) \quad \dots\dots\dots (22)
 \end{aligned}$$

와 같이 개별 층에 대하여 나타낼 수 있다. 임의의 k 층에 대한 구성식, 식(22)의 합응력성분을 식(18)의 함수식으로 변환하고 $k=1$ 부터 N 까지 누적하면 전체 층에 대한 평형방정식을 변위와 층간응력의 항으로 구성할 수 있다. 이때 식(21)의 급수해를 적용하여 상수들을 정리하면 다음과 같은 선형방정식을 구하게 된다.

$$[C] \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ U_{mn} \\ V_{mn} \\ \Phi_{1mn}^{(1)} \\ \Phi_{2mn}^{(1)} \\ \vdots \\ \Phi_{1mn}^{(N-1)} \\ \Phi_{2mn}^{(N-1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

여기서 $[C]$ 는 $(2N+1) \times (2N+1)$ 크기의 대칭행렬이 되며, 하중은 종류에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} Q_{mn} &= q_0 : \text{sinusoidally distributed load} \\ &\quad (m=n=1) \\ &= \frac{16q_0}{\pi^2 mn} : \text{uniformly distributed load} \\ &\quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

Table 1. Nondimensionalized deflections and stresses in 3-layer square laminates under sinusoidal load ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)

a/h	Source	w_0 $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0)$	σ_1 $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2})$	σ_2 $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{4})$	σ_4 $(\frac{a}{2}, 0, 0)$	σ_5 $(0, \frac{b}{2}, 0)$	σ_6 $(0, 0, \pm \frac{h}{2})$
4	Pagano [9]	1.937	0.720 - 0.684	0.663 - 0.666	0.292	0.219	- 0.0467 0.0458
	Present	1.829	0.712	0.735	0.160	0.212	0.0413
	(9-layer)	1.968	0.710	0.678	0.289	0.220	0.0473
	Reddy [6]	1.894	0.665	0.632	0.239	0.206	0.0440
	FSDT [6]	1.710	0.406	0.577	0.196	0.140	0.0308
10	Pagano	0.737	± 0.559	0.401 - 0.403	0.196	0.301	- 0.0275 0.0276
	Present	0.731	0.559	0.415	0.099	0.300	0.0273
	(9-layer)	0.739	0.561	0.403	0.193	0.302	0.0277
	Reddy	0.715	0.546	0.389	0.153	0.264	0.0268
	FSDT	0.663	0.499	0.362	0.129	0.167	0.0241
20	Pagano	0.513	± 0.543	0.308 - 0.309	0.156	0.328	∓ 0.0230
	Present	0.512	0.543	0.312	0.078	0.327	0.0230
	(9-layer)	0.513	0.543	0.309	0.154	0.328	0.0231
	Reddy	0.506	0.539	0.304	0.123	0.283	0.0228
	FSDT	0.491	0.527	0.296	0.109	0.175	0.0221
100	Pagano	0.435	± 0.539	± 0.271	0.139	0.339	∓ 0.0214
	Present	0.435	0.539	0.271	0.070	0.338	0.0214
	(9-layer)	0.435	0.539	0.271	0.137	0.339	0.0214
	Reddy	0.434	0.539	0.271	0.112	0.290	0.0213
	FSDT	0.434	0.538	0.271	0.101	0.178	0.0213

4. 계산결과 및 고찰

본 연구에서 개발된 해석이론에 대한 검증 및 정확도의 확인을 위하여 Pagano의 3차원 탄성이론(three-dimensional elasticity)[8,9]에 의한 해석에서 다루어졌던 몇가지 단순화된 직교적층평판

과 샌드위치평판에 대한 변위 및 응력들의 계산결과를 기존의 발표된 값들과 비교하였다. 예제문제에 고려된 직교적층평판은 섬유방향이 같은 층은 두께가 같고 두 방향의 전체 두께 합이 같게 대칭으로 적층된 다단 정사각형 평판으로 횡하중의 조건은 싸인분포하중(sinusoidally distributed load)이며,

섬유방향이 0° 인 층에서 다음과 같은 재료상수 (lamina properties)를 갖는다.

$$\begin{aligned} E_1 &= 25 \times 10^6 \text{ psi (174.6 GPa)}, \\ E_2 &= 10^6 \text{ psi (7 GPa)}, \\ G_{12} &= G_{13} = 0.5 \times 10^6 \text{ psi (3.5 GPa)}, \\ G_{23} &= 0.2 \times 10^6 \text{ psi (1.4 GPa)}, \\ \nu_{12} &= \nu_{13} = 0.25 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (25)$$

