

## 충격량-운동량 이론을 접목시킨 발포 폴리프로필렌의 구성방정식

김병길\* · 조재웅\*\* · 정광영\*\* · 김남훈\*\* · 오범석\*\* · 한영원\*\*\* · 전성식\*\*\*†

### A Constitutive Equation with Impulse-Momentum Theory for the Expanded Polypropylene

Byeong Kil Kim\*, Jae Ung Cho\*\*, Kwang Young Jeong\*\*, Nam Hoon Kim\*\*, Bum S. Oh\*\*,  
Youngwon Hahn\*\*\*, Seong S. Cheon\*\*\*†

**ABSTRACT:** In this paper, impulse-momentum theory was coupled to a constitutive equation both for implementing quasi-static and impact characteristics of EPP (Expanded polypropylene). Also, parameters which have physical meanings were expressed as functions of relative density. Simultaneous nonlinear Newton-Raphson method was applied to find the proper values for parameters in the constitutive equation along with quasi-static test data. Results from the impulse-momentum theory coupled constitutive equation showed good agreement with experimental data and the potential to be applied to different material type polymeric foam.

**초 록:** 본 연구에서는 EPP(Expanded polypropylene) 준정적 및 충격 하중에 대한 구성방정식을 표현하는 데 있어서, 충격량-운동량 이론을 연계하였다. 또한, 구성방정식을 이루는 물리적으로 의미있는 변수들에 대해, 상대밀도의 함수로 표현하였다. 이를 위해, 연립 비선형 뉴턴-랩슨 방법을 사용하여, 준정적 시험결과에 맞는 구성방정식의 변수값을 선정하였다. 또한, 충격량-운동량 이론이 구성방정식과 연계되어, 충격시 응력-변형률 선도를 변형률 속도에 따라 구하였고, 충격시험결과와 비교하였다. 향후에는 다른 재질의 발포고분자에도 본 구성방정식이 적용될 수 있을 것으로 사료된다.

**Key Words:** 구성방정식(Constitutive equation), 발포 폴리프로필렌(Expanded Polypropylene), 충격량-운동량(Impulse momentum), 계장화 충격시험(Instrumented impact test), 준정적 시험(Quasi-static test)

## 1. 서 론

최근 에너지 절감과 강화된 자동차 법규에 따라 차량의 경량화와 안전화가 자동차 설계에 중요한 목표가 되고 있으며 이에 따라 차량용 부품은 철강 재료에서 플라스틱이나 다공질 재료 등으로 대체되어 가고 있다. 발포 폴리프로필렌(Expanded Polypropylene: EPP)과 같은 다공질재료는 밀도가 낮아서 상당히 가볍고, 충돌 시 에너지 흡수, 흡음 및

진동방지 등의 목적으로 자동차, 전자제품 등 여러 분야에 사용되고 있다. 자동차를 예로 들면 이러한 다공질 재료는 충돌에너지를 흡수하도록 크래시박스에 사용되며 충격으로부터 승객을 보호하도록 사이드 패널에 사용되고 있다[1].

현재 다공성 재료는 크게 금속형과 고분자계로 나눌 수 있으며, 고분자계 다공성 재료는 주로 반응사출성형(RIM, Reaction Injection Moulding)으로 제조되고 있다[2]. 최근에는 발포기술의 발전과 함께 EPP에 대한 사용이 증대되면

Received 2 March 2016, received in revised form 20 June 2016, accepted 27 June 2016

\*Department of Mechanical Engineering, Kongju National University

\*\*Division of Mechanical & Automotive Engineering, Kongju National University

\*\*\*†Division of Mechanical & Automotive Engineering, Kongju National University, Corresponding author (E-mail: sscheon@kongju.ac.kr)

\*\*\*Dassault Systemes SIMULIA

서 자동차 범퍼를 구성하는 부품은 강철재료 대신 플라스틱 또는 비철 재료로 대체 되어가고 있는 추세이다[3].

EPP는 기본적으로 발포체이기 때문에 발포체가 갖는 특성 외에도 독특한 특성을 보이고 있다. 먼저 구조적인 특성으로는 표면의 셀(Cell)이 작고 내부로 갈수록 셀이 커지기 때문에 표면은 매우 부드럽지만 내부에서는 강한 기계적 물성을 가진다고 알려져 있다[4].

Kim 등[5]은 EPP 및 EPS의 구성방정식 결정을 위한 체계적인 DB를 구축하는 것을 목표로 하였다. 이를 위해 각 발포고분자에 대하여 4가지의 다른 밀도를 갖는 원통형 시편으로  $0.001 \text{ s}^{-1}$ 와  $0.1 \text{ s}^{-1}$ 의 준정적 압축시험과  $100 \text{ s}^{-1}$ 의 충격 압축시험을 통해 기본 입력 데이터로 활용될 수 있도록 하였다.

Bouuix 등[6]은 소재의 고속변형특성을 연구하기 위하여 흡킨스 바 시험기 및 중고속 인장 시험기를 개발하여 자동차용 강판의 변형률속도 효과를 시험적으로 구하여 충돌 해석의 기본 입력 데이터로 활용될 수 있도록 하였으며, Jeong 등[7]은 폴리우레탄(Polyurethane) 폼(Foam)에 대한 변형률속도에 따른 응력-변형률 관계를 설명하기 위해 구성방정식을 제안 하였다. 이를 통하여 충돌 시 시편의 변형거동을 시간에 따라 예측 가능 하였고, 시험치와 비교한 과도속도, 응력-변형률 선도 및 에너지 흡수 선도가 우수하게 일치함을 증명하였다.

이와 같이 EPP에 대한 실험적 규명은 광범위 하게 이루어지고, 구성 방정식에 대한 내용이 기술되어왔으나, impulse-momentum과 함께 연계된 결과는 보고된 바 없다. 따라서 본 논문에서는 구성방정식의 변수 중 물리적 특성을 갖는 변수들의 밀도함수를 정의하고, Kim 등[5]이 실험한 4가지의 다른 밀도를 갖는 EPP 시편의 준정적 및 충격 시험 DB를 바탕으로 Jeong 등[7]이 제시한 폴리우레탄에 대한 구성방정식을 EPP 폼에 대하여 다시 정의하여 충격량-운동량 이론을 접목시킨 새로운 구성방정식을 제안하기 위한 DB 구축을 목표로 하였다.

## 2. 구성 방정식

### 2.1 EPP의 밀도별 시편

Fig. 1은 시험에 사용된 시편을 나타내었다. Kim 등[5]은 4종류의 다른 밀도를 갖는 원기둥형 EPP 시편을 준비하여

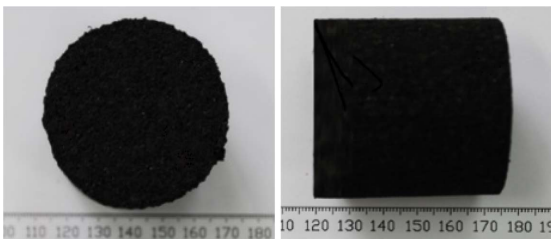


Fig. 1. Foam specimen of EPP

Table 1. EPP specimens

ID	Diameter (mm)	Length (mm)	Density (kg/m <sup>3</sup> )	Standard deviation (kg/m <sup>3</sup> )
EPP_1	49	50	23	0.52
EPP_2	49	48	28	0.55
EPP_3	49	50	61	0.44
EPP_4	49	51	146	5.02

실험을 하였다. 실험은 실험 데이터중 EPP만 선정한 이유는 플레토 구간의 응력이 EPS보다 EPP가 약 10% 높은 것을 보였다. 이는 EPS보다 EPP가 에너지 흡수율이 좋다는 것을 알 수 있다[8]. Table 1은 4종류의 EPP 시편의 제원과 밀도별 표준편차를 나타내었다. 시편 가공에는 시중에서 판매되는 일반 EPP판재 30배, 40배와 강화 EPP판재 7배, 15배가 사용하였으며 시험편의 치수는 최대 2% 이내의 오차 내에서 가공되었다.

각각의 시편에 대해 10개를 선별하여 치수와 밀도를 측정하였다. 본 연구에서 사용된 시험편은 10개 가운데 측정된 평균밀도와 유사한 시험편을 각각 3개씩 선별하여 같은 시험에 대해 3번의 시험이 수행될 수 있도록 하였다. 다만 EPP\_4의 경우 재료의 높은 밀도로 인하여 시편의 밀도 표준편차가 상대적으로 가장 고르지 못하게 제조된 것을 볼 수 있었다[5].

### 2.2 구성 방정식

다음의 식은 Jeong 등[7]이 제시한 발포 폴리우레탄의 구성방정식이다.

$$\sigma = \left\{ \sigma_p (1 - e^{(-(E/\sigma_p))\epsilon(1-\epsilon)})^m + \sigma_d \left( \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \right)^n \right\} \left\{ 1 + (a + b\epsilon) \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right\} \quad (1)$$

위의 식 (1)에서는 총 7개의 변수들이 있으며, 먼저 첫 번째 항은 준정적 항으로, 5개의 변수  $\sigma_p$ ,  $\sigma_d$ ,  $E$ ,  $m$ ,  $n$ 은 준정적 응력-변형률 선도에 의해 결정된다. 다음으로, 두 번째 항은 동적 충격 항으로, 나머지 두 개의 변수  $a$ 와  $b$ 의 값은 충격시험 데이터를 이용하여 찾게된다. 변수값들은 소재 및 밀도에 따라 달라지는 것으로 판단된다.