또한 계산결과는 Pagano에 의해 사용되었던 무차원 상수값으로 구해졌으며, Fig.1의 좌표계에서 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6) &= \frac{h^2}{q_0 a^2} (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}), \\ (\sigma_4, \sigma_5) &= \frac{h}{q_0 a} (\sigma_{23}, \sigma_{13}), \\ w_0 &= \frac{100 h^3 E_2}{q_0 a^4} w. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (26)$$

Table 1.은 3단 직교적층복합평판에 대한 결과를 나타낸 것으로 Pagano의 3차원 탄성이론에 의한 결과와 비교할때, 횡변위와 평면응력에서 1차전단 변형이론(FSDT) 및 Reddy의 단순 고차해석이론 보다 향상된 계산결과를 구할 수 있었다. 횡전단 응력은 본 연구에서 선형분포로 가정하였기 때문에 Fig.2에서 보는 것처럼 적층의 순서에 따라 정확도에 영향을 받는다. 그러나 중심부의 층을 동일

재질의 5개의 층으로, 바깥층을 2개의 층으로 나누어 계산한 (9-layer) 결과는 횡전단응력뿐만 아니라 두꺼운 평판에서 횡변위 및 평면응력을 비교적 정확하게 구할 수 있었다. 이는 Reddy의 해석이론과 비교할 때 특히 두꺼운 적층복합평판의 거동 해석에 있어 정확도를 높이기 위해서는 횡전단응력의 분포와 층간연속조건이 고려되어야 함을 뜻한다. 따라서 여러개의 얇은 층으로 구성된 복합 평판에서는 층내 횡전단응력의 분포를 선형으로 가정할 수 있기 때문에 본 연구에서 개발된 해석 방법으로 정확한 거동해석 결과를 구할 수 있다. Fig.3은 9단적층 복합평판의 횡전단응력 분포를 3차원 탄성이론의 해석결과와 비교하여 나타낸 것으로 선형분포로 가정하여도 실제의 분포형태와 크게 다르지 않았으며, Table 2.와 같이 좋은 거동해석 결과를 보여주었다.

샌드위치평판은 비교적 얇고 강한 표면판과 두껍고 무른 중심부로 구성되어 그 구조적 특성상 표면판은 주로 굽힘응력을, 중심부는 횡전단응력을 받으므로 횡전단응력 분포를 선형으로 가정할 수 있다. 따라서 본 연구의 해석방법은 샌드위치평판에 잘 적용될 수 있으며, Fig.4와 Table 3.에서 보는 것처럼 좋은 결과를 구할 수 있었다. 본 연구에서 예제문제로 다루어진 샌드위치평판은 식(25)의 재료상수를 갖고 두께가 평판 전체두께의 1/10인 표

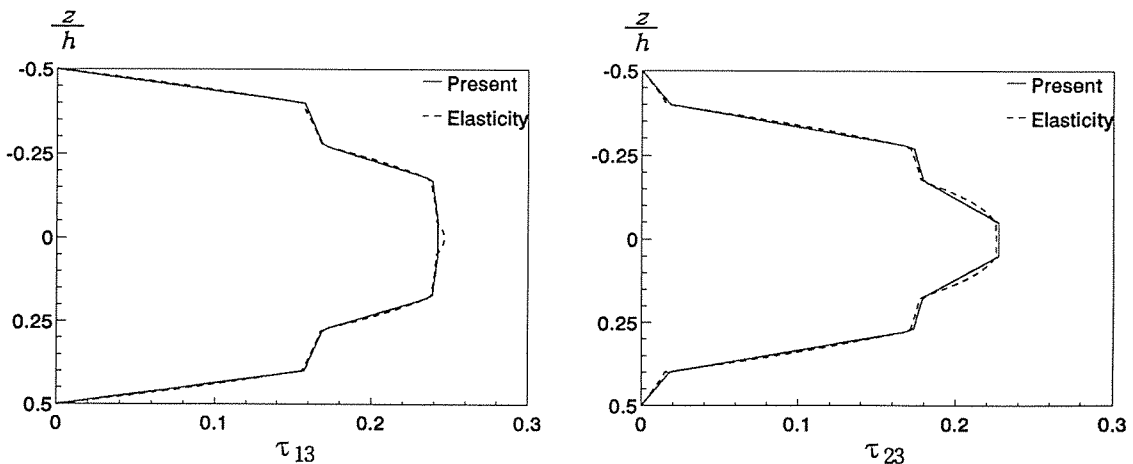


Fig. 3. The distribution of transverse shear stresses through the thickness of 9-layer cross-ply square laminate under sinusoidal load ($a/h=10$)