### 2.3 변수값 결정

식 (1)의 변수를 결정하기 위해 Kim 등[9]은 각 밀도별 EPP 시편에 대해  $0.001 \text{ s}^{-1}$  및  $0.1 \text{ s}^{-1}$ 의 두 변형률 속도기준으로 압축시험(Quasi-static test)을 진행하고, 연립 비선형 뉴튼-랩슨 방법(Simultaneous nonlinear Newton-Rapson method)을 이용하여 식 (1)의 준정적 항의 변수 5개를 구하였다. 준정적 항에서 첫 번째 텀은 탄성 구간(Elastic)과 플레토 구간(Plateau)을 의미하며 두 번째 텀은 고밀도화 구간

**Table 2.** Values for quasi-static parameters

ID	EPP_1	EPP_2	EPP_3	EPP_4
$\sigma_p$	0.0896	0.1364	0.3451	1.1945
$\sigma_d$	0.1034	0.1165	0.2945	1.4215
$E$	2.3154	4.5315	3.2154	45.6421
$m$	2.2695	2.8015	3.4155	4.8121
$n$	1.1680	1.1845	0.9384	1.1353

**Table 3.** Values for dynamic impact parameters

ID	EPP_1	EPP_2	EPP_3	EPP_4
$a$	0.0347	0.0381	0.0553	0.0601
$b$	0.001			

(Densification)을 의미한다.

식 (1)의 준정적 항을 통하여 EPP 폼의 준정적 특성을 파악할 수 있으며, 동적 충격 항을 적용하면 충격 특성을 결정할 수 있다. 따라서 각 항의 변수들을 구하기 위해선 준정적 압축시험을 수행하여 준정적 항의 변수들을 계산한 뒤, 충격시험을 진행하여 동적 충격 항의 변수들을 구하여야 한다.

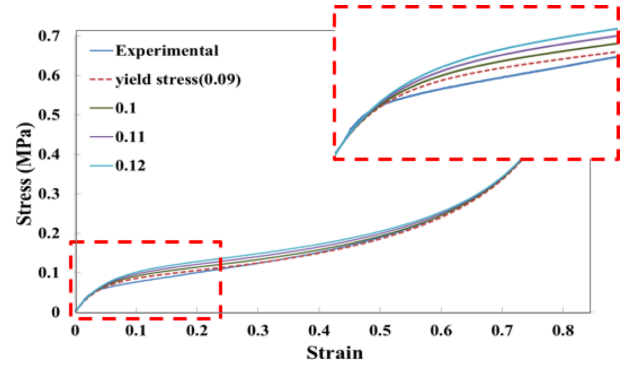
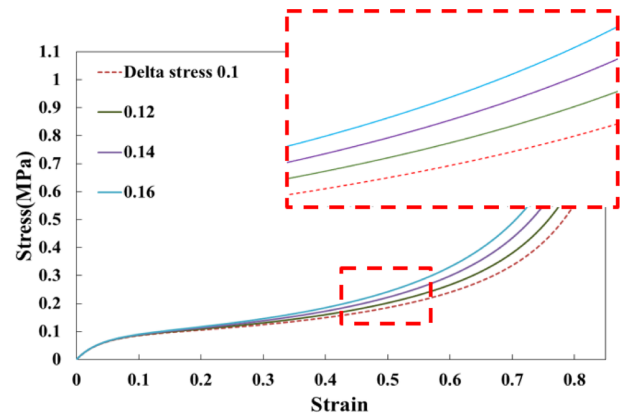
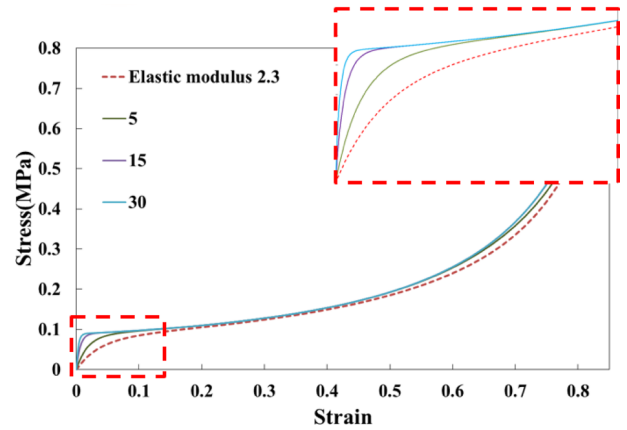
식 (1)에서 준정적 항의 다섯 개 변수들은  $0.001 \text{ s}^{-1}$ 의 일정한 변형률 속도로 진행된 실험결과와 데이터로부터, 연립비선형 뉴턴랩슨 법에 의해 결정되었다. 나머지 동적 충격 항에 두 개의 변수  $a$  및  $b$ 를 결정하는데 있어서 또 다른 변형률속도의 데이터가 필요하여  $0.1 \text{ s}^{-1}$ 의 일정한 변형률 속도로 진행 하였으며, EPP 폼의 동적 특성을 파악하기 위해서 낙하식 충격시험기(Instron Dynatup 9250 HV)를 사용하여  $94 \text{ s}^{-1}$ 의 빠른 속도로 충격시험을 진행하였다. 마찬가지로 연립비선형 뉴턴랩슨 법을 통하여 결정 되었다.

## 2.4 주요 변수의 밀도 함수화

Jeong 등[7]이 제시한 식 (1)의 7가지 변수 중 물리적 성질을 가지고 있는 3가지의 변수들이 있다.  $\sigma_p$ 는 Stress of plateau region,  $\sigma_d$ 는 Stress of densification region, 마지막으로  $E$ 는 탄성구간의 Elastic modulus를 의미한다. 이 3가지 변수들은 밀도의 영향을 받으며, 밀도가 변화하면 변수 또한 변화한다.

Figs. 2-4는 각각의 변수 값들의 변화가 커브에 미치는 영향을 나타내고 있으며, 커브의 변화는 각 변수들의 물리적 성질과 관련된다.

Fig. 5는 각 시편의 밀도 변화에 따른 변수 값의 변화를 밀도 비율의 2차 함수로 정의하여 커브로 나타낸 것이다. 밀도 비율  $\rho_r$ 은 식 (2)를 활용하여 구할 수 있다. 식 (2)에서  $\rho_{bulk}$ 는 순수한 EPP소재의 밀도이며,  $\rho_f$ 는 실제 EPP시편의 밀도를 의미한다. Table 4에 각 변수들의 밀도 함수를 정리하였다. 이 함수들을 통하여 복잡한 행렬식으로 변수들을 구하기 이전에 밀도만으로 근접한 값을 구할 수 있다.

**Fig. 2.** The impact of parameter  $\sigma_p$ **Fig. 3.** The impact of parameter  $\sigma_d$ **Fig. 4.** The impact of parameter  $E$ **Table 4.** Parameters defined by relative density

ID	EPP_1	EPP_2	EPP_3	EPP_4
$\sigma_p$	$\sigma_p = 22.94\rho_r^2 + 3.73\rho_r - 0.013$			
$\sigma_d$	$\sigma_d = 63.97\rho_r^2 - 2.36\rho_r + 0.125$			
$E$	$E = 63.97\rho_r^2 - 316.04\rho_r + 9.594$			
$a$	$a = -3.21\rho_r^2 + 0.789\rho_r + 0.0165$			