Table 2. Nondimensionalized deflections and stresses of multilayered square laminates under sinusoidal load

(a) 7-layer laminates($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$)

a/h	Source	$\frac{w_0}{(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0)}$	$\frac{\sigma_1}{(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2})}$	$\frac{\sigma_2}{(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{3h}{8})}$	$\frac{\sigma_4}{(\frac{a}{2}, 0, 0)}$	$\frac{\sigma_5}{(0, \frac{b}{2}, 0)}$	$\frac{\sigma_6}{(0, 0, \pm \frac{h}{2})}$
4	Pagano [9]	1.791	0.679 - 0.645	0.623 - 0.610	0.236	0.219	- 0.0356 0.0347
	Present	1.814	0.671	0.631	0.217	0.221	0.0357
10	Pagano	0.659	± 0.548	0.457 - 0.458	0.219	0.255	- 0.0237 0.0238
	Present	0.662	0.550	0.459	0.208	0.256	0.0239
20	Pagano	0.489	± 0.539	0.419 - 0.420	0.210	0.267	∓ 0.0219
	Present	0.489	0.540	0.420	0.200	0.268	0.0220
100	Pagano	0.434	± 0.539	± 0.405	0.205	0.272	∓ 0.0213
	Present	0.434	0.539	0.405	0.196	0.273	0.0213

(b) 9-layer laminates($0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$)

a/h	Source	$\frac{w_0}{(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0)}$	$\frac{\sigma_1}{(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2})}$	$\frac{\sigma_2}{(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{2h}{5})}$	$\frac{\sigma_4}{(\frac{a}{2}, 0, 0)}$	$\frac{\sigma_5}{(0, \frac{b}{2}, 0)}$	$\frac{\sigma_6}{(0, 0, \pm \frac{h}{2})}$
4	Pagano [9]	1.759	0.684 - 0.649	0.628 - 0.612	0.223	0.223	- 0.0337 0.0328
	Present	1.784	0.672	0.630	0.227	0.216	0.0338
10	Pagano	0.652	± 0.551	± 0.477	0.226	0.247	- 0.0233 0.0235
	Present	0.654	0.553	0.478	0.227	0.243	0.0235
20	Pagano	0.487	± 0.541	± 0.444	0.221	0.255	∓ 0.0218
	Present	0.487	0.541	0.445	0.223	0.252	0.0219
100	Pagano	0.434	± 0.539	± 0.431	0.219	0.259	∓ 0.0213
	Present	0.434	0.539	0.432	0.220	0.255	0.0213

Table 3. Nondimensionalized maximum stresses in square sandwich plates under sinusoidal load

a/h	Source	$\frac{w_0}{(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2})}$	$\frac{\sigma_1}{(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{2h}{5})}$	$\frac{\sigma_2}{(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \pm \frac{h}{2})}$	$\frac{\sigma_4}{(\frac{a}{2}, 0, 0)}$	$\frac{\sigma_5}{(0, \frac{b}{2}, 0)}$	$\frac{\sigma_6}{(0, 0, \pm \frac{h}{2})}$
4	Pagano [8]	1.556 - 1.512	- 0.233 0.196	0.2595 - 0.2533	0.1072	0.239	- 0.1437 0.1481
	Present	1.558	0.234	0.2519	0.1041	0.239	0.1480
10	Pagano	1.153 - 1.152	0.628 - 0.629	0.1104 - 0.1099	0.0527	0.300	- 0.0707 0.0717
	Present	1.155	0.628	0.1092	0.0513	0.300	0.0714
20	Pagano	1.110	0.810	0.0700	0.0361	0.317	0.0511
	Present	1.110	0.810	0.0697	0.0352	0.317	0.0512
100	Pagano	1.098	0.875	0.0550	0.0297	0.324	0.0437
	Present	1.098	0.875	0.0550	0.0291	0.324	0.0437