$$\rho_r = \frac{\rho_f}{\rho_{bulk}} \quad (2)$$

추가적으로 식 (1) 동적 충격 항의 변수인  $a$  또한 밀도에 따라 변화하는 특성을 지니고 있으므로, Fig. 3의 (d) 그래

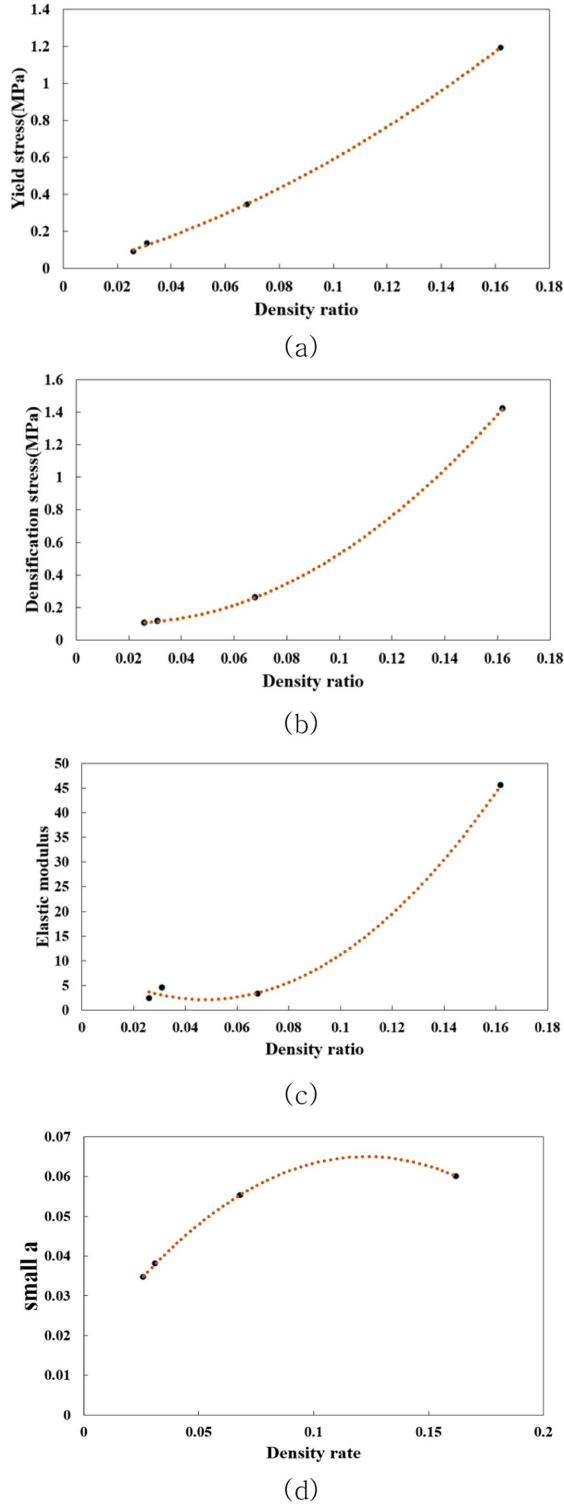


Fig. 5. The curve of parameters w.r.t. relative density: (a)  $\sigma_y$ , (b)  $\sigma_d$ , (c)  $E$ , (d)  $a$

프와 같이 밀도의 함수로서 표현하였다.

## 2.5 충격량-운동량 이론

Kim 등[5]은 4가지의 다른 밀도를 갖는 원통형 시험편으로 한 EPP의 준정적 및 충격 시험을 실시하여, Jeong 등[7]이 제시한 폴리우레탄에 대한 구성방정식에 적용하였다. 하지만, 변형률 속도의 변화가 없는 준정적 시험의 조건만 고려되었으므로, 좀 더 정확한 결과 값을 얻기 위해서는 충격 시험의 변형률 속도 변화를 고려할 필요가 있다. 이를 위하여 충격량-운동량 이론을 접목시켜 새로운 DB를 구축하였다. 다음 식 (3-1)부터 식 (3-3)은 충격량-운동량 이론이며, 속도 변화를 구하기 위하여 풀이한 과정이다. 식 (4)를 활용하여 다음 단계의 속도를 구할 수 있으며 그 결과 값을 다시 초기 속도로 설정하여 계산하면 그 다음 속도를 구할 수 있다. 이러한 방식으로 반복적인 연산을 수행 한다면 변위에 따른 속도 변화를 정확히 구할 수 있다. Fig. 6는 식 (4)의 반복 연산 결과 값을 나타낸 것이다.

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} \quad (3-1)$$

$$\int F dt = \int \sigma A dt = \int_{v_i}^{v_{i+1}} m dv \quad (3-2)$$

$$\sigma_{i+1} A \Delta t = m v_{i+1} - m v_i \quad (3-3)$$

$$m v_i + \sigma_{i+1} A \Delta t = m v_{i+1} \quad (4)$$

$$\frac{v_i}{L_0} = \dot{\epsilon}_i \quad (5)$$

식 (4)를 이용하여 얻은 속도는 식 (5)를 활용하여 변형률 속도로 계산한다. 식 (1)과 (4)는 연성(couple)되어 있으며, 따라서 매 순간마다 식 (1)을 풀어서 응력을 구하고, 구해진 응력을 식 (4)에 넣고 다음단계의 충격체 속도를 구한다. 식 (5)를 이용하여 변형률 속도를 구한 다음, 다시 식 (1)에 대입하여 다음단계의 응력을 구하는 계산이 필요하다. 일련의 본 과정이 Fig. 7에 요약되어 있다.

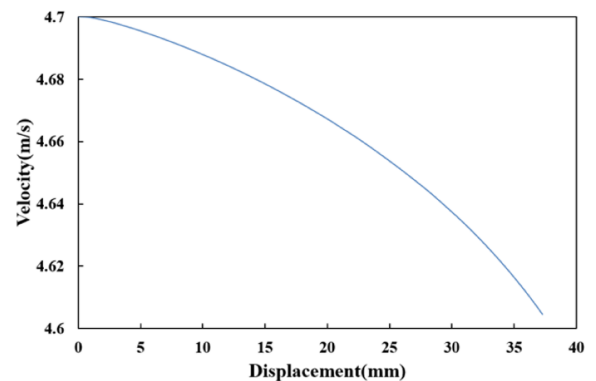


Fig. 6. Velocity-Displacement curve in the impact test

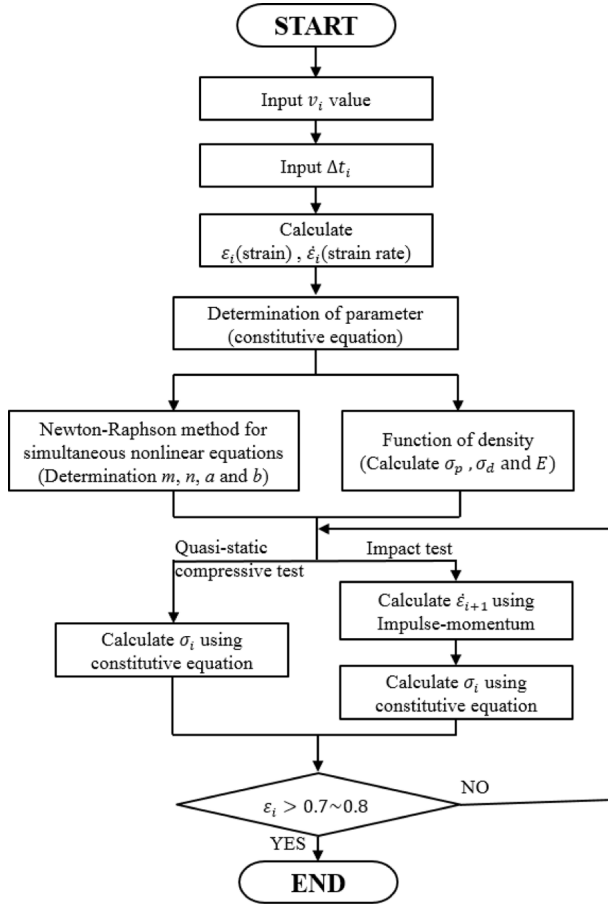


Fig. 7. Flowchart of solving coupled equation

### 3. 결과분석

#### 3.1 준정적시험 결과 비교

Fig. 8은 식 (1)의 첫 번째 항에 대한 EPP 폼의 각각의 밀도별 그래프이다. 분석결과 값과 실험결과 값 ( $\dot{\varepsilon}_0 = 0.001 \text{ s}^{-1}$ )이 우수하게 일치하는 것을 볼 수 있었지만, EPP\_3과 4는 Yield stress 구간에서 오차가 발생하였다. 이는 상대적으로 EPP\_3 및 4의 밀도가 높기 때문에 탄성구간의 영률 및 틀래도 응력이 높아 발생하는 것으로 예상 할 수 있다.

#### 3.2 충격시험 결과 비교

충격시험의 결과 데이터는 충격시험 특성상 Noise가 발생하였다. Fig. 9는 Noise로 인한 오차를 줄이기 위하여 MATLAB을 활용하여 curve fitting을 수행한 그래프이다.

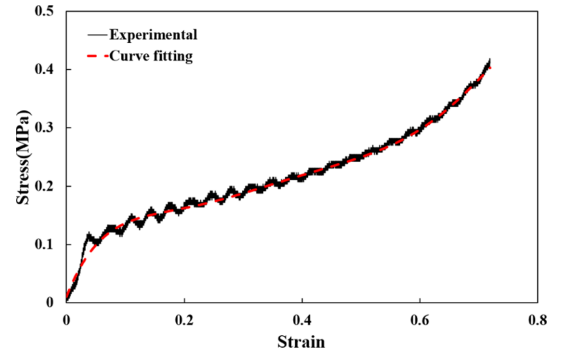
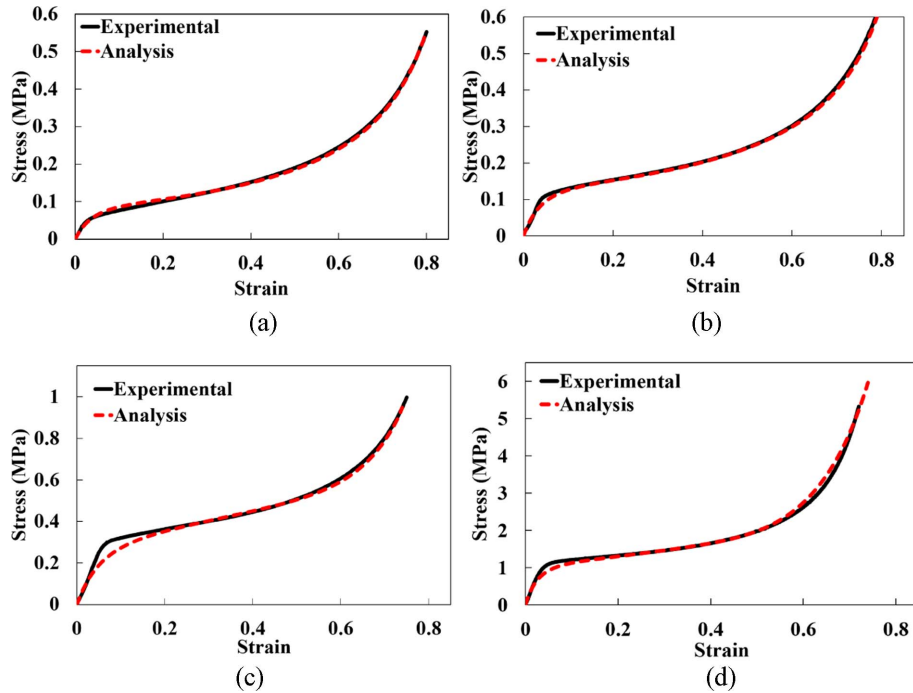