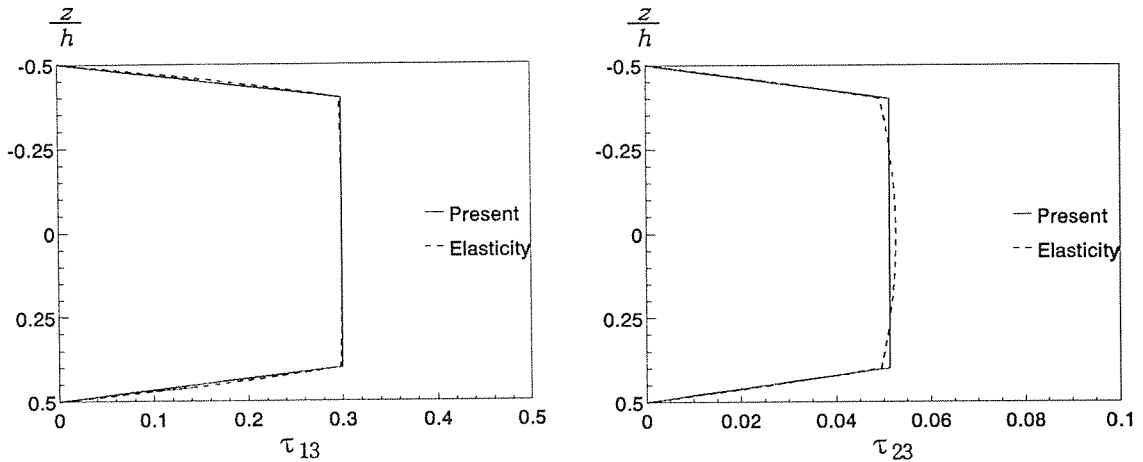


Fig. 3. The distribution of transverse shear stresses through the thickness of sandwich plate under sinusoidal load ($a/h=10$)

면판과 다음과 같은 재료상수를 갖는 중심부로 구성되었다.

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 &= 0.04 \times 10^6 \text{ psi (0.28 Gpa)}, \\ G_{13} = G_{23} &= 0.06 \times 10^6 \text{ psi (0.42 Gpa)}, \\ G_{12} &= 0.16 \times 10^6 \text{ psi (1.12 Gpa)}, \\ \nu_{12} = \nu_{13} &= 0.25 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (27)$$

4. 결 론

적층복합평판의 거동해석에서 횡전단변형의 영향을 충분히 고려하기 위하여 평판 상·하부 표면의 횡전단응력에 대한 경계조건과 층간 변위 및 횡전단응력의 연속조건을 만족할 수 있는 해석방법이 개발되었다. 여기서는 층내 횡전단응력의 분포를 선형으로 가정하여 변위장을 구하고 평형방정식을 유도하였으며 이 과정에서 기존의 복합평판 해석이론에서 요구되는 전단보정상수(shear correction coefficients)나 3차원 응력균형식의 적분과정은 사용되지 않았다. 평판의 전체 거동 및 세부적인 응력분포는 $(2N+1)$ 개 미지수로 구성된 평형방정식으로부터 구할 수 있었으며 단순지지된 직교적층복합평판에 대한 해석결과는 3차원 탄성이론에 의한 결과와 비교할 때, 특히 여러개의 얇은 층이 적층된 복합평판이나 샌드위치평판에서 Reddy의 단순고차해석이론 및 1차전단변형이론보다 정확한 거동

해석이 가능함을 보여주었다.

참 고 문 헌

1. Libove, C., and Batdorf, S.B., "A general small deflection theory for flat sandwich plates," NACA Report No. 899, 1948.
2. Yang, P.C., Norris, C.H. and Stavsky, Y., "Elastic wave propagation in heterogeneous plates," International Journal of Solids Structures, Vol.2, 1966. pp.665-684.
3. Whitney, J.M., and Pagano, N.J., "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates," Journal of Applied Mechanics, Vol.37, 1970, pp. 1031-1036.
4. Whitney, J.M., "Stress analysis of thick laminated composite and sandwich plates," Journal of Composite Materials, Vol.6, 1972, pp.426-440.
5. Lo, K.H., Christensen, R.M., and Wu, E.M., "A high-order theory of plate deformation," Journal of Applied Mechanics, Vol.44, 1977, pp.669-676.
6. Reddy, J.N., "A simple higher-order theory for laminated composite plates," Journal of Applied

Mechanics, Vol.51, 1984, pp.745-752.

7. Toledano, A., and Murakami, H., "A composite plate theory for arbitrary laminate configurations," *Journal of Applied Mechanics*, Vol.54, 1987, pp.181-189.

8. Pagano, N.J., "Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates," *Journal of Composite Materials*, Vol.4,

1970, pp.20-34.

9. Pagano, N.J., and Hatfield, S.J., "Elastic behavior of multilayered bidirectional composites," *AIAA Journal*, Vol.10, 1972, pp.931-933.

10. Reddy, J.N., "Energy and variational methods in applied mechanics," Wiley, New York, 1984, pp.396-399.