Fig. 9. Impact experimental curve vs curve fitting

Fig. 8. Stress-strain relation: (a) EPP\_1, (b) EPP\_2, (c) EPP\_3 and (d) EPP\_4 ( $\dot{\varepsilon}_0 = 0.001 \text{ s}^{-1}$ )



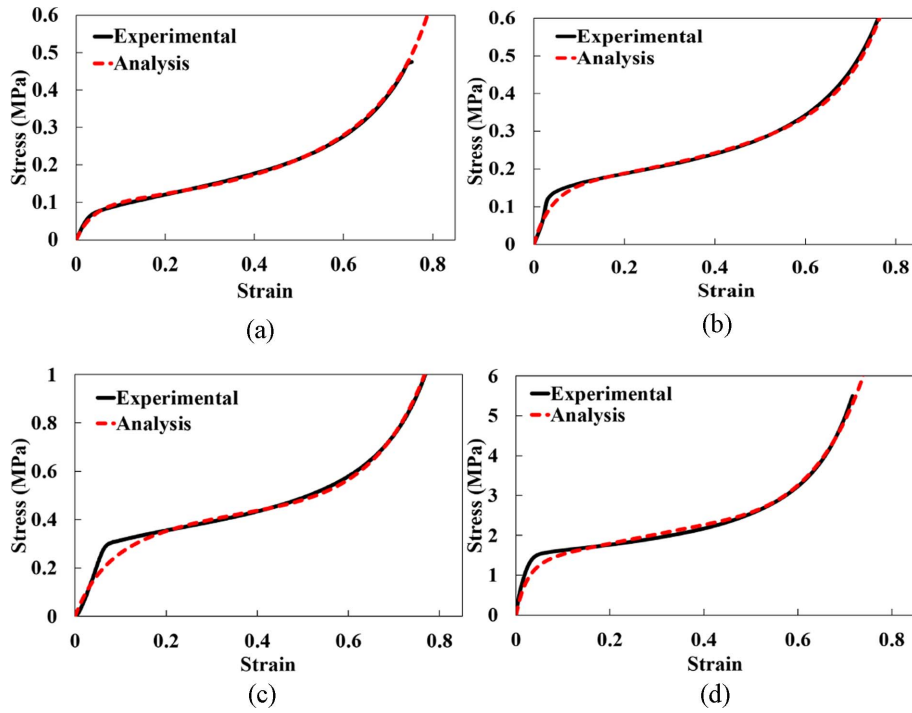


Fig. 10. Stress-strain relation: (a) EPP\_1, (b) EPP\_2, (c) EPP\_3 and (d) EPP\_4 ( $\dot{\epsilon}_0 = 94 \text{ s}^{-1}$ )

Fig. 10은 식 (1)을 적용하였을 경우 ( $\dot{\epsilon}_0 = 94 \text{ s}^{-1}$ ) 충격시험 결과 값의 curve fitting 값과 분석 결과 값을 비교하여 EPP 폼의 밀도 별로 나타내었다.

분석결과 충돌 결과를 반영할 수 있는 식 (1)의 두 번째 항이 적용되면 충격시험 결과와도 우수하게 일치함을 확인 하였다. 또한, 충격시험 데이터와 더욱 우수하게 일치하는 값을 얻기 위하여 충격량-운동량 이론을 두 번째 항에 적용하였다.

$$Error = \sum \sqrt{(\sigma_{EXP} - \sigma_{Ana})^2} \quad (6)$$

식 (6)을 활용하여 변형률 속도를 일정하게 하여 계산한 결과 값과, 충격량-운동량 이론을 적용하여 변위에 따라 변형률 속도를 다르게 하여 계산한 결과 값의 실제 실험결과와의 오차를 구하였으며, 그 결과를 비교하였다. 비교한 결과, 변형률 속도 변화를 고려하여 계산한 결과 값의 오차가 그렇지 않은 경우보다 평균적으로 8.4%의 오차 감소율을 보였다. 즉, 변형률 속도 변화를 고려하여 구성방정식에 적용하면 더욱 우수한 결과를 보이는 것으로 사료된다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 Kim 등[5]이 제시한 4가지의 다른 밀도를 갖는 원통형 EPP 시험편의 준정적 및 충격 시험 DB를 바탕

으로 Jeong 등[7]이 제시한 폴리우레탄에 대한 구성방정식을 EPP 폼에 대하여 다시 정의 하여 충격량-운동량 이론을 접목시켜 새로운 구성방정식을 제안하기 위한 DB 구축을 목표로 하였다.

1) 준정적 항의 변수들은 기준 변형률 속도 ( $\dot{\epsilon}_0 = 0.001 \text{ s}^{-1}$ ) 에 의해 결정되었다.

2) 변형률 속도에 의해 결정되는 동적 충격 항의 변수들은 기준 변형률 속도와 다른 변형률 속도 ( $\dot{\epsilon}_0 = 0.1 \text{ s}^{-1}$ ) 와 ( $\dot{\epsilon}_0 = 94 \text{ s}^{-1}$ ) 의해 결정되었다.

3) 7개의 변수 중 물리적 특성을 지니는 3가지의 변수  $\sigma_p$  (Stress of plateau region),  $\sigma_d$  (Stress of densification region),  $E$  (Elastic modulus)는 밀도의 함수로서 정의되었다.

4) 충격실험 데이터 연산 과정에서 충격량-운동량 이론을 접목시켜 변위에 따른 변형률 속도를 구성방정식에 적용한 결과, 변형률 속도를 일정하게 계산한 결과 값보다 오차가 평균적으로 8.4% 낮아졌다.

결론적으로, 폴리우레탄에 적용하기 위하여 제안한 구성방정식도 재질이 다른 고분자에 적용될 수 있다는 점을 보였으며, 변형률 속도 변화를 고려하여 구성방정식에 적용하면 더욱 우수한 결과를 보이는 것으로 나타났다. 향후 고밀도 시편의 Yield stress 구간에서 발생하는 오차를 줄이기 위한 추가적인 연구가 필요하며, 다른 재질의 발포 고분자에도 본 연구에서 제안된 방법으로 구성방정식을 정의할 수 있을 것으로 기대된다.

## 후 기

이 논문은 2015년도 정부 (교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No.2015R1D1A1A01058132).

## REFERENCES

1. Willinger, M., "Industrial Development of Composite Materials: Toward a Functional Appraisal," *Composites Science and Technology*, Vol. 34, 1989, pp. 53-71.
2. Moutos Franklin T., Freed Lisa E., and Guilak Farshid, "A Biomimetic Three-dimensional Woven Composite Scaffold for Functional Tissue Engineering of Cartilage," *Journal of Nature Materials*, Vol. 6, 2007, pp. 162-167.
3. Kim, M.H., Cho, S.S., and Ha, S.K., "Design and Structural Analysis of Aluminum Bumper for Automobiles," *Transactions of KSAE*, Vol. 7, No. 3, 1999, pp. 217-227.
4. Choi, C.H., "Expanded Polypropylene and Packaging Materials," *Journal of the Monthly Packaging world*, No. 214, 1996, pp. 58-67.
5. Kim, H.K., Kim, B.J., Jeong, K.Y., and Cheon, S.S., "Experimental Study for the Impact Characteristics of Expanded EPP/EPS Foams," *Journal of the Korean Society for Composite Materials*, Vol. 26, No. 6, 2013, pp. 343-348.
6. Bouuix, R., Voit, P., and Lataillade, J., "Polypropylene Foam Behaviour Under Dynamic Loading : Strain Rate, Density and Microstructure Effects," *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 36, Issue. 2, 2009, pp. 329-342.
7. Jeong, K.Y., Cheon, S.S., and Munshi, M.B., "A Constitutive Model for Polyurethane Foam with Strain Rate Sensitivity," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 26, No. 7, 2012, pp. 2033-2038.
8. Kim, B.J., Kim, H.K., and Cheon, S.S., "A Study on the Absorbed Energy of Polymer Material of Vehicles between Mass and Strain Rate Effect Velocity Value Based on Constant Energy," *Proceeding of the Korean Society for Composite Materials, Korea*, May 2013, pp. 43-44.
9. Kim, H.K., and Cheon, S.S., "A Constitutive Equation Including Strain Rate Effect for the Expanded Polypropylene," *Proceeding of the Korean Society for Composite Materials, Korea*, Vol. 27, No. 4, 2014, pp. 130-134.